

A. TIMOTIN
V. HORTOPAN
S. MASTERO
A. IFRIM
M. PREDA

Lecții
**DE BAZELE
ELECTROTEHNICII**

VOL. I

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI - 1964

MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÎNTULUI
INSTITUTUL POLITEHNIC — BUCUREȘTI

A. TIMOTIN * V. HORTOPAN * S. MASTERO
A. IFRIM * M. PREDA

Lecții

DE BAZELE ELECTROTEHNICII

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI — 1964

TABLA DE MATERII

	<u>Pag.</u>
 CIRCUITE ELECTRICE ÎN REGIM VARIABIL	
31. <i>Regimul quasistaționar al circuitelor electrice filiforme</i>	11
31.1. Recapitularea legilor electromagnetismului	12
31.2. Relații fundamentale pentru studiul circuitelor	15
31.3. Elementele de circuit	18
32. <i>Circuite simple în regim tranzitoriu</i>	26
32.1. Regimul tranzitoriu de stabilire a curentului într-o bobină (circuit RL)	26
32.2. Regimul tranzitoriu de încărcare a unui condensator (circuit RC)	30
32.3. Regimul tranzitoriu al unui circuit serie RLC sub tensiune aplicată constantă	33
32.4. Concluzii	36
 CURENȚI ALTERNATIVI	
33. <i>Regimul permanent sinusoidal</i>	37
33.1. Mărimi variabile și mărimi sinusoidale. Terminologie	38
33.2. Regimul permanent sinusoidal al circuitelor simple, determinat cu metoda substituției soluțiilor sinusoidale	47
33.3. Caracterizarea în complex a circuitelor liniare în regim permanent sinusoidal	53
33.4. Puteri	59
34. <i>Metode de reprezentare simbolică a mărimilor sinusoidale și utilizarea lor</i>	65
34.1. Reprezentări geometrice	67
34.2. Reprezentări analitice (în complex)	79
34.3. Caracterizarea în complex a circuitelor liniare	90
34.4. Formele complexe ale „legii lui Ohm“	98
 <i>Impedanțe echivalente și utilizarea lor</i>	 104
35.1. Impedanța complexă echivalentă și admitanța complexă echivalentă	104
35.2. Teoremele impedanțelor echivalente	106
35.3. Circuite cu inductivități mutuale	110
35.4. Circuite rezonante	111
35.5. Circuite cu proprietăți speciale	117
35.6. Linia monofazăată scurtă de curent alternativ	119

36. Teoremele lui Kirchhoff pentru rețelele de curent alternativ.....	121
36.1. Teoremele lui Kirchhoff în valori instantanee.....	121
36.2. Forma complexă a teoremelor lui Kirchhoff	127
36.3. Aplicații	130
37. Conservarea puterilor în rețelele de curent alternativ.....	133
37.1. Teorema conservării puterilor instantanee	133
37.2. Teoremele conservării puterilor complexe, active și reactive.....	136
37.3. Aplicații la teoremele de conservare a puterilor.....	144
37.4. Transferul maxim de putere pe la borne	146
38. Metode și teoreme pentru rezolvarea circuitelor de curent alternativ	149
38.1. Metoda suprapunerii efectelor	149
38.2. Metode de transfigurare	151
38.3. Metoda curenților de ochiuri (Maxwell).....	161
38.4. Metoda potențialelor de noduri.....	167
REȚELE ELECTRICE TRIFAZATE	
39. Sisteme trifazate, caracterizare și proprietăți.....	172
39.1. Sisteme trifazate simetrice de mărimi sinusoidale.....	173
39.2. Producerea tensiunilor electromotoare trifazate simetrice.....	178
39.3. Conexiunile sistemelor trifazate	180
39.4. Câmpuri magnetice învârtitoare	183
40. Rezolvarea rețelor trifazate echilibrate, sub tensiuni la borne simetrice.....	188
40.1. Receptoare trifazate echilibrate în stea.....	189
40.2. Receptoare trifazate echilibrate în triunghi.....	193
40.3. Puteri în rețele trifazate echilibrate.....	196
40.4. Aplicații	197
41. Rezolvarea rețelor trifazate dezechilibrate sub tensiuni la borne date.....	200
41.1. Teorema potențialului punctului neutru.....	201
41.2. Receptor dezechilibrat în stea, cu fir neutru.....	202
41.3. Receptor dezechilibrat în stea fără fir neutru (fig. 41.6).....	204
41.4. Receptor dezechilibrat în triunghi (fig. 41.9).....	208
41.5. Puteri în rețele trifazate dezechilibrate.....	210
42. Metoda componentelor simetrice	212
42.1. Descompunerea unui sistem trifazat de mărimi în trei sisteme componente trifazate simetrice	213
42.2. Circuite trifazate echilibrate alimentate cu tensiuni nesimetrice	222
42.3. Circuite trifazate dezechilibrate	227
42.4. Calculul puterii cu ajutorul componentelor simetrice.....	234
CUADRIPOLI	
43. Cuadripoli electrici	235
43.1. Cuadripoli generali	235
43.2. Cuadripoli diporți	237
43.3. Ecuațiile și parametrii cuadripolilor liniari, pasivi și reciproci.....	238
43.4. Determinarea parametrilor cuadripolilor	243

43.5. Impedanțe caracteristice	247
43.6. Cuadripoli echivalenți și scheme echivalente	250
43.7. Cuadripoli neregiproci	253
44. Utilizarea calculului matriceal	255
44.1. Matrice și operații algebrice cu matrice	256
44.2. Matricele cuadripolilor și forma matriceală a ecuațiilor	262
44.3. Conexiunile cuadripolilor diporți	265
44.4. Aplicații	267
45. Lanțuri de cuadripoli și filtre electrice	269
45.1. Lanț de cuadripoli	269
45.2. Raportul de transmisiune și caracteristicile de frecvență	274
45.3. Filtre electrice	275
46. Diagrame — loc geometric	281
46.1. Inversiunea geometrică	282
46.2. Inversiunea complexă	283
46.3. Exemple de diagrame — loc geometric	285
46.4. Aplicație. Diagrama—loc geometric al curentului primar al unui cuadripol pasiv	288

CIRCUITE ELECTRICE ÎN REGIM PERIODIC NESINUSOIDAL

47. Regimul periodic nesinusoidal și caracterizarea lui	290
47.1. Descompunerea spectrală (analiza armonică) a funcțiilor periodice de timp	291
47.2. Seria Fourier complexă	296
47.3. Proprietăți ale mărimilor periodice nesinusoidale	297
47.4. Puteri în regim nesinusoidal	301
48. Regimul permanent nesinusoidal al rețelelor liniare	303
48.1. Elemente de circuit în regim nesinusoidal	303
48.2. Circuite liniare sub tensiune nesinusoidală la borne	307
48.3. Influența armonicilor de tensiune în circuitele trifazate	309
49. Circuite neliniare în regim periodic permanent	310
49.1. Teoremele lui Kirchhoff și conservarea puterilor la circuite cu elemente dipolare neliniare	310
49.2. Redresorul ideal	314
49.3. Teoremele lui Kirchhoff pentru mici componente variabile în jurul unui punct de funcționare staționar	316
49.4. Bobina cu miez de fier	319
49.5. Condensatorul cu pierderi	331

CIRCUITE ELECTRICE ÎN REGIM TRANZITORIU

50. Metoda descompunerii spectrale (transformarea Fourier)	339
50.1. Integrala Fourier și transformarea Fourier	339
50.2. Descompunerea spectrală a funcțiilor de timp	341
50.3. Aplicarea descompunerii spectrale la studiul regimului tranzitoriu	342
50.4. Aplicație	343

51. Metoda răspunsului tranzitoriu (integrala Duhamel).....	344
51.1. Funcțiune de răspuns tranzitoriu.....	344
51.2. Integrala Duhamel.....	346
52. Metoda operațională (transformarea Laplace).....	349
52.1. Transformarea Laplace și proprietățile ei.....	350
52.2. Determinarea funcțiunii original corespunzătoare unei transformate Laplace date	358
52.3. Aplicarea transformării Laplace la studiul unor regimuri tranzitorii.....	360
52.4. Forma operațională a teoremelor lui Kirchhoff.....	363
52.5. Metoda operațională de rezolvare a circuitelor în regim tranzitoriu.....	366
 LINII ELECTRICE LUNGI	
53. Linii lungi în regim tranzitoriu.....	371
53.1. Parametrii primari ai liniilor electrice lungi (parametri lineici).....	373
53.2. Ecuațiile telegraștilor	376
53.3. Integrarea ecuațiilor telegraștilor în regim tranzitoriu pentru liniile fără pierderi	379
54. Linii lungi în regim permanent sinusoidal.....	384
54.1. Studiul ecuațiilor telegraștilor în complex.....	384
54.2. Ecuațiile liniilor electrice lungi.....	392
54.3. Aplicații	394
 CONDUCTOARE MASIVE	
55. Câmpul electromagnetic în conductoare masive..	397
55.1. Ecuațiile câmpului electromagnetic în conductoare masive.....	398
55.2. Pătrunderea câmpului electromagnetic în semispațiul conductor infinit.....	401
55.3. Probleme de curenți turbionari.....	406
56. Efectul pelicular.....	411
56.1. Problemele efectului pelicular	411
56.2. Efectul pelicular slab în conductorul cilindric studiat cu metoda iterației.....	414
56.3. Studiul efectului pelicular net cu metoda adâncimii de pătrundere	418
 RADIAȚIA UNDELOR ELECTROMAGNETICE	
57. Radiația undelor electromagnetice de către circuite la frecvențe înalte.....	420
57.1. Potențialele electrodinamice retardate și determinarea lor.....	420
57.2. Rezistența de radiație a circuitelor.....	424
57.3. Radiația oscilatorului electric elementar.....	425
 ELEMENTE DE TEORIE MICROSCOPICĂ	
58. Teoria electronilor.....	432
58.1. Ipotezele fundamentale ale teoriei electronilor.....	433
58.2. Ecuațiile Maxwell-Lorentz	436
58.3. Aplicații	437
58.4. Interpretarea microscopică a mărimilor macroscopice.....	442

59. Polarizarea electrică și magnetică a corpurilor.....	449
59.1. Teoria clasică a susceptivității electrice	449
59.2. Teoria clasică a susceptivității magnetice.....	456
59.3. Teoria clasică a feromagnetismului (teoria lui Weiss).....	460
60. Elemente de teorie cuantică a unor proprietăți de material	462
60.1. Elemente de mecanică cuantică a unei particule.....	462
60.2. Sisteme de particule	468
60.3. Benzile permise de energie într-un cristal unidimensional.....	470
60.4. Elemente de teorie cuantică a conducției electrice în solide.....	476
60.5. Aplicație. Efecte de contact.....	481
Bibliografie	484

CIRCUITE ELECTRICE ÎN REGIM VARIABIL

31. || REGIMUL CVASISTAȚIONAR AL CIRCUITELOR ELECTRICE FILIFORME

Circuitele electrice de curent variabil în timp au o importanță practică foarte mare. Studiul lor constituie și astăzi principalul capitol de aplicații ale electrodinamicii, adică principalul capitol de electrotehnică. Deși rezolvarea riguroasă a oricărei probleme de electrodinamică revine în cele din urmă la rezolvarea ecuațiilor lui Maxwell, pentru câmpul electromagnetic (v. par. 29.2. vol. I), studiul circuitelor se poate face cu metode mai simple, specifice, suficient de exacte pentru aplicații, dacă sînt îndeplinite anumite condiții destul de generale.

Prima condiție este *caracterul filiform* al conductoarelor care alcătuiesc circuitul: secțiunea lor transversală trebuie să aibă dimensiuni liniare suficient de mici, pentru ca intensitatea curentului să poată fi repartizată uniform pe această secțiune. Realizarea acestei condiții depinde de natura conductorului și de frecvență. Dacă a este o dimensiune liniară a acestei secțiuni (de ex. raza ei), σ conductivitatea materialului conductor, $\mu = \mu_0 \mu_r$ permeabilitatea lui magnetică și $f = \omega/2\pi$ frecvența, studiul câmpului electromagnetic alternativ în conductoare masive (par. 55.2) arată că se poate considera conductorul filiform, dacă

$$a \ll \sqrt{\frac{1}{\sigma\mu\omega}} = \delta, \quad (31.1)$$

mărimea δ , caracteristică materialului la o frecvență dată, numindu-se adîncimea de pătrundere a undelor în conductor.

A doua condiție e *caracterul cvasistaționar* (v. cap. 25, vol. I) al regimului de variație în timp a mărimilor de stare ale câmpului electromagnetic. Aceste variații trebuie să fie suficient de lente pentru ca peste tot, cu excepția dielectricului condensatoarelor, să se poată neglija curentul electric de deplasare (v. par. 21.3., vol. I). În dielectricul condensatoarelor, atît intensitatea câmpului electric, respectiv inducția electrică, cît și suprafața străbătută de fluxul electric (de arie egală cu a armăturilor) sînt suficient de mari pentru ca intensitatea

curentului de deplasare — egală cu intensitatea curentului de conducție absorbit de armături — să poată avea valori comparabile cu ale curenților din celelalte ramuri ale circuitului. Studiul undelor electromagnetice, care se pun în evidență atunci când aproximația regimului cvasistaționar nu mai e aplicabilă (v. par. 573), arată că regimul cvasistaționar este practic realizat, dacă cea mai mare dimensiune liniară l a întregului circuit e foarte mică față de lungimea de undă cea mai mică λ (corespunzătoare celei mai mari frecvențe f), care intervine în problema considerată

$$l \ll \lambda = c_0/f, \quad (31.2)$$

unde $c_0 \approx 3 \cdot 10^8$ m/s e viteza de propagare a undelor electromagnetice în vid.

Condițiile (31.1) și (31.2) arată că într-o problemă dată posibilitatea aplicării metodelor de studiu specifice circuitelor depinde de frecvență. Presupunind că frecvența f crește de la zero, există un domeniu $0 < f < f_1$, în care ambele condiții sînt realizate, adică circuitul e filiform și regimul e cvasistaționar. Există apoi un domeniu $f_1 < f < f_2$, în care numai condiția (31.2) este realizată, adică circuitul nu mai poate fi considerat filiform, dar regimul este cvasistaționar. Cu anumite precauții și limitîndu-ne la un regim periodic sinusoidal, se pot extinde și în acest caz unele metode specifice circuitelor, operîndu-se cu parametri dependenți de frecvență. În sfîrșit, pentru $f_2 < f$ nici regimul nu mai poate fi socotit cvasistaționar și metodele specifice circuitelor nu mai pot fi aplicate.

31.1. Recapitularea legilor electromagnetismului.

Legile teoriei macroscopice a cîmpului electromagnetic, prezentate în vol. I și discutate în par. 29.1, se exprimă în forma lor cea mai generală cu ajutorul mărimilor de stare locală a cîmpului electromagnetic — intensitatea cîmpului electric $\mathbf{E}$, inducția electrică $\mathbf{D}$, intensitatea cîmpului magnetic $\mathbf{H}$, inducția magnetică $\mathbf{B}$ — și cu ajutorul mărimilor de stare electrică și magnetică a corpurilor — sarcina electrică q și densitățile ei, intensitatea curentului electric de conducție $\mathbf{i}$ și densitatea ei $\mathbf{J}$, polarizația electrică $\mathbf{P}$ și magnetizația $\mathbf{M}$. În scrierea raționalizată folosită în acest curs, aceste legi sînt:

— *Legea inducției electromagnetice:*

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{s} = - \frac{d}{dt} \iint_{S_{\Gamma}} \mathbf{B} d\mathbf{A}. \quad (\text{I})$$

— *Legea fluxului electric:*

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{D} d\mathbf{A} = q_{\Sigma}. \quad (\text{II})$$

— *Legea legăturii dintre intensitatea cîmpului electric, inducția electrică și polarizația electrică:*

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (\text{III})$$

— *Legea polarizației electrice temporare* (lege de material caracterizînd dielectricii liniari):

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad (\text{IV})$$

din care, cu relația III, în dielectricii liniari fără polarizație permanentă, rezultă :

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (\text{IV}')$$

unde $\epsilon = D/E$ e permitivitatea dielectricului, χ_e susceptivitatea electrică a lui, $\epsilon_0 \approx (1/36\pi) 10^{-9}$ F/m e permitivitatea vidului.

— *Legea circuitului magnetic :*

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{s} = \iint_{S_{\Gamma}} \mathbf{J} d\mathbf{A} + \frac{d}{dt} \iint_{S_{\Gamma}} \mathbf{D} d\mathbf{A} \quad (\text{V})$$

(al doilea termen din membrul drept fiind curentul de deplasare, care se neglijează în regim cvasistaționar).

— *Legea fluxului magnetic :*

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{B} d\mathbf{A} = 0. \quad (\text{VI})$$

— *Legea legăturii dintre inducția magnetică, intensitatea cîmpului magnetic și magnetizație :*

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}. \quad (\text{VII})$$

— *Legea magnetizației temporare (lege de material caracterizînd material magnetic liniar) :*

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad (\text{VIII})$$

din care, cu relația VII, în materiale magnetice liniare și fără magnetizație permanentă, rezultă :

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (\text{VIII}')$$

unde $\mu = B/H$ e permeabilitatea magnetică a materialului, χ_m susceptivitatea magnetică a lui, iar $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m e permeabilitatea vidului.

— *Legea conservării sarcinii electrice :*

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{J} d\mathbf{A} = - \frac{dq_{\Sigma}}{dt}. \quad (\text{IX})$$

— *Legea conducției electrice (lege de material pentru conductoare electrice liniare, reprezentînd formularea locală generalizată a legii lui Ohm) :*

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i), \quad (\text{X})$$

în care $\sigma = 1/\rho$ e conductivitatea electrică a materialului, ρ rezistivitatea lui, iar $\mathbf{E}_i$ intensitatea cîmpului electric imprimat (diferită de zero numai în regiunile de neomogenitate sau accelerate ale conductoarelor).

— *Legea transformării energiei în conductoare (formularea locală generalizată a legii Joule-Lenz) :*

$$P_j = \mathbf{E} \mathbf{J}, \quad (\text{XI})$$

în care P_j e densitatea de volum a puterii cedate de cîmpul electromagnetic conductorului în procesul de conducție a curentului electric. Alte legi privind fenomenele electrice și magnetice mai puțin importante din punctul de vedere al cîmpului electromagnetic și al circuitelor electrice (de ex. legea electrolizei — v. par. 15.2., vol. I), nu mai sînt amintite.

În expresiile integrale ale legilor, sensul de integrare pe curbele închise Γ , adică sensul elementelor de arc $d\mathbf{s} = \mathbf{t} \cdot ds$, este asociat după regula burghiului drept sensului de integrare pe suprafețele deschise S_{Γ} , sprijinite pe aceste curbe, adică sensului elementelor de arie $d\mathbf{A} = \mathbf{n} \cdot dA$ ale acestor suprafețe; în cazul suprafețelor închise Σ , sensul lui $d\mathbf{A}$ e sensul normalei exterioare.

În studiul circuitelor electrice (v. și cap. 13, vol. I) și magnetice (v. cap. 26, vol. I), aceste legi sau consecințele lor se exprimă cu ajutorul mărimilor de stare ale circuitelor, definite de integrale de linie sau de suprafață ale mărimilor de stare locală, și anume :

— *Tensiunea electrică :*

$$u = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (31.3)$$

— *Tensiunea electromotoare (t.e.m.) de contur ¹ :*

$$e = \oint_{\Gamma} (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \cdot d\mathbf{s}. \quad (31.3')$$

— *Fluxul electric :*

$$\psi = \iint_{S_{\Gamma}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} \quad (31.4)$$

— *Intensitatea curentului electric de conducție ² (curentul electric) :*

$$i = \iint_{S_{\Gamma}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}. \quad (31.5)$$

— *Tensiunea magnetică :*

$$u_m = \int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} \quad (31.6)$$

— *Tensiunea magnetomotoare (t.m.m.) :*

$$u_{mm} = \oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} \quad (31.6')$$

— *Fluxul magnetic :*

$$\Phi = \iint_{S_{\Gamma}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (31.7)$$

Observație : Ori de câte ori se utilizează aceste mărimi integrale, care sînt mărimi scalare algebrice (putînd fi pozitive sau negative), trebuie să se precizeze sensul în care se efectuează integrarea (adică sensul lui $d\mathbf{s}$, respectiv $d\mathbf{A}$), numit *sens de referință* al mărimii respective. Fără această precizare, simbolurile acestor mărimi și relațiile scrise cu ele nu au o interpretare unică. De aceea, sensurile de referință se precizează pe scheme cu săgeți, așa cum s-a procedat și la studiul circuitelor de curent continuu (v. par. 13.1., vol. I).

¹ Integrala de contur a lui $\mathbf{E}$ se numește *tensiune electromotoare indusă*, iar aceea a lui $\mathbf{E}_i$ *tensiune electromotoare imprimată*.

² De obicei, termenul de intensitate a curentului e folosit atunci cînd S_{Γ} e secțiunea transversală a unui conductor sau o parte a ei; dacă S_{Γ} e o suprafață înțepată de mai multe conductoare, integrala (31.5) e egală cu suma algebrică a intensităților curenților ce străbat suprafața în sensul ales, se notează cu Θ și se numește *solenafie* (v. par. 17.6.1.).

31.2. Relații fundamentale pentru studiul circuitelor

În teoria circuitelor electrice de curent variabil în regim cvasistaționar se folosesc multe dintre aceste legi, anumite forme particulare ale lor sau anumite consecințe ale lor, exprimate sub formă integrală cu ajutorul mărimilor de stare definite prin relațiile (31.3)... (31.7). Cele mai importante dintre aceste relații sînt următoarele:

a) *Legea inducției electromagnetice*: Tensiunea electromotoare indusă în lungul unui contur Γ este egală cu viteza de scădere a fluxului magnetic prin orice suprafață S_Γ sprijinită pe această curbă:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{s} = e_{\Gamma} = - \frac{d\Phi_{S_{\Gamma}}}{dt} \quad (31.8)$$

b) *Legea conducției electrice (Ohm)*: Suma dintre tensiunea electrică în lungul unui fir conductor și tensiunea electrică imprimată în lungul firului este proporțională cu intensitatea curentului de conducție din fir:

$$\int_C (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) d\mathbf{s} = u_f + e_i = Ri. \quad (31.9)$$

Aici

$$u_f = \int_C \mathbf{E} d\mathbf{s}, \quad e_i = \int_C \mathbf{E}_i d\mathbf{s}, \quad i = \iint_S \mathbf{J} d\mathbf{A},$$

curba C fiind luată în lungul axului firului conductor între două puncte oarecare ale lui, iar suprafața S fiind o secțiune transversală a lui. Dacă pe porțiunea de fir, considerată tensiunea imprimată, e nulă (nu există pile electrice), legea lui Ohm se scrie:

$$u_f = Ri. \quad (31.9')$$

În aceste relații, mărimile au același sens de referință ($d\mathbf{s} \parallel d\mathbf{A}$), iar R^1 e rezistența electrică a porțiunii considerate a conductorului (v. par. 12.3., vol. I).

c) *Teorema continuității curentului electric de conducție*: În regim cvasistaționar, intensitatea totală a curentului electric de conducție printr-o suprafață închisă Σ care nu străbate dielectricul vreunui condensator e nulă:

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{J} d\mathbf{A} = i_{\Sigma} = 0 \quad (31.10)$$

¹ Se va nota adesea în cele ce urmează rezistența unei porțiuni conductoare de circuit cu litera mică r , spre a o deosebi de rezistența circuitului definită în curent alternativ.

În adevăr, membrul doi al legii conservării sarcinii (IX), egal cu curentul de deplasare prin aceeași suprafață închisă, ca urmare a legii fluxului electric (II), e nul în regim evasistaționar.

d) *Legea conservării sarcinii electrice*: Intensitatea i a curentului electric de conducție, care intră în (iese din) suprafața închisă Σ , ce conține armătura unui condensator electric, este egală cu viteza de creștere (scădere) a sarcinii q a acestei armături (v. mai departe fig. 31.4.a):

$$\boxed{i = \pm \frac{dq}{dt}} \quad (31.11)$$

Semnul (+) corespunde cazului când sensul de referință al curentului i intră în armătura de sarcină q , iar semnul (—) cazului contrar. De data aceasta, curentul de deplasare printr-o suprafață Σ care trece prin dielectricul condensatorului, $i_D = \frac{d\psi}{dt} = \pm \frac{dq}{dt} = i$, nu mai poate fi neglijat, fiind egal cu curentul de conducție ce alimentează condensatorul.

e) *Teorema capacității electrostatice* (consecință a legilor (II), (III) și (IV) — v. par. 7.2, vol. I): Raportul dintre sarcina q a armăturii unui condensator și tensiunea electrică u_C dintre această armătură și cealaltă de sarcină $-q$ e o mărime de material numită *capacitate* electrostatică

$$\boxed{C = q/u_C > 0,} \quad (31.12)$$

independentă de mărimea sarcinii q (și deci de a tensiunii u_C) pentru dielectricii liniari și determinată de configurația geometrică a condensatorului și de natura dielectricului.

f) *Teorema inductivității* (consecință a legilor (V) — fără curent de deplasare —, (VII) și (VIII) — v. par. 27.1, vol. I): Raportul dintre fluxul Φ_{rs} (produs de curentul circuitului s prin conturul circuitului filiform r) și curentul i_s , care îl produce, e o mărime de material numită *inductivitate* (sau inductanță).

$$\boxed{L_{rs} = \Phi_{rs}/i_s = L_{sr}} \quad (31.13)$$

independentă de mărimea fluxului Φ_{rs} (și deci de a curentului i_s) pentru material magnetic liniar și determinată de configurația geometrică a sistemului de circuite și de natura materialelor învecinate. Relația de mai sus definește *inductivitatea proprie* dacă $r = s$

$$L_{rr} = \boxed{L_r = \Phi_{rr}/i_r > 0} \quad (31.14)$$

și *inductivitatea mutuală* dacă $r \neq s$. În cazul a n circuite filiforme situate într-un mediu liniar din punct de vedere magnetic, fluxul rezultat Φ_r , produs

de toate circuitele prin conturul circuitului r , e suma fluxurilor produse de fiecare în parte :

$$\Phi_r = \sum_{s=1}^n \Phi_{rs} = \sum_{s=r}^n L_{rs} i_s \quad (r = 1, 2, \dots, n). \quad (31.15)$$

Acestea sînt relațiile lui Maxwell privitoare la inductivități.

g) *Teorema energiei electrice* (v. par. 8. 1, vol. I) : Energia acumulată în câmpul electric al unui condensator electric cu dielectric liniar este :

$$W^{(e)} = \frac{1}{2} q u_C = \frac{1}{2} q^2 / C = \frac{1}{2} u_C^2 C. \quad (31.16)$$

h) *Teorema energiei magnetice* (v. par. 28.1, vol. I) : Energia acumulată în câmpul magnetic al unui sistem de n circuite situate într-un mediu magnetic liniar este :

$$W^{(m)} = \sum_{s=1}^n \frac{1}{2} \Phi_s i_s = \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{1}{2} L_{rs} i_r i_s. \quad (31.17)$$

Fiecare dintre termenii cu indici egali ai acestei sume

$$W_r^{(m)} = \frac{1}{2} \Phi_{rr} i_r = \frac{1}{2} L_{rr} i_r^2 = \frac{1}{2} \frac{\Phi_{rr}^2}{L_{rr}} \quad (31.18)$$

este *energia magnetică proprie* a circuitului r , iar fiecare pereche de termeni cu aceiași indici distincți

$$W_{rs}^{(m)} = \frac{L_{rs} i_r i_s + L_{sr} i_s i_r}{2} = L_{rs} i_r i_s = \Phi_{rs} i_r = \Phi_{sr} i_s \quad (31.18')$$

este *energia magnetică de interacțiune* a circuitelor r și s .

i) *Legea transformării energiei în conductori* (v. par. 12.4, vol. I) : Puterea disipată sub formă de căldură într-un conductor de rezistență R străbătut de curentul i este

$$p_R = Ri^2 > 0 \quad (\text{legea Joule-Lenz}), \quad (31.19)$$

iar puterea cedată circuitului de un generator de tensiune electromotoare e_g este

$$p_g = e_g i \geq 0, \quad (31.20)$$

dacă sensurile de referință ale mărimilor e_g și i coincid (puterea cedată negativă e efectiv preluată din circuit).

j) *Teorema transferului de putere la borne* : Puterea p_b primită instantaneu pe la borne de o rețea cu N borne de acces, ale cărei laturi nu sînt cuplate

magnetic cu exteriorul, este egală cu suma produselor dintre potențialele instantanee v_c ale bornelor și curenții instantanei $i_c^{(ex)}$ absorbiți din exterior :

$$p_b = \sum_{c=1}^N v_c i_c^{(ex)} \quad (31.21)$$

În adevăr, dacă Σ e o suprafață închisă care conține rețeaua, intersectînd cele N borne, puterea primită din exterior este egală (conform teoremei energiei electromagnetice, v. par. 29.4, vol. I) cu fluxul vectorului lui Poynting prin acea suprafață

$$p_b = p_\Sigma = \iint_{\Sigma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\mathbf{A}_{int}$$

(calculul se face cu normala interioară pentru a obține puterea primită). Dacă rețeaua nu are laturi cuplate inductiv cu exteriorul, cîmpul electric indus e neglijabil în punctele suprafeței Σ și se poate pune $\mathbf{E} = -\text{grad } v$. Cu $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$ (regim cvasistaționar) se obține :

$$p_b = -\iint_{\Sigma} (\text{grad } v \times \mathbf{H}) d\mathbf{A}_{int} = -\iint_{\Sigma} [\text{rot } (v\mathbf{H}) - v \text{rot } \mathbf{H}] d\mathbf{A}_{int} = \iint_{\Sigma} v \mathbf{J} d\mathbf{A}_{int},$$

deoarece fluxul unui rotor printr-o suprafață închisă e identic nul ($\text{div rot} \equiv 0$). Ultima integrală are integrandul nul în punctele din dielectric, iar în dreptul fiecărei borne $\iint v \mathbf{J} d\mathbf{A}_{int} = v \iint \mathbf{J} d\mathbf{A}_{int} = v i^{(ex)}$. Se obține deci relația (31.21).

În particular, în cazul unei rețele cu două borne de acces, prin care intră curenții $i_1^{(ex)} = i_1$ și $i_2^{(ex)} = -i_1$, puterea primită pe la borne are expresia :

$$p_b = v_1 i_1^{(ex)} + v_2 i_2^{(ex)} = (v_1 - v_2) i_1.$$

Introducînd tensiunea la borne $u_b = v_1 - v_2$, cu sensul de referință asociat sensului curentului după regula de la receptoare, *puterea primită pe la borne din exterior de un dipol* are expresia :

$$p_b = u_b i \quad (31.21')$$

Aceeași relație exprimă puterea cedată pe la borne spre exterior, dacă sensurile de referință ale mărimilor u_b și i sînt luate după regula de la generatoare.

Observații : 1. În relațiile de mai sus am folosit litere mici, u, i, v, p , pentru a desemna valorile instantanee-funcțiuni de timp — ale mărimilor respective (v. par. 33.1.), în acord cu convenția uzuală.

2. În măsura în care nu există ambiguitate, indicii inferiori nu se mai pun și puterea la borne se notează p , iar tensiunea la borne u .

31.3. Elementele de circuit

Studiul circuitelor electrice filiforme în regim cvasistaționar arată că fiecare latură a unui asemenea circuit poate fi privită ca o asociație de elemente de circuit ideale (sau pure) — rezistoare, bobine, condensatoare etc. — fiecare element fiind caracterizabil prin cîte un singur parametru de circuit — rezis-

tență, inductivitate, capacitate etc. Proprietățile circuitelor apar astfel localizate în puncte distincte ale lor, ceea ce justifică denumirea de *circuite cu parametri concentrați* (sau cu constante concentrate), dată acestor circuite. În ele cîmpul magnetic e luat în considerare numai prin inductivitățile bobinelor din laturile lor, iar cîmpul electric numai prin capacitățile condensatoarelor din aceste laturi. Desigur, elementele reale de circuit au proprietăți mai complexe, care nu sînt caracterizabile printr-un singur parametru. Înfășurarea unei bobine de exemplu, prezintă nu numai o inductivitate, ci și o anumită rezistență. În măsura în care circuitul e filiform și regimul e cvasistaționar, se poate găsi o schemă echivalentă, alcătuită din elemente ideale de circuit, care să ducă la aceleași ecuații ca și în cazul elementului de circuit real. Fără a da o demonstrație generală a acestei afirmații, o vom verifica în cîteva exemple în capitolul următor (cap. 32), după ce mai înainte vom fi studiat elementele ideale de circuit necesare compunerii unor astfel de scheme echivalente.

În afară de rezistoare, bobine și condensatoare, circuitele electrice mai conțin și surse de energie electromagnetică (surse de curent), care sînt sediul unor tensiuni electromotoare — adică aduc o contribuție nenulă la tensiunea electromotoare de contur din circuitul închis în care sînt conectate. Ele se mai numesc *generatoare electrice*.

O *rețea electrică cu parametri concentrați* este o asociație de generatoare, rezistoare, bobine, condensatoare și conductoare de legătură conectate într-un anumit mod. O rețea electrică cu un număr mic de borne de acces și de generatoare (de obicei unul sau nici unul), îndeplinind o funcțiune determinată în instalația sau în rețeaua mai complexă din care face parte, e numită *circuit electric*. Această accepție a termenului de circuit e astăzi din ce în ce mai utilizată, alături de accepția inițială (aceea de sistem de medii prin care se poate închide curentul electric). Un circuit electric cu două borne de acces și ale cărui laturi nu au cuplaje magnetice cu alte laturi din exterior se numește *dipol electric*. Un circuit electric în ale cărui laturi se găsesc generatoare se numește *activ*, iar un circuit fără generatoare se numește *pasiv*. Bobinele și condensatoarele se mai numesc *elemente de circuit reactive*.

Calculul circuitelor și rețelelor electrice consistă în rezolvarea unor ecuații diferențiale obținute prin aplicarea legilor și teoremelor menționate în paragraful precedent cum și a altor legi de material (de exemplu caracteristici de elemente de circuit.) Variabila independentă e timpul, iar funcțiunile necunoscute sînt de obicei curenții din laturi. Dacă parametrii circuitului sînt constanți, ecuațiile obținute sînt ecuații diferențiale ordinare liniare, cu coeficienți constanți, iar circuitul e numit *liniar*. Dacă parametrii circuitului sînt funcțiuni date de timp (cum e, de exemplu, rezistența unui microfon cu cărbune care variază în ritmul impus de oscilațiile sonore ale aerului), ecuațiile obținute sînt ecuații diferențiale ordinare liniare cu coeficienți variabili, iar circuitul e numit *parametric*. În sfîrșit, dacă parametrii circuitului depind de valorile curenților și tensiunilor din circuit (cum e inductivitatea unei bobine cu miez fier), ecuațiile obținute sînt ecuații diferențiale ordinare neliniare, iar circuitul se numește *neliniar*.

Teoria matematică a ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți este astăzi, teorie completă, și de aceea circuitele liniare se pot studia sistematic în cadrul cursurilor de electrotehnică. Studiul circuitelor parametrice, și mai ales a celor neliniare, prezintă dificultăți

matematice considerabile, deși prezintă un interes practic foarte mare, prilejuit în special de dezvoltarea electronicii. De aceea, aceste circuite se studiază dezvoltat la discipline de specialitate, cu mijloace teoretice și empirice.

Așa cum am precizat la început, cu cât frecvența e mai înaltă, cu atât — pentru un circuit dat — aproximația regimului cvasistaționar e mai puțin bună și, odată cu ea, caracterizarea ca circuit cu parametri concentrați e mai puțin adecvată. De aceea, pentru circuite de lungime comparabilă, cu lungimea de undă sau cu o fracțiune a ei, s-a dezvoltat o teorie aparte, în care se ia în considerare repartizația continuă a caracteristicilor circuitului, care se numește atunci *circuit cu parametri repartizați* (v. cap. 53. Liniile electrice lungi).

În cele ce urmează se vor studia *elementele ideale de circuit*, cu scopul principal de a stabili relațiile dintre tensiunea la borne și curent. La rezistor, bobină și condensator, care sînt dipoli pasivi, se va folosi regula de asociere a sensurilor de referință de la receptoare (săgeata tensiunii la borne pleacă de la aceeași bornă cu săgeata curentului); dipolii la care se aplică această regulă se mai numesc *dipoli receptori*. La generatoarele care debitează energie electromagnetice, care sînt dipoli activi, se va folosi regula de asociere a sensurilor de referință de la generatoare (săgeata tensiunii la borne pleacă din borna în care intră săgeata curentului); dipolii la care se aplică această regulă se numesc *dipoli generatori*. Trebuie însă să subliniem că, pentru orice dipol, se poate aplica oricare dintre aceste reguli, cu condiția de a menționa care regulă se aplică, sau de a indica explicit sensurile de referință în scheme. *Altfel, relațiile obținute nu au o interpretare univocă* (v. și par. 13.1, vol. I). Uneori, cînd se folosește regula de la receptoare, curentul se mai numește *curent absorbit*, iar tensiunea la borne, *tensiune aplicată* (v. și par. 34.4); iar cînd se folosește regula de la generatoare, curentul se mai numește *curent debitat*, și tensiunea la borne, *tensiune produsă*. La aplicarea legii conducției electrice vom ține seama de faptul că intensitatea cîmpului electric imprimat e peste tot nulă, cu excepția surselor (pilelor electrice).

31.3.1 Rezistorul ideal. Un rezistor ideal de rezistență R are inductivitatea neglijabilă (v. par. 27.3, vol. I). Fie o curbă închisă Γ , care trece în lungul firului conductor și se închide pe la borne în sens opus sensului tensiunii la borne u_b (fig. 31.1, a). Tensiunea electromotoare e_Γ calculată în lungul acestei curbe, egală cu suma dintre tensiunea în lungul firului u_f și tensiunea la borne cu semn schimbat ($-u_b$), este nulă, deoarece o dată cu inductivitatea se neglijează și fluxul magnetic, respectiv variația lui în timp, dată de relația (31.8) :

$$\oint_{\Gamma} \text{Eds} = e_\Gamma = u_f - u_b = -\frac{d\Phi}{dt} \approx 0.$$

Pentru rezistorul ideal, tensiunea la borne este deci egală cu tensiunea în lungul firului, dată de relația (31.9') :

$$u_b = u_f = Ri.$$

În circuite mai complexe, căderea de tensiune la bornele unui rezistor ideal se mai notează u_R . Se obține astfel *expresia căderii de tensiune rezistive* (numită impropriu și *cădere de tensiune ohmică*) :

$$u_R = Ri \quad (31.22)$$

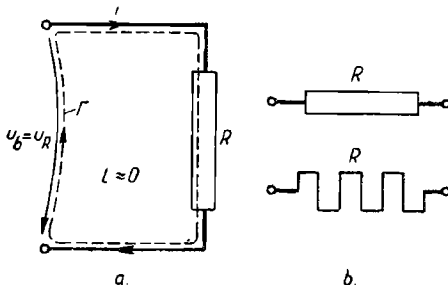


Fig. 31.1.

În regim variabil, tensiunea la bornele unui rezistor ideal rămîne proporțională cu intensitatea curentului, adică legea lui Ohm își păstrează forma uzuală din cazul curentului continuu, în care apare tensiunea la

borne în locul tensiunii în lungul firului din forma generală (31.9'). Rezistorul ideal e singurul element de circuit cu această proprietate.

Înmulțind ambii membri ai relației (31.22) cu i , se obține bilanțul puterilor instantanee :

$$p = u_R i = Ri^2 > 0. \quad (31.23)$$

Puterea instantanee primită pe la bornele unui rezistor ideal e egală cu aceea disipată prin efect Joule-Lenz în conductor (31.19).

În figura 31.1, *b* se indică simboluri grafice folosite pentru rezistoare. 31.3.2. Bobina ideală. O bobină ideală are inductivitatea L și rezistența conductorului neglijabilă. Tensiunea electromotoare e_r , calculată în lungul firului în sensul curentului și închisă pe la borne în sens opus tensiunii la borne u_b (fig. 31.2, *a*), este cu relația (31.8) :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{s} = e_r = u_f - u_b = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (31.24)$$

unde $\Phi = \Phi_{S_r}$ e fluxul magnetic al bobinei, calculat printr-o suprafață S_r sprijinită pe curba închisă Γ .

Observație: Riguros vorbind, acest flux, ca și inductivitatea bobinei, e determinat univoc numai prin precizarea liniei tensiunii la borne care închide curba Γ . Cum alegerea acestei linii are un caracter destul de arbitrar, rezultă și o anumită nedeterminare în definirea inductivității unei bobine (care constituie în fond un circuit deschis). Practic, cîmpul magnetic e intens numai în interiorul spirelor. Numărul spirelor fiind de obicei mare (cîteva sute sau cîteva mii), fluxul magnetic Φ_{S_r} e determinat în principal de porțiunile suprafeței S_r sprijinite de spire, adică e practic egal cu fluxul fascicular (printr-o spirală), multiplicat cu numărul spirelor. Porțiunea din suprafața S_r , sprijinită pe linia tensiunii la borne, are deci o contribuție neglijabilă la fluxul total cu atît mai mică, cu cît conductoarele de legătură și bornele sînt mai apropiate. De aceea, nedeterminarea care ar interveni în alegerea liniei tensiunii la borne — luată de obicei pe drumul cel mai scurt — nu afectează inductivitatea decît la frecvențe foarte înalte, unde bobinele au puține spire. Numai în acest caz precizarea exactă a liniei tensiunii la borne e necesară.

Dacă rezistența bobinei e neglijabilă, și tensiunea în lungul firului e neglijabilă :

$$u_f = Ri \approx 0.$$

Nu există deci cădere de tensiune în lungul firului conductor al unei bobine ideale. Există însă o cădere de tensiune în lungul liniei tensiunii la borne, care rezultă imediat din relația (31.24) :

$$u_b = -e_r = \frac{d\Phi}{dt} \quad (31.25)$$

Cînd bobina nu e cuplată magnetic cu alte bobine (adică inductivitățile ei mutuale cu aceste bobine sînt neglijabile) din relația (31.15) rezultă :

$$u_b = -e_r = \frac{d}{dt} (Li),$$

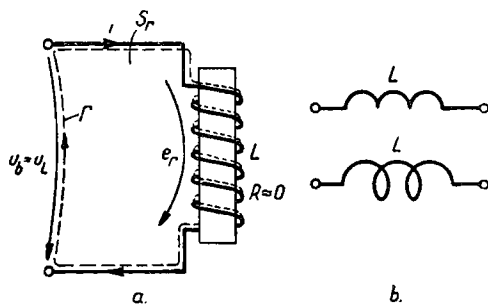


Fig. 31.2.

iar cînd inductivitatea L e constantă (material magnetic liniar și configurație geometrică invariabilă), simbolul L se poate scoate de sub semnul de derivare. În circuite mai complexe, căderea de tensiune la bornele unei bobine ideale se mai notează u_L . Se obține astfel *expresia căderii de tensiune inductive*:

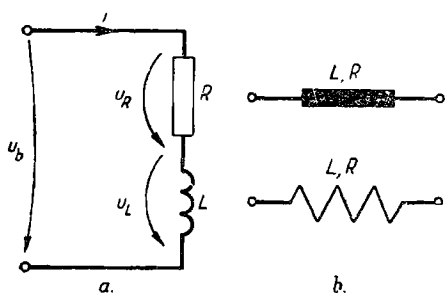


Fig. 31.3.

$$u_L = \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di}{dt}, \quad (31.26)$$

ultima egalitate fiind valabilă pentru bobine de inductivitate invariabilă necuplate magnetic cu altele.

Dacă rezistența bobinei nu se poate neglija (fig. 31.2,a cu $R \neq 0$) sau dacă se consideră un rezistor bobinat cu inductivitate nenulă, în relația (31.24) trebuie pus $u_f = Ri$ și, cu $\Phi = Li$, rezultă ecuația:

$$u_b = u_f + \frac{d\Phi}{dt} = Ri + L \frac{di}{dt} = u_R + u_L.$$

Se observă că tensiunea la borne nu mai este proporțională cu intensitatea curentului, dacă $L \neq 0$: în regim variabil legea lui Ohm nu se mai poate formula ca în curent continuu. Se mai observă că în acest caz tensiunea la borne e suma dintre căderea de tensiune (31.22) de la bornele unui rezistor ideal și căderea de tensiune (31.26) de la bornele unei bobine ideale. Bobina reală (cu $R \neq 0$) și rezistorul real (cu $L \neq 0$) admit deci o schemă echivalentă, compusă din elemente ideale R , L , conectate în serie (fig. 31.3,a).

Înmulțind ambii membri ai relației (31.26) cu i , rezultă bilanțul puterilor instantanee la bobina ideală liniară (de inductivitate invariabilă):

$$p = u_L i = \frac{d}{dt} \left(\frac{Li^2}{2} \right) \geq 0. \quad (31.27)$$

Puterea instantanee primită pe la borne de o bobină ideală e egală cu viteza de variație a energiei magnetice (31.18) a bobinei. Dacă $p > 0$, energia e primită efectiv pe la borne și se acumulează în câmpul magnetic al bobinei. Dacă $p < 0$, energia câmpului magnetic scade și puterea e, în fond, cedată în exterior; această situație se realizează în orice moment în care, numai pentru una dintre mărimile $u_b = u_L$ sau i , sensul instantaneu real e opus sensului de referință corespunzător regulii de la receptoare.

În figura 31.2,b și figura 31.3,b se indică simboluri grafice folosite pentru bobine ideale (cu $R = 0$), respectiv pentru bobine și înfășurări reale (cu $R \neq 0$).

31.3.3. Condensatorul ideal. Un condensator ideal de capacitate C are rezistența conductoarelor de legătură, inductivitatea circuitului constituit de aceste conductoare și de armături și conductanța dielectricului, neglijabile.

Fie q sarcina armăturii în care intră curentul i , în sensul de referință ales, cealaltă armătură avînd sarcina $-q$. Considerăm o curbă închisă Γ (fig. 31.4, a), care străbate dielectricul în sensul de referință al tensiunii u_C a condensatorului și se închide pe la borne în sens opus lui u_b . Cu relația (31.8), tensiunea electromotoare e_Γ indusă în lungul acestei curbe este :

$$e_\Gamma = \oint_{\Gamma} E ds = u_f + u_C - u_b = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Deoarece inductivitatea circuitului condensatorului e presupusă neglijabilă $e_\Gamma = - \frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt} \approx 0$, și de-

oarece rezistența acestui circuit e

presupusă neglijabilă $u_f = Ri \approx 0$. Rezultă că tensiunea la bornele unui condensator ideal e egală cu tensiunea dintre armături, dată de relația (31.12) :

$$u_b = u_C = \frac{q}{C}. \quad (31.28)$$

Analiza precedentă pune în evidență faptul că schema echivalentă a unui condensator real ar trebui să conțină în serie cu condensatorul un rezistor ideal și o bobină ideală, în măsura în care parametrii acestora nu ar putea fi neglijăți.

Deoarece conductanța dielectricului e presupusă neglijabilă, acesta nu e străbătut de curent de conducție, și curentul de conducție total care intră în suprafața închisă Σ (ce conține armătura de sarcină q) e egal cu curentul i din conductorul conectat la acea armătură. Din legea conservării sarcinii, relația (31.11), rezultă că acest curent e diferit de zero în regim variabil în timp, asigurînd încărcarea sau descărcarea condensatorului. Totodată, acest curent e egal cu curentul care iese din armătura de sarcină $-q$, deoarece suma curenților printr-o suprafață închisă ce conține ambele armături e nulă în regim cvasistaționar (v. 31.10). Acest rezultat se exprimă figurat, spunînd că în regim variabil curentul electric „trece” prin condensator, în opoziție cu curentul de regim staționar (curentul continuu).

Dacă nu ar fi neglijabilă conductanța dielectricului, schema echivalentă a condensatorului real ar mai conține, în paralel cu un condensator ideal, un rezistor ideal de rezistență egală cu valoarea reciprocă a conductanței dielectricului.

Cu relațiile (31.28) și (31.11) rezultă relația dintre curent și tensiunea la borne $u_b = u_C$ pentru condensatorul ideal (cu sensurile de referință alese) :

$$i = \frac{d}{dt} (Cu_C) = C \frac{du_C}{dt}, \quad (31.29)$$

ultima egalitate fiind valabilă pentru condensatoare de capacitate invariabilă (cu dielectric liniar și configurație geometrică invariabilă). Integrînd relația

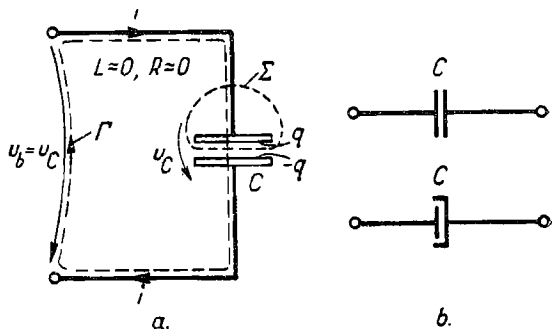


Fig. 31.4.

(31.11) — în care se ia semnul (+), deoarece curentul i intră în armătura de sarcină q — între momentul $t = 0$, când $q = q(0)$ și momentul curent t , rezultă :

$$q = \int_0^t i dt + q(0),$$

iar cu relația (31.28), notînd $u_C(0) = q(0)/C$, se obține *expresia căderii de tensiune capacitive* :

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0). \quad (31.30)$$

În măsura în care condițiile inițiale nu prezintă interes în problema considerată, această relație se scrie ca integrală nedefinită (funcție primitivă) :

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt, \quad (31.30')$$

subînțelegîndu-se o constantă arbitrară aditivă.

Înmulțind ambii membri ai relației (31.28) cu tensiunea la borne $u_b = u_C$, se obține egalitatea ce exprimă bilanțul puterilor instantanee la condensatorul ideal de capacitate invariabilă :

$$p = \bar{u}_C i = \frac{d}{dt} \left(\frac{C u_C^2}{2} \right) \geq 0. \quad (31.31)$$

Puterea instantanee primită pe la borne de un condensator ideal e egală cu viteza de variație a energiei electrice (31.16) a condensatorului. Dacă $p > 0$, energia e primită efectiv pe la borne și se acumulează în câmpul electric al condensatorului. Dacă $p < 0$, energia câmpului electric scade și puterea e, în fond, cedată pe la borne; această situație se realizează în orice moment în care numai pentru una dintre mărimile $u_b = u_C$ sau i , sensul instantaneu real e opus sensului de referință corespunzător regulii de la receptoare.

În figura 31.4, *b* se indică simboluri grafice folosite pentru condensatoare.

31.3.4. Generatorul ideal de tensiune. O sursă de energie electromagnetică care introduce în circuitul din care face parte o tensiune electromotoare e_g dată, independentă de structura rețelei în care e conectată și între ale cărei borne căderea de tensiune interioară e neglijabilă, se numește *generator ideal de tensiune*. Considerînd o curbă închisă Γ (fig. 31.5, *a*), care trece prin generator în lungul conductorului și în sensul tensiunii lui electromotoare și se închide pe la borne în sensul tensiunii la borne u_b , luată după regula de la generatoare, tensiunea electromotoare (imprimată, dacă sursa e o pilă electrică, sau indusă) în lungul acestei curbe este prin ipoteză :

$$e_\Gamma = \oint_\Gamma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) d\mathbf{s} = e_g.$$

Totodată, această integrală se poate descompune pe porțiuni în suma dintre o integrală luată în lungul conductorului de la l' la l — care e dată de relația (31.9) și e prin ipoteză neglijabilă — și o integrală luată în lungul liniei tensiuni la borne prin dielectric (unde $E_i = 0$), care rezultă egală cu tensiunea la borne. Se obține :

$$e_g = u_b. \quad (31.32)$$

Tensiunea electromotoare a unui generator ideal (luată în sensul curentului) e egală cu tensiunea la borne (luată după regula de la generatoare). Se observă că, în acest caz, față de cele două borne l și l' , sensurile săgeților mărimilor e_g și u_b de mai sus sînt diferite. Dacă mărimile ar fi astfel definite, încît față de cele două borne sensurile lor să coincidă (de ex. de la l' la l , v. fig. 31.5, b) — oricare ar fi sensul ales pentru curent — am avea :

$$e_g = -u_b. \quad (31.32')$$

Generatoarele reale au cădere de tensiune interioară, datorită în

cel mai simplu caz rezistenței conductorului (care determină o valoare nenulă

și egală cu Ri pentru integrala $\int_{l'}^l (E + E_i) ds$) și inductivității proprii (care adaugă

un termen de forma $-\frac{d}{dt}(Li)$ la e_g pentru a da pe e_r). Dacă t.e.m. e_g e independentă de curentul i , iar inductivitatea interioară și rezistența interioară sînt invariabile, generatorul real e liniar și admite o schemă echivalentă alcătuită dintr-un generator ideal de tensiune în serie cu un rezistor ideal și cu o bobină ideală.

În figura 31.5, c se indică simbolul utilizat în acest curs, pentru generatoare ideale de tensiune. Acest simbol e simplu și are în interior săgeata ce precizează sensul de referință al t.e.m., corespunzător localizării exacte a acestei mărimi. Pentru generatoare electrice se mai utilizează simbolurile din figura 31.5, d (generatoare de curent alternativ) și din figura 31.5, e (generatoare de curent continuu). Și la ultimele, în locul indicării polarității prin (—) și (+) (știind că t.e.m. e dirijată de la — la +) s-ar putea preciza sensul t.e.m., cu o mică săgeată dispusă alături, ca în figura 31.5, d. Indicarea sensului de referință cu o astfel de săgeată dispusă în exteriorul simbolului de generator nu e recomandabilă, deoarece poate prilejui confuzii cu săgeata ce precizează sensul tensiunii la borne și care — de obicei (fig. 31.5, a) — are sens opus.

31.3.5. Generatorul ideal de curent. Există generatoare reale, al căror curent debitat în exterior e practic independent de rețeaua la care sînt conectate. O sursă de energie electromagnetică care are proprietatea de a debita un curent dat $i_g(t)$, independent de rețeaua conectată la bornele ei, se numește

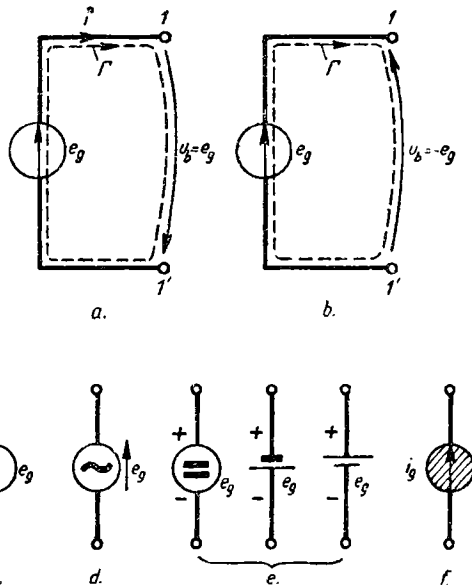


Fig. 31.5.

generator ideal de curent sau injector de curent. O astfel de sursă e complet caracterizată de curentul ei i_g , iar tensiunea ei electromotoare, ca și tensiunea ei la borne, depind de condițiile exterioare și pot fi calculate numai după rezolvarea rețelei în care sursa e conectată. În acest curs vom folosi pentru generatoare ideale de curent simbolul din figura 31.5.f.

32. || CIRCUITE SIMPLE ÎN REGIM TRANZITORIU

32.1. Regimul tranzitoriu de stabilire a curentului

într-o bobină (circuit RL)

Se consideră un circuit conținând în conexiune serie : o bobină de inductivitate L , un rezistor, o sursă de t.e.m. constantă E_0 și un întreruptor, rezistența totală a circuitului (a rezistorului, a bobinei, a sursei și a conductoarelor de legătură) fiind R . Circuitul e la început deschis, iar în momentul $t = 0$ se închide cu ajutorul întreruptorului. Tensiunea electromotoare e_r calculată în sensul curentului, în lungul conductorului circuitului închis, e egală cu suma dintre t.e.m. a generatorului și t.e.m. indusă în bobina de inductivitate invariabilă (bobină liniară) :

$$e_r = \int_{\Gamma} (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) d\mathbf{s} = E_0 - \frac{d\Phi}{dt} = E_0 - L \frac{di}{dt}.$$

De altă parte, conform legii conducției electrice, integrala de mai sus e egală cu Ri (curba Γ fiind peste tot conținută în conductor). Rezultă :

$$E_0 - L \frac{di}{dt} = Ri,$$

sau, separînd în dreapta termenii care conțin funcțiunea necunoscută i :

$$E_0 = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (t > 0). \quad (32.1)$$

S-a obținut o relație de aceeași formă cu aceea care s-ar obține dacă un generator ideal de t.e.m. E_0 ar aplica tensiunea la borne $u_b = E_0$ unui circuit compus dintr-un rezistor ideal de rezistență R și o bobină ideală de inductivitate L . De aceea, circuitul nostru admite schema echivalentă cu parametrii concentrați din figura 32.1, a și ecuația lui s-ar fi putut scrie direct, însumînd tensiunile la borne ale elementelor ideale de circuit din această schemă. Trebuie însă să se sublinieze că în circuitul real, tensiunile la bornele diferitelor elemente diferă de tensiunile la borne din schema echivalentă (datorită căderilor de tensiune din rezistențele lor interioare); echivalența există numai din punctul de vedere al ecuației circuitului și poate fi folosită la rezolvarea lui.

Relația (32.1) e o ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți neomogenă (de ord. I). Rezolvînd această ecuație, vom reaminti totodată metoda generală de rezolvare a acestui tip de ecuații.

Soluția generală se caută sub forma unei suprapuneri de două alte soluții :

$$i(t) = i_l(t) + i_p(t). \quad (32.2)$$

Regimul liber : Primul termen e soluția generală (cuprinzînd atîtea constante arbitrare cît e ordinul ecuației) a ecuației omogene asociată ecuației date, obținută anulînd termenul liber al acesteia ; în cazul studiat :

$$R i_l + L \frac{di_l}{dt} = 0.$$

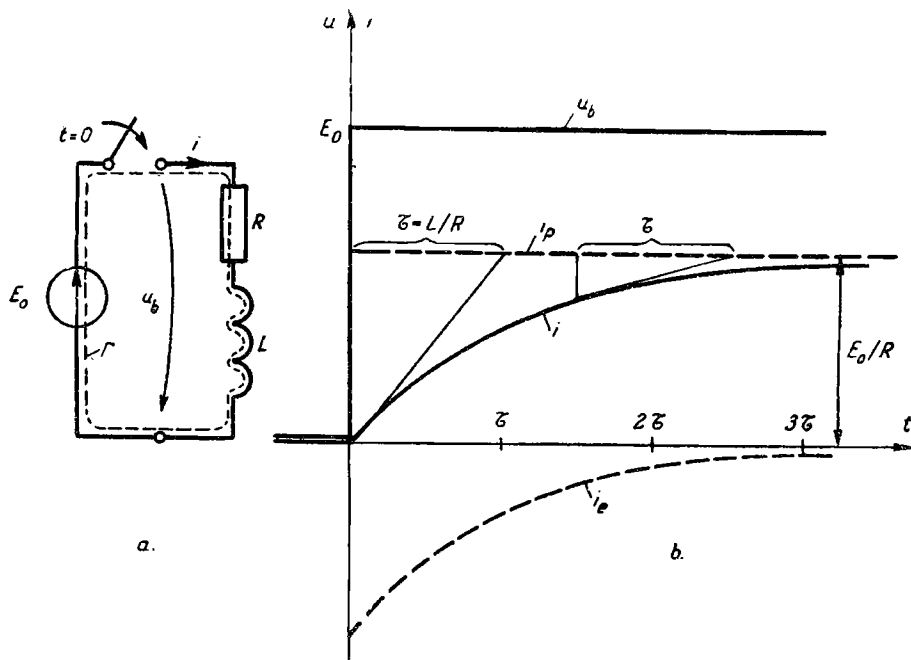


Fig. 32.1.

Soluția acestei ecuații omogene (care nu mai conține decît parametrii circuitului) are o formă care nu depinde de factori exteriori, e determinată complet de condițiile inițiale și se numește *soluția de regim liber*. Forma ei generală e o sumă cu coeficienți arbitrari de funcțiuni exponențiale de timp, în număr egal cu ordinul ecuației, factorii de la exponent fiind rădăcinile ecuației caracteristice, care se obține din ecuația omogenă, înlocuind formal derivata de ordinul k a funcțiunii necunoscute cu puterea k a unei variabile auxiliare r . În cazul nostru, ecuația caracteristică este $R + L r = 0$, cu o singură rădăcină $r = -R/L$, și soluția generală de regim liber are forma :

$$i_l = K e^{-\frac{R}{L}t} = K e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (32.3)$$

în care am notat cu

$$\tau = \frac{L}{R}, \quad (3.42)$$

o mărime caracteristică circuitului numită *constanta de timp*¹ a lui. Constanta arbitrară K urmează a fi determinată din condițiile inițiale pe care trebuie să le satisfacă soluția completă (32.2). Se observă că regimul liber e un regim amortizat, care se stinge treptat când timpul crește :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 0. \quad (32.5)$$

Această proprietate caracterizează circuitele liniare obișnuite, ai căror parametri R , L , C sînt toți pozitivi, astfel că rădăcinile ecuației caracteristice au partea reală pozitivă.

Regimul forțat : Al doilea termen din (32.2) e o soluție particulară (complet determinată) a ecuației neomogene date și se numește *soluția de regim forțat*, deoarece forma ei e impusă de funcțiunea de timp, reprezentată de termenul liber al ecuației, adică de condițiile exterioare. Ori de cîte ori această funcțiune e o constantă, o exponențială, o sinusoidă sau o combinație liniară a unor astfel de funcțiuni, soluția de regim forțat se găsește sub forma unei funcțiuni de timp de același fel cu termenul liber, ai cărei parametri se determină complet prin substituție în ecuație și identificare. În problema noastră, termenul liber E_0 fiind constant, se caută o soluție constantă $i_p(t) = I_0$ care, înlocuită în relația (32.1), conduce la relația $E_0 = R I_0$, de unde :

$$i_p(t) = E_0/R. \quad (32.6)$$

Regimul permanent : Se numește *soluție de regim permanent*² expresia asimptotică, pentru t tinzînd către infinit a soluției generale (32.2) a ecuației. Ori de cîte ori termenul liber e constant sau e o funcțiune periodică de timp (care deci nu se anulează la $t \rightarrow \infty$), iar regimul liber e un regim amortizat (care deci se anulează la $t \rightarrow \infty$), soluția de regim forțat își păstrează forma la valori oricît de mari ale timpului și se confundă cu soluția de regim permanent :

$$i(t) \rightarrow i_p(t), \text{ dacă } t \rightarrow \infty. \quad (32.7)$$

Aceasta este situația cea mai întîlnită în circuitele liniare uzuale alimentate cu tensiuni periodice. În aceste circuite, regimul forțat se confundă cu regimul permanent și, de aceea, în cele ce urmează, nu vom mai face distincție între ele.

Dacă însă termenul liber nu e o constantă sau o funcțiune periodică de timp, nu există un regim permanent al circuitului. Soluția de regim forțat se găsește atunci prin procedee mai complicate, studiate la cursurile de matematici.

Regimul tranzitoriu și punerea condițiilor inițiale : În circuitele cu regim liber amortizat, se numește *regim tranzitoriu* regimul variabil de trecere de la o anumită stare inițială (rezultată de obicei în urma unei perturbații — cum ar fi închiderea unui întreruptor) la un anumit regim permanent. Soluția de regim

¹ Se verifică ușor că mărimea τ are dimensiunea timpului :

$$[\tau] = [L] [R]^{-1} = [\Phi] [I]^{-1} [R]^{-1} = [\Phi] [U]^{-1} = [T]$$

² Uneori se spune impropriu *regim staționar*, ceea ce prilejuiește confuzii cu regimul în care mărimile nu variază în timp.

tranzitoriu a ecuației circuitului e, în acest caz, soluția generală (32.2), în care constantele arbitrare cuprinse în expresia soluției generale de regim liber se determină cu ajutorul condițiilor inițiale.

Înlocuind relațiile (32.3) și (32.6) în relația (32.2), soluția generală a ecuației circuitului studiat este :

$$(t > 0) \quad i(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E_0}{R} \quad \text{cu } \tau = \frac{L}{R}. \quad (32.8)$$

Condițiile inițiale se stabilesc în felul următor : Înainte de închiderea întreruptorului, și deci și imediat înainte de această operație, adică la $t = 0 - \varepsilon$ (unde ε e o mărime pozitivă arbitrar de mică), curentul în circuit era nul $i(0 - \varepsilon) = 0$; în momentul inițial din punctul de vedere al ecuației (32.1), adică imediat după închiderea întreruptorului, la $t = 0 + \varepsilon$, curentul are valoarea inițială $i(0 + \varepsilon)$, a cărei cunoaștere e necesară pentru determinarea constantei K din relația (32.8). Valoarea curentului din circuit nu poate avea însă salturi, deoarece acestora le corespund viteze de variație infinite incompatibile cu ecuația circuitului $u_b = Ri + L di/dt$ (în care toți ceilalți termeni sînt finiți și deci și di/dt). Curentul trece deci continuu prin momentul $t = 0$, adică :

$$i(0 - \varepsilon) = i(0 + \varepsilon). \quad (32.9)$$

În exemplul studiat $i(0 - \varepsilon) = 0$, așa încît valoarea inițială a curentului după închiderea întreruptorului este nulă :

$$i(0) = i(0 + \varepsilon) = K + E_0/R = 0.$$

Rezultă de aici $K = -E_0/R$ și se obține soluția căutată pentru curentul din circuit în regimul tranzitoriu care urmează închiderii întreruptorului :

$$i(t) = \frac{E_0}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad (t > 0). \quad (32.10)$$

În figura 32.1, *b* se reprezintă variația în timp a funcțiunilor $u_b(t)$, $i(t)$, $i_p(t)$ și $i_l(t)$.

Observații: 1. Teoretic, regimul tranzitoriu durează infinit de mult, deoarece $i_l = 0$ numai pentru $t \rightarrow \infty$. Practic, dacă $i_l < 10^{-2}i_p$, se poate considera că $i \approx i_p$, și cum această situație se realizează după un timp de ordinul a $4...5\tau$, rezultă că regimul tranzitoriu durează un timp relativ scurt de la închiderea întreruptorului, și anume de același ordin de mărime cu constanta de timp a circuitului.

Dacă, de exemplu, $L = 0,5$ H și $R = 5 \Omega$ (valori uzuale pentru bobine de inductivități mari), se obține $\tau = 0,1$ s și regimul tranzitoriu durează practic o jumătate de secundă, adică regimul permanent se stabilește relativ repede și instrumentele de măsură obișnuite nu-l pot pune în evidență. Constante de timp apreciable pot apărea numai la bobinele cu miez de fier, care pot avea inductivități mari, realizate cu spire puține, ca rezistența să fie mică. Astfel, la înfășurările de excitație ale alternatoarelor mari, constanta de timp atinge câteva secunde. Pentru bobinele cu miez de fier, calculul precedent e numai aproximativ, deoarece inductivitățile acestor bobine depind de valoarea curentului (în special la saturația miezului) și circuitul e neliniar.

2. În general, pentru circuite cu regim liber aperiodic (lipsit de oscilații) și monoton descrescător, constanta de timp se poate defini în două feluri : — *a*) prin timpul în care curentul ar atinge valoarea de regim permanent, dacă și-ar păstra viteza inițială de variație, — *b*) prin aria suprafeței cuprinsă între asimptotă și curbă, raportată la diferența dintre valoarea inițială și cea de regim permanent.

În cazul circuitului studiat — și, în general, ori de câte ori regimul liber are o variație exponențială — ambele definiții duc la același rezultat, și anume la mărimea τ din relația (32.3)

În adevăr, conform primei definiții, dacă soluția de regim tranzitoriu $i = I_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ și-ar păstra viteza inițială de variație $\left(\frac{di}{dt}\right)_0 = \frac{I_0}{\tau}$ ar avea forma $i = \frac{I_0}{\tau} t$ și ar atinge valoarea $i_p = I_0$ pentru $t = \tau$. Segmentul interceptat pe asimptotă de tangenta la curbă și de ordonata corespunzătoare se mai numește *subtangenta* și este egal în orice punct cu constanta de timp (v. fig. 32.1, b). Conform celei de-a doua definiții, citul prin $i_p = i(0) = I_0$ al ariei menționate este :

$$\frac{1}{I_0} \int_0^{\infty} (I_0 - i) dt = \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \tau \left| e^{-\frac{t}{\tau}} \right|_0^{\infty} = \tau.$$

32.2. Regimul tranzitoriu de încărcare a unui condensator (circuit RC)

Se consideră un circuit conținând în conexiune serie : un condensator de capacitate C , un rezistor, o sursă de t.e.m. constantă E_0 și un întreruptor, rezistența totală a circuitului (a rezistorului, a sursei și a conductoarelor de legătură) fiind R , iar inductivitatea neglijabilă. Circuitul e la început deschis cu condensatorul descărcat, iar în momentul $t = 0$ se închide cu ajutorul întreruptorului.

Urmînd aceeași metodă de rezolvare ca în exemplul precedent, indicăm pe scurt etapele rezolvării, alegînd ca funcțiune necunoscută căderea de tensiune u_C din condensator. T.e.m. în lungul unei curbe închise Γ luată prin conductor și închisă prin dielectricul condensatorului e dată numai de sursă (inductivitatea fiind neglijabilă) :

$$e_{\Gamma} = \int_{\Gamma} (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) ds = E_0.$$

Descompunînd integrala pe porțiuni și folosind pentru partea din conductor legea lui Ohm, rezultă ecuația circuitului :

$$E_0 = R i + u_C. \quad (32.11)$$

Relația obținută corespunde schemei echivalente din figura 32.2, a în care un generator ideal de t.e.m. E_0 aplică tensiunea la borne $u_b = E_0$ unui rezistor ideal de rezistență R în serie cu un condensator ideal de capacitate C .

Cu relația (31.29) se obține ecuația diferențială liniară cu coeficienți constanți (de ord. I) :

$$E_0 = R C \frac{du_C}{dt} + u_C \quad (t > 0). \quad (32.12)$$

Soluția generală a acestei ecuații rezultă :

$$u_C = K e^{-\frac{t}{RC}} + E_0. \quad (32.13)$$

În această expresie, tensiunea de regim liber este

$$u_{Cl} = K e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (32.14)$$

cu constanta de timp :

$$\tau = C R, \quad (32.15)$$

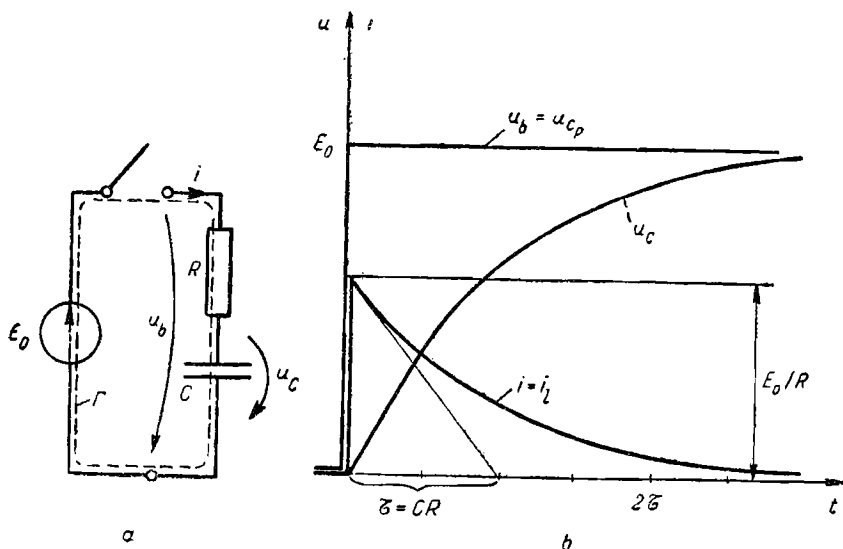


Fig. 32.2.

iar tensiunea de regim permanent este :

$$u_{Cp} = E_0. \quad (32.16)$$

Constanta arbitrară K se determină din condițiile inițiale, observînd că în acest caz nu poate avea salturi tensiunea condensatorului u_c , a cărei derivată trebuie să rămîină finită pentru a rămîne compatibilă cu ecuația (32.12) a circuitului :

$$u_c(0 - \epsilon) = u_c(0 + \epsilon). \quad (32.17)$$

Cum presupunem condensatorul descărcat înainte de închiderea întreruptorului $u_c(0 - \epsilon) = 0$, și deci condiția inițială pentru ecuația circuitului e $u_c(0) = 0$, de unde rezultă $K = -E_0$ și soluția de regim tranzitoriu :

$$u_c = E_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad t > 0. \quad (32.18)$$

En relația (31.29) se obține curentul de încărcare a condensatorului :

$$i = C \frac{du_c}{dt} = \frac{E_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (32.19)$$

În figura 32.2, *b* sînt reprezentate grafic variațiile în timp ale mărimilor $u_b(t)$, $u_C(t)$ și $i(t)$. Se observă că în regim permanent ($t \rightarrow \infty$), curentul se anulează: o tensiune continuă nu poate determina un curent continuu printr-un condensator.

Și în cazul circuitelor *RC* uzuale, constantele de timp sînt foarte mici. Dacă un condensator de mare capacitate, de exemplu, cu $C = 100 \mu\text{F}$ se încarcă prin rezistența $R = 100 \Omega$, constanta de timp rezultă $\tau = 0,01$ s. În acest caz însă se pot obține relativ ușor constante mari de timp dacă se aleg rezistențe foarte mari, ceea ce nu prezintă dificultăți. Același condensator încărcat printr-o rezistență $R = 10 \text{ M}\Omega$ are $\tau = 16,7$ min cu un curent de încărcare foarte slab. În schimb, dacă rezistența de încărcare e foarte mică (de ex. dacă se reduce la rezistența — de ordinul fracțiunilor de ohm — a conductoarelor de legătură), valorile inițiale $i(0) = E_0/R$ ale curenților de încărcare pot fi foarte mari, periclitînd securitatea instalațiilor. De aceea, bateriile mari de condensatoare industriale au rezistoare (sau alte dispozitive) pentru limitarea curentului de încărcare. Dacă după încărcarea unui condensator se deschide întreruptorul, condensatorul rămîne încărcat la tensiunea (eventual înaltă), care îi era aplicată înainte de deschiderea întreruptorului, un timp îndelungat (dacă nu se iau măsuri speciale de descărcare pentru a evita pericolul electrocutării, instalația fiind aparent scoasă de sub tensiune). În adevăr, în circuit deschis, condensatorul se poate descărca lent, numai prin rezistența foarte mare a dielectricului său. Aceasta putînd atinge valori de sute și mii de megohmi, constanta de timp corespunzătoare poate fi de cîteva ore și chiar de cîteva zile. Măsurarea acestei constante de timp (prin măsurarea subtangentei la curba de descărcare) permite să se deducă din formula (32.15) rezistența dielectricului.

În studiul acestui circuit s-ar fi putut alege ca funcțiune necunoscută curentul, înlocuind în relația (32.11) pe u_C dat de relația (31.30'); se obține ecuația integro-diferențială:

$$E_0 = R i + \frac{1}{C} \int i dt. \quad (32.20)$$

Astfel de ecuații se reduc la ecuații diferențiale prin derivare. Rezultă, pentru curent, ecuația omogenă:

$$0 = R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i,$$

a cărei soluție de regim permanent de identic nulă și a cărei soluție de regim liber este:

$$i = K' e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Cu condiția inițială $u_C(0) = 0$, din relația (32.11) rezultă $i(0) = E_0/R = K'$, adică soluția (32.18). De observat că în cazul acestui circuit valoarea curentului are un salt în momentul inițial:

$$i(0 + \epsilon) - i(0 - \epsilon) = i(0) = \frac{E_0}{R}.$$

Condensatorul fiind inițial descărcat și deci fără tensiune (care poate apărea treptat numai pe măsura încărcării lui) cînd se închide întreruptorul, întreaga tensiune a sursei e preluată de căderea de tensiune rezistivă, ceea ce determină valoarea inițială nenulă a curentului. Derivata curentului neapărînd în ecuația

circuitului, saltul de curent e compatibil cu această ecuație. Dacă însă s-ar lua în considerare și inductivitatea circuitului, curentul ar fi nul în momentul inițial, așa cum se arată în exemplul următor.

32.3. Regimul tranzitoriu al unui circuit serie RLC sub tensiune aplicată constantă

Se consideră un circuit analog celui precedent (par. 32.2), cu singura deosebire că i se adaugă în serie o bobină de inductivitate L . T.e.m. în lungul conturului Γ e acum

$$e_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)_i ds = E_0 - L \frac{di}{dt},$$

astfel încît în locul ecuației (31.43) se obține ecuația :

$$E_0 = R i + L \frac{di}{dt} + u_C = R i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt. \quad (32.21)$$

Relația obținută corespunde schemei echivalente din figura 32.3, *a*, în care un generator ideal de t.e.m. E_0 aplică tensiunea la borne $u_b = E_0$ unui grup de elemente ideale R , L și C , conectate în serie, astfel încît $u_b = u_R + u_L + u_C$. Cu relațiile (31.22), (31.26) și (31.30') rezultă relația (32.21).

Cu relația (31.29), alegînd ca variabilă independentă pe u_C , rezultă ecuația diferențială liniară cu coeficienți constanți (de ord. II) :

$$E_0 = L C \frac{d^2 u_C}{dt^2} + R C \frac{du_C}{dt} + u_C \quad (32.22)$$

Folosind notațiile :

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \sqrt{\frac{R^2}{4L} - \frac{1}{LC}} \quad j \omega_p, \quad j = \sqrt{-1}, \quad (32.23)$$

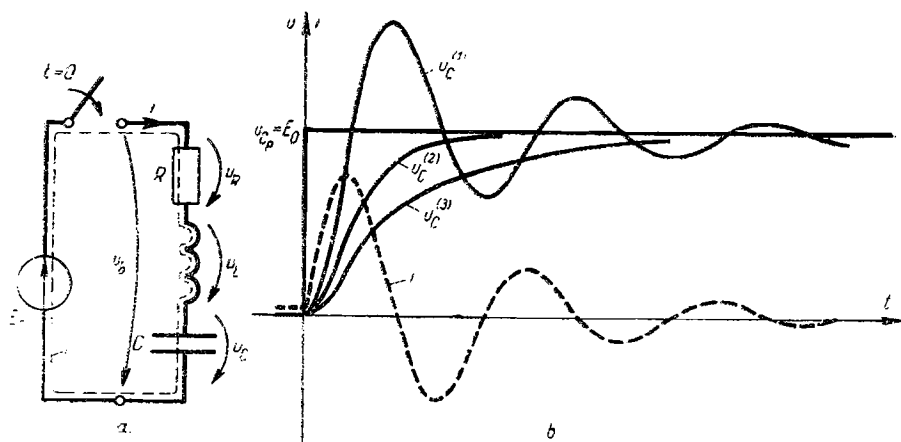


Fig. 32.3.

soluția generală are forma :

$$u_C(t) = u_{C_l}(t) + u_{C_p}(t) = E_0 + u_{C_l}(t), \quad (32.24)$$

deoarece tensiunea de regim permanent e $u_{C_p} = E_0$. Tensiunea de regim liber u_{C_l} e soluția ecuației omogene

$$\frac{d^2 u_{C_l}}{dt^2} + 2\alpha \frac{du_{C_l}}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0, \quad (32.25)$$

cu rădăcinile ecuației caracteristice :

$$r_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L} - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm \beta = -\alpha \pm j\omega_p.$$

Tensiunea de regim liber poate avea trei forme distincte, după relațiile care există între parametrii circuitului, respectiv după natura rădăcinilor ecuației caracteristice. Se disting astfel trei clase de circuite, fiecare clasă fiind caracterizată de un anumit tip de regim liber, după cum rezistența R a circuitului e mai mică, egală sau mai mare decât o anumită valoare critică : $R \lesseqgtr 2\sqrt{L/C}$.

1. *Regim liber oscilatoriu amortizat* : În acest caz,

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}, \text{ adică } \frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ sau } \alpha < \omega_0 \quad (32.26)$$

și circuitul e subamortizat, numindu-se *circuit oscilant*, deoarece e capabil de oscilații proprii cu pulsația

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{R^2 C}{8L}\right) \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (32.27)$$

respectiv, cu frecvența

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = f_0 \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}} \approx f_0 \left(1 - \frac{R^2 C}{8L}\right) \approx f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (32.28)$$

numită *frecvența oscilațiilor proprii* (sau libere), ultimele valori fiind cu atât mai exacte, cu cât R e mai mic față de $2\sqrt{L/C}$.

Soluția de regim liber, cu două constante arbitrare, se poate scrie

$$u_{C_l}^{(1)} = A_1 e^{(-\alpha + j\omega_p)t} + A_2 e^{(-\alpha - j\omega_p)t} = K e^{-\alpha t} \sin(\omega_p t + k) \quad (32.29)$$

și reprezintă o oscilație amortizată cu factorul exponențial $e^{-\alpha t}$, numită oscilație pseudoperiodică. Constantele arbitrare K și k se determină din condițiile inițiale, care se obțin prin același raționament folosit în exemplele precedente :

$$\begin{aligned} u_C(0) = u_C(0 + \varepsilon) = u_C(0 - \varepsilon) &= 0 \\ i_C(0) = i_C(0 + \varepsilon) = i_C(0 - \varepsilon) &= 0. \end{aligned} \quad (32.30)$$

Ultima condiție introdusă în (31.29) impune $\left(\frac{du_C}{dt}\right)_{t=0} = 0$.

Se obține astfel expresia tensiunii u_C , pentru regimul oscilatoriu amortizat :

$$u_C^{(1)} = E_0 \left[1 - \frac{1}{\sin k} e^{-\alpha t} \sin (\omega_p t + k) \right] \quad (t > 0), \quad (32.31)$$

în care :

$$\sin k = \frac{\omega_p}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}}; \quad \cos k = \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{R}{2\sqrt{\frac{L}{C}}}.$$

Cu relația (31.29) rezultă curentul :

$$i^{(1)} = C \frac{du_C^{(1)}}{dt} = \frac{E_0}{L\omega_p} e^{-\alpha t} \sin \omega_p t. \quad (32.32)$$

Evoluția tensiunii condensatorului și a curentului sînt reprezentate în figura 32.3, *b* pentru cazul particular $\alpha \approx \frac{\omega_0}{2\pi}$

2. *Regim liber aperiodic critic* : În acest caz,

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}, \text{ adică } \frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ sau } \alpha = \omega_0, \quad (32.33)$$

iar $\beta = \omega_p = 0$. Ecuația caracteristică are o rădăcină dublă negativă $r_{1,2} = -\alpha$ soluția de regim liber fiind de forma :

$$u_C^{(2)} = (K_1 + K_2 t) e^{-\alpha t}. \quad (32.34)$$

Constantele arbitrare K_1 și K_2 se determină cu condițiile inițiale (32.30) introduse în soluția generală (32.24). Se obține astfel expresia tensiunii u_C pentru regimul aperiodic critic,

$$u_C^{(2)} = E_0 \left[1 - (1 + \alpha t) e^{-\alpha t} \right] \quad (t > 0), \quad (32.35)$$

reprezentată grafic în figura 32.3, *b*.

3. *Regim liber aperiodic (supra-amortizat)* : În acest caz

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}, \text{ adică } \frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ sau } \alpha > \omega_0, \quad (32.36)$$

iar rădăcinile ecuației caracteristice sînt reale, distincte și negative (mărimea β fiind reală și mai mică decît α) $r_{1,2} = -\alpha \pm \beta$. Circuitul e supra-amortizat și se numește *circuit aperiodic*. Soluția de regim liber este de forma

$$u_C^{(3)} = A_1 e^{(-\alpha+\beta)t} + A_2 e^{(-\alpha-\beta)t} = K' e^{-\alpha t} \text{sh} (\beta t + k') \quad (32.37)$$

și nu schimbă de semn. Constantele K' și k' se determină cu condițiile inițiale (32.30), introduse în soluția generală (32.24). Se obține astfel expresia tensiunii u_C pentru regimul aperiodic,

$$u_C^{(3)} = E_0 \left[1 - \frac{1}{\operatorname{sh} k'} e^{-\alpha t} \operatorname{sh} (\beta t + k') \right] \quad (t > 0), \quad (32.38)$$

în care

$$\operatorname{sh} k' = \frac{\beta}{\omega_0} = \sqrt{\frac{R^2 C}{4L} - 1}; \quad \operatorname{ch} k' = \cos k = \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{R}{2\sqrt{\frac{L}{C}}}.$$

Evoluția tensiunii condensatorului în acest regim se face mai lent decât în regimul aperiodic critic, care e cel mai rapid dintre toate regimurile aperiodice. Această evoluție e reprezentată grafic în figura 32.3, b.

32.4. Concluzii

Exemplele studiate în acest paragraf permit să se formuleze câteva concluzii cu caracter general:

a) Circuitele electrice filiforme în regim cvasistacionar pot fi studiate pe scheme echivalente cu parametri concentrați, compuse din elemente ideale de circuit: rezistoare, bobine, condensatoare, generatoare¹.

b) La circuitele liniare (cu parametri invariabili) mărimile de stare satisfac ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți, de ordin egal cu numărul elementelor de circuit reactive (bobine și condensatoare) din circuit. În cazuri mai complexe se obțin sisteme de asemenea ecuații. În regim tranzitoriu, funcțiunile de timp care reprezintă aceste mărimi au o componentă de regim liber — soluție generală a ecuației omogene, conținând un număr de constante arbitrare egal cu numărul elementelor de circuit reactive (bobine și condensatoare), din circuit — și o componentă de regim forțat — soluție particulară a ecuației neomogene.

c) Regimul liber e un regim amortizat, eventual oscilatoriu, care în circuitele obișnuite se stinge în câteva fracțiuni de secundă. Constantele arbitrare din soluția generală de regim liber se determină prin condițiile inițiale deduse din continuitatea valorilor unor mărimi, ale căror derivate apar în ecuațiile diferențiale ale circuitului. De obicei, aceste mărimi sînt:

— fluxurile rezultante ale bobinelor și, ca urmare, curenții acestor bobine;

— sarcinile condensatoarelor și, ca urmare, tensiunile acestor condensatoare.

(În cazuri speciale, mărimile ale căror valori trec continuu prin momentul inițial se identifică, stabilind incompatibilitatea salturilor lor cu ecuațiile circuitelor.) Numărul ecuațiilor care stabilesc condițiile inițiale e egal cu numărul mărimilor de acest fel, respectiv cu numărul elementelor de circuit reactive din rețea. Acest număr e deci egal cu al constantelor arbitrare care trebuie determinate.

d) Regimul forțat coincide cu regimul permanent pentru circuitele uzuale, alimentate cu tensiuni constante sau periodice, și se determină substituind în ecuațiile neomogene soluții particulare de aceeași formă cu termenii liberi.

În practică, regimul permanent al circuitelor electrice prezintă o importanță foarte mare, deoarece, în majoritatea utilizărilor, se produc tensiuni periodice alternative și în particular sinusoidale. De aceea, regimul permanent sinusoidal constituie principalul obiect de studiu în teoria circuitelor de curent alternativ și pentru acest regim s-au elaborat metode rapide de calcul care vor fi prezentate în capitolele următoare.

¹ Pentru simplificare vom spune uneori: „un circuit compus dintr-o sursă E_0 în serie cu o rezistență R etc., în loc de „un circuit compus dintr-o sursă ideală de t.e.m. E_0 în serie cu un rezistor ideal de rezistență R etc.". Această exprimare — în fond improprie — e foarte răspândită în tehnică.

33. || REGIMUL PERMANENT SINUSOIDAL

Se numesc *circuite de curent alternativ* circuitele electrice alimentate cu tensiuni electromotoare alternative, adică cu tensiuni periodice de valoare medie nulă. Aceste circuite prezintă o importanță deosebită în tehnică, atât în producerea, transmisiunea și utilizarea energiei electromagnetice cât și în electrocomunicații, semnalizări și automatizări, datorită numeroaselor lor avantaje.

Cele mai simple mașini electrice generatoare sînt acelea de curent alternativ, deoarece nu pretind dispozitive suplimentare de comutație pentru redresarea curentului, necesare mașinilor obișnuite de curent continuu; prin simpla rotire a unui cadru bobinat într-un cîmp magnetic (v. par. 22.5.3. vol. I) se poate produce o tensiune electromotoare alternativă. Transmisiunea la distanță a energiei electromagnetice se face cu linii electrice, ale căror pierderi de putere prin efect Joule sînt invers proporționale cu pătratul tensiunii (v. par. 33.4.5, aplicația 2), care — luînd în considerare și investițiile pentru construcția liniei — are o anumită valoare optimă din punct de vedere economic cu atît mai înaltă, cu cît distanța și puterea transmisă sînt mai mari; transmisiunea optimă a energiei cere deci să fie posibilă transformarea după voie a tensiunii, ceea ce se poate obține comod cu ajutorul transformatoarelor (v. par. 22.5.4. vol. I) numai în curent alternativ. Aceasta permite adaptarea optimă a parametrilor transmisiunii de energie și la necesitățile consumatorilor. Cele mai simple și mai robuste motoare electrice sînt motoarele asincrone de curent alternativ. Semnalele care fac obiectul transmisiunilor de telecomunicații, cum sînt semnalele corespunzătoare vorbirii, muzicii etc., sînt practic suprapuneri de semnale alternative. Producerea și utilizarea undelor radioelectrice necesită, de asemenea, curenți alternativi de frecvență înaltă.

Curenții alternativi sînt produși, de obicei, în circuite liniare, cu constante de timp suficient de mici, pentru ca, practic, imediat după aplicarea tensiunilor alternative de alimentare, să se stabilească regimul permanent. Dacă aceste tensiuni alternative sînt sinusoidale, curenții de regim permanent din toate laturile circuitului sînt de aceeași formă — adică sînt și ei sinusoidali și de aceeași frecvență. Condiționată de caracterul liniar al ecuațiilor diferențiale ale circuitului, această situație decurge din proprietatea funcțiunilor sinusoidale de a

sî singurele funcțiuni alternative reale care își păstrează forma prin derivare. Pentru orice altă variație în timp — alternativă — a tensiunilor de alimentare, curenții au altă formă, în cazul general diferită de la o latură a circuitului la alta, adică prezintă distorsiuni. Totodată, utilizînd analiza armonică a funcțiunilor periodice (Fourier), regimul periodic nesinusoidal al rețelelor electrice liniare poate fi studiat ca o suprapunere de regimuri periodice sinusoidale de diferite frecvențe. Aceste împrejurări explică întîietatea pe care o are funcțiunea sinusoidală de timp printre toate formele posibile de funcțiuni, care să reprezinte tensiuni periodice aplicate circuitelor în regim permanent — cum și importanța practică a studiului circuitelor electrice liniare în regim permanent sinusoidal (numit și regim permanent armonic).

Observație: Rețelele electrice pentru producerea, transmisiunea și distribuția energiei electromagnetice sînt astăzi — cu foarte puține excepții — rețele de curent alternativ sinusoidal cu frecvența standardizată de 50 Hz (în America 60 Hz), numită *frecvență industrială*.

Această valoare a frecvenței a fost aleasă cit mai joasă (dificultățile producerii și transmisiunii energiei fiind — în linii generale — cu atît mai mari, cu cît frecvența e mai înaltă), dar suficient de mare pentru ca variațiile intensității luminoase a lămpilor cu incandescență folosite în iluminatul public să nu fie sesizabile vederii.

33.1. Mărimi variabile și mărimi sinusoidale. Terminologie

În cele ce urmează vom reaminti unele definiții cunoscute din teoria oscilațiilor și vom prezenta unele proprietăți și concepte utilizate în electrotehnică, pentru caracterizarea mărimilor alternative și sinusoidale (funcțiuni de timp).

33.1.1. Mărimi variabile

Valoare instantanee: valoarea pe care o mărime variabilă o are într-un moment oarecare t ; se notează cu litera mică a simbolului stabilit prin convenție pentru mărimea respectivă.

Notă: În exemplele care urmează se va folosi simbolul i al curentului, deși proprietățile exemplificate pot fi ale oricărei alte mărimi.

Mărime periodică: mărime variabilă a cărei succesiune de valori se reproduce în aceeași ordine, după trecerea unor intervale de timp egale (fig. 33.1). Valoarea instantanee a unei mărimi periodice e o funcțiune periodică de timp $i(t)$ care, prin definiție, satisface condiția

$$i(t) \equiv i(t + T), \quad (33.1)$$

pentru orice t , în care T e o constantă, numită *perioadă*, egală cu cel mai mic interval de timp, după care se reproduc în aceeași ordine caracteristicile fenomenului periodic. Rezultă imediat că $i(t) \equiv i(t + nT)$, unde n e un număr întreg pozitiv sau negativ.

Numărul de perioade cuprins în unitatea de timp se numește *frecvența* (f) a mărimii periodice, iar produsul frecvenței prin 2π se numește *pulsația* sau *frecvența unghiulară* (ω) a mărimii periodice (uneori, frecvența fundamentală, respectiv pulsația fundamentală). Între frecvență, pulsație și perioadă rezultă relațiile :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}; \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}; \quad \omega T = 2\pi. \quad (33.2)$$

Unitatea de frecvență se numește *hertz* (Hz).

Valoare de vîrf: cea mai mare valoare instantanee atinsă de o mărime periodică în decursul unei perioade; dacă valoarea instantanee este i , valoarea de vîrf se notează $\hat{i}$.

Valoare medie: media aritmetică a valorilor instantanee ale unei mărimi variabile într-un anumit interval de timp :

$$I_{med} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i dt. \quad (33.3)$$

În cazul mărimilor periodice, cînd nu se menționează explicit altfel, intervalul de timp se consideră egal cu o perioadă T (fig. 33.1, a). Valoarea medie a mărimii periodice i se notează cu $\bar{i}$ sau $\bar{i}$, sau I_0

$$\bar{i} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} i dt, \quad (33.4)$$

și nu depinde de valoarea inițială t_1 a intervalului. Se va folosi simbolul $\sim$ (tilda) plasat deasupra unei expresii cu valori instantanee, pentru a indica operația de calcul a valorii medii a acelei expresii.

Valoarea efectivă (sau *eficace*) a unei mărimi periodice: rădăcina pătrată a mediei pătratelor valorilor instantanee ale unei mărimi periodice în timp de o perioadă :

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} i^2 dt} > 0 \quad (33.5)$$

Valoarea efectivă a mărimii periodice i se notează cu litera mare a simbolului mărimii : I (uneori cu I_e). Valoarea efectivă a unui curent periodic e

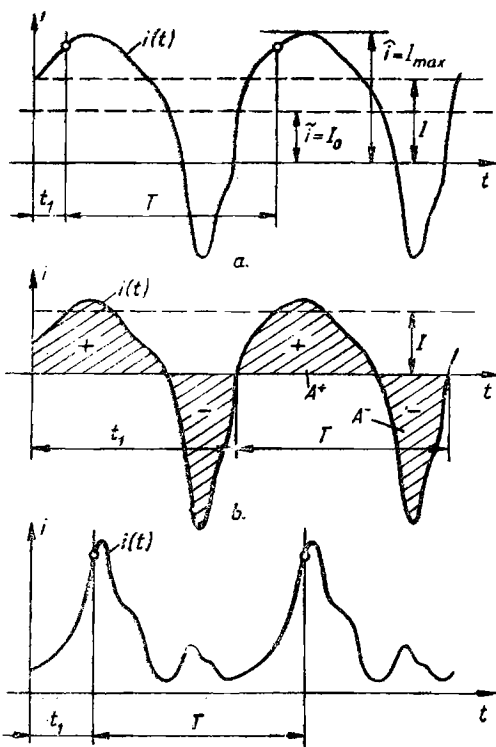


Fig. 33.1.

numeric egală cu intensitatea unui curent continuu, care, străbătînd aceeași rezistență ca și curentul periodic, produce aceeași dezvoltare de căldură în timp de o perioadă. Din cauza inerției echipajului mobil, instrumentele electrice de măsură indicatoare nu pot urmări variațiile instantanee ale mărimilor periodice măsurate. De aceea, ele indică de obicei valori efective (cînd au cuplul instantaneu proporțional cu pătratul mărimii) sau valori medii (cînd au cuplul instantaneu proporțional cu mărimea).

Mărime alternativă : mărime periodică a cărei valoare medie în cursul unei perioade este nulă (fig. 33.1, b) :

$$\bar{i} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} i \, dt = \frac{1}{T} (A^+ - A^-) = 0.$$

Aici A^+ respectiv A^- sînt modulele integralelor funcțiunii i pe intervalele în care $i > 0$, respectiv $i < 0$.

Mărime pulsatorie : mărime periodică a cărei valoare instantanee nu schimbă de semn : $i \geq 0$ (fig. 33.1, c) sau $i \leq 0$.

33.1.2. Mărimi sinusoidale. Se numește *mărime sinusoidală* sau *mărime armonică*¹ o mărime alternativă a cărei expresie ca funcțiune de timp poate fi scrisă sub forma „în sinus“ :

$$i = I_{max} \sin(\omega t + \gamma), \quad (33.6)$$

în care

$$I_{max} > 0, \quad \omega > 0 \text{ și } \gamma \geq 0 \quad (33.7)$$

sînt parametrii constanți², caracteristici mărimii : amplitudinea, pulsația și faza inițială (v. fig. 33.2).

Se numește amplitudine modulul valorii maxime a mărimii sinusoidale și este, evident, coeficientul pozitiv al sinusului în expresia (33.6). Se notează I_{max} sau i (uneori, I , dacă acest simbol nu e utilizat pentru valoarea efectivă a mărimii i).

Se numește fază argumentul, dependent liniar de timp, al sinusului din expresia (33.6), adică unghiul $(\omega t + \gamma)$. Faza se exprimă totdeauna în radiani (pentru ca formulele de derivare, integrare și dezvoltare în serie să fie cele uzuale).

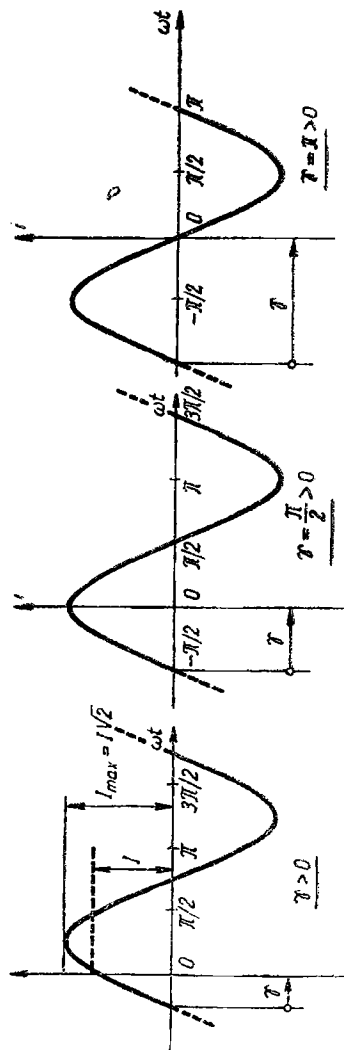
Se numește fază inițială valoarea γ a fazei în momentul inițial ($t = 0$). (Se mai notează α , β , etc.)

Deoarece sinusul e o funcțiune periodică de argumentul său, cu perioada unghiulară 2π , în absența vreunei precizări suplimentare, faza și faza inițială sînt determinate pînă la un multiplu întreg de 2π . Adăugînd sau scăzînd un multiplu întreg de 2π , se poate întotdeauna aduce faza inițială într-un interval ales de măsură 2π , de exemplu :

$$-\pi < \gamma \leq \pi. \quad (33.8)$$

¹ Mărimile armonice în acest sens nu au nici o legătură cu funcțiunile armonice (soluțiile c derivate continue, pînă la ordinul al doilea inclusiv, ale ecuației lui Laplace), cu care nu trebuie confundate.

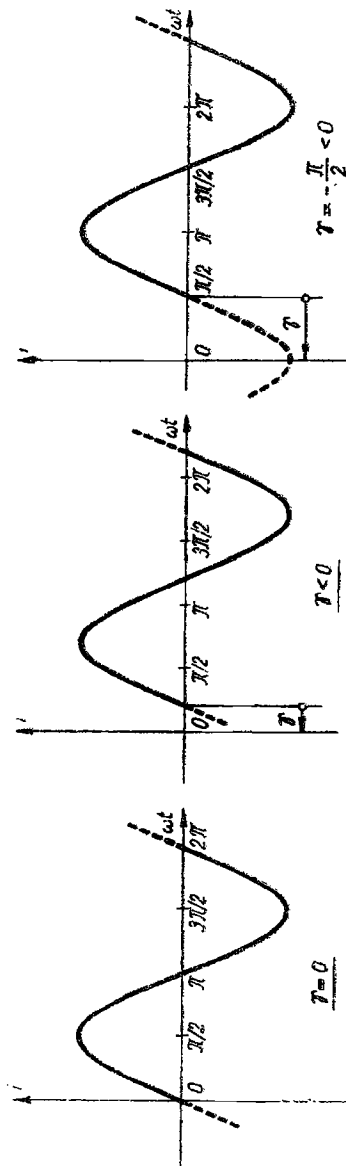
² Dacă unii dintre acești parametri sînt lent variabili în timp, mărimea se numește *mărime sinusoidală modulată* sau *mărime cvasisinusoidală*.



$$i = I_{\max} \sin(\omega t + \phi) \\ = I_{\max} \cos(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2})$$

$$b. i = I_{\max} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \\ = I_{\max} \cos \omega t$$

$$c. i = I_{\max} \sin(\omega t + \pi) \\ = -I_{\max} \sin \omega t$$



$$d. i = I_{\max} \sin \omega t \\ = I_{\max} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$e. i = I_{\max} \sin(\omega t + \phi) \\ = I_{\max} \sin(\omega t - |\phi|)$$

$$f. i = I_{\max} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \\ = -I_{\max} \cos \omega t$$

Fig. 33.2.

Orice mărime care depinde „în sinus“ sau „în cosinus“ de o funcțiune liniară de timp poate fi adusă la forma (33.6) cu (33.7) și (33.8), prin modificarea convenabilă a fazei inițiale. Exemple

$$-10 \sin \left(3t + \frac{\pi}{2} \right) = 10 \sin \left(3t + \frac{\pi}{2} - \pi \right) = 10 \sin \left(3t - \frac{\pi}{2} \right);$$

$$10 \sin (3t + 5\pi) = 10 \sin (3t + 5\pi - 2 \cdot 2\pi) = 10 \sin (3t + \pi);$$

$$10 \sin \left(-3t + \frac{\pi}{4} \right) = -10 \sin \left(3t - \frac{\pi}{4} \right) = 10 \sin \left(3t - \frac{\pi}{4} + \pi \right) = 10 \sin \left(3t - \frac{3\pi}{4} \right);$$

$$10 \cos \left(3t - \frac{\pi}{4} \right) = 10 \sin \left(3t - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) = 10 \sin \left(3t + \frac{\pi}{4} \right).$$

În figura 33.2 sînt indicate reprezentările grafice ale unor mărimi sinusoidale cu faze inițiale diferite.

Coeфициentul pozitiv al timpului în expresia $\omega t + \gamma$ a fazei a fost notat cu ω , deoarece e chiar *pulsatia* (frecvența unghiulară) funcțiunii periodice de timp (33.6).

În adevăr, din relațiile (33.1) și (33.2) rezultă că o funcțiune periodică de timp de pulsație ω satisface condiția $i(t) = i(t + 2\pi/\omega)$, iar din periodicitatea sinusului rezultă

$$I_m \sin (\omega t + \gamma) = I_{max} \sin (\omega t + 2\pi + \gamma) = I_{max} \sin \left[\omega \left(t + \frac{2\pi}{\omega} \right) + \gamma \right].$$

Frecvența f și perioada T ale mărimii sinusoidale sînt deci :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} > 0, \quad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} > 0. \quad (33.9)$$

Valoarea medie pe un număr n întreg de perioade a unei mărimi sinusoidale e nulă :

$$\begin{aligned} \tilde{i} &= I_{max} \frac{1}{nT} \int_{t_1}^{t_1+nT} \sin (\omega t + \gamma) dt = \frac{I_{max}}{2\pi n} \left[-\cos (\omega t + \gamma) \right]_{t_1}^{t_1+nT} = \\ &= \frac{I_{max}}{2\pi n} [\cos (\omega t_1 + \gamma) - \cos (\omega t_1 + n \widehat{\omega T} + \gamma)] \end{aligned}$$

adică

$$\tilde{i} = 0, \quad (33.10)$$

și de aceea nu poate fi utilizată pentru caracterizarea acestei mărimi.

Valoarea efectivă a unei mărimi sinusoidale se calculează cu relația (33.5)

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} i^2 dt = \frac{I_{max}^2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} \sin^2 (\omega t + \gamma) dt = \frac{I_{max}^2}{2T} \int_{t_1}^{t_1+T} [1 - \cos (2\omega t + 2\gamma)] dt = \\ &= \frac{I_{max}^2}{2T} \int_{t_1}^{t_1+T} dt - \frac{I_{max}^2}{2} \overbrace{\cos (2\omega t + 2\gamma)}^{=0} = \frac{I_{max}^2}{2}, \end{aligned}$$

deoarece valoarea medie a funcțiunii sinusoidale $\cos (2\omega t + 2\gamma) = \sin \left(2\omega t + 2\gamma + \frac{\pi}{2} \right)$ de perioadă $\frac{T}{2}$ e nulă.

Se obțin deci relațiile :

$$I = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}, \quad I_{max} = I\sqrt{2} \quad (33.11)$$

caracteristice funcțiunilor sinusoidale. În electrotehnică se operează cu valorile efective ale mărimilor sinusoidale, și de aceea aceste mărimi se scriu cu relațiile (33.6) și (33.10), sub forma :

$$i = I\sqrt{2} \sin (\omega t + \gamma) \quad (33.12)$$

cu

$$I > 0, \quad \omega > 0, \quad -\pi < \gamma \leq \pi, \quad (33.12')$$

numită *forma normală în sinus* a mărimii i .

Observații a) Alături de forma normală în sinus e foarte răspândită — mai ales în literatura anglo-saxonă de specialitate — *forma normală în cosinus* :

$$i = I\sqrt{2} \cos (\omega t + \alpha), \quad (33.13)$$

care se poate aduce întotdeauna la forma în sinus și reciproc, cu $\alpha = \gamma - \frac{\pi}{2}$. Într-o problemă dată trebuie să se folosească aceeași scriere pentru toate mărimile sinusoidale fie în sinus, fie în cosinus. În acest curs vom folosi exclusiv scrierea (33.12).

b) Schimbarea originii timpului nu afectează valoarea instantanee a mărimii și deci nici faza. Această schimbare afectează faza inițială :

$$I\sqrt{2} \sin (\omega t + \gamma) = I\sqrt{2} \sin (\omega t^* + \gamma^*).$$

cu

$$t^* = t + t_0, \quad \gamma^* = \gamma - \omega t_0.$$

Cum alegerea originii timpului e arbitrară, rezultă că, într-o problemă dată, fazele inițiale ale tuturor mărimilor sinusoidale conțin un termen aditiv arbitrar, același pentru toate, și numai diferențele relative ale fazelor inițiale au semnificație fizică. De aceea, pentru una dintre mărimile sinusoidale care intervin într-o problemă dată, faza inițială se poate alege arbitrar; o dată fixată faza inițială a uneia dintre mărimi, fazele inițiale ale tuturor celorlalte mărimi sînt univoc determinate. Mărimile pentru care se alege faza inițială nulă se numesc *origine de fază*.

c) O mărime sinusoidală e complet precizată cînd se dau frecvența, valoarea efectivă și faza inițială. În regim permanent sinusoidal, frecvența e hotărîtă de sursele de alimentare și e aceeași pentru toate tensiunile și toți curenții din rețea. Fiecare dintre aceste mărimi e, în plus, caracterizată complet de numai doi parametri: valoarea efectivă și faza inițială :

$$i = I\sqrt{2} \sin (\omega t + \gamma) \iff (I, \gamma). \quad (33.14)$$

d) În reprezentarea grafică a mărimilor sinusoidale de aceeași frecvență se preferă să se folosească drept variabilă independentă unghiul ωt (v. fig. 33.2).

Relații de fază : Se numește *defazaj* între două mărimi sinusoidale, considerate într-o ordine dată, diferența fazelor lor în această ordine. Dacă mărimile au aceeași frecvență, defazajul (pozitiv, negativ sau nul) e egal și cu diferența fazelor lor inițiale.

Fie

$$i_1 = I_1 \sqrt{2} \sin (\omega t + \gamma_1) \text{ și } i_2 = I_2 \sqrt{2} \sin (\omega t + \gamma_2).$$

Defazajul dintre i_1 și i_2 (în această ordine) e unghiul :

$$\varphi_{12} = (\omega t + \gamma_1) - (\omega t + \gamma_2) = \gamma_1 - \gamma_2 \geq 0. \quad (33.15)$$

Se definesc următoarele relații de fază (v. și fig. 33.3) :

$$\varphi_{12} = \gamma_1 - \gamma_2 > 0 \quad i_1 \text{ e defazat înaintea lui } i_2 \text{ (fig. 33.3, a)} \quad (33.16)$$

$$\varphi_{12} = \gamma_1 - \gamma_2 < 0 \quad i_1 \text{ e defazat în urma lui } i_2 \text{ (fig. 33.3, b)} \quad (33.17)$$

$$\gamma_1 = \gamma_2, \quad \varphi_{12} = 0 \quad i_1 \text{ și } i_2 \text{ sînt în fază (fig. 33.3, f)} \quad (33.18)$$

$$\varphi_{12} = \gamma_1 - \gamma_2 = \pm \frac{\pi}{2} \quad i_1 \text{ și } i_2 \text{ sînt în cuadratură (fig. 33.3, c și d)} \quad (33.19)$$

$$\varphi_{12} = \gamma_1 - \gamma_2 = \pm \pi \quad i_1 \text{ și } i_2 \text{ sînt în opoziție (fig. 33.3, e)} \quad (33.20)$$

Observații : a) Dacă mărimea i_1 e înaintea mărimei i_2 cu defazajul φ_{12} , atunci mărimea i_2 e în urma mărimei i_1 cu φ_{12} .

b) Deoarece fazele sînt determinate pînă la un termen aditiv multiplu arbitrar de 2π și defazajul e determinat pînă la un asemenea termen aditiv. De aceea, dacă nu se introduce o restricție suplimentară, relațiile de fază „înainte” și „în urmă” nu au o interpretare unică : cînd i_1 e înaintea lui i_2 cu $\varphi_{12} < 2\pi$, i_1 e totodată în urma lui i_2 cu $\varphi_{12} = \varphi_{12} - 2\pi$. Pentru a evita o exprimare ambiguă, se reduce totdeauna defazajul la intervalul $(-\pi, +\pi)$, adăugînd sau scăzînd un multiplu de 2π din relația (33.15). Cu această precizare, relațiile de fază (33.16) și (33.17) au o interpretare unică, iar relația de definiție a defazajului devine :

$$\varphi_{12} = \gamma_1 - \gamma_2 + 2\pi n; \quad -\pi < \varphi_{12} \leq \pi, \quad (33.21)$$

unde întregul $n \geq 0$ se alege astfel ca inegalitățile să fie satisfăcute.

33.1.3. Operații elementare cu mărimi sinusoidale. Prin anumite operații liniare elementare (adică ireductibile unele la altele) efectuate cu mărimi sinusoidale, se obțin mărimi sinusoidale *de aceeași frecvență*. Aceste operații sînt : adunarea, amplificarea (înmulțirea cu un scalar), derivarea și integrarea, și sînt singurele care intervin în ecuațiile diferențiale ale circuitelor liniare.

a) *Adunarea mărimilor sinusoidale* :

$$i_1 = I_1 \sqrt{2} \sin (\omega t + \gamma_1), \quad i_2 = I_2 \sqrt{2} \sin (\omega t + \gamma_2) \quad (33.22)$$

conduce la mărimea sinusoidală de aceeași frecvență

$$i = i_1 + i_2 = I \sqrt{2} \sin (\omega t + \gamma) \quad (33.23)$$

cu valoarea efectivă :

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2 \cos (\gamma_1 - \gamma_2)} \quad (33.24)$$

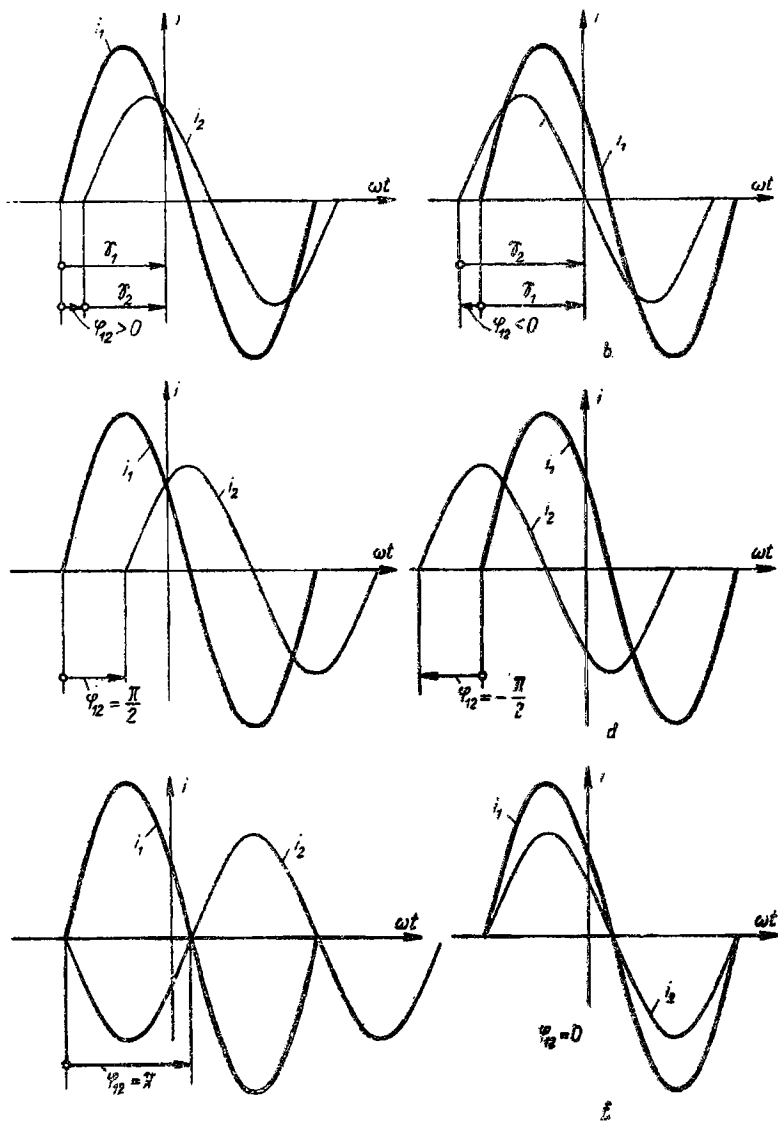


Fig. 33.3.

și cu faza inițială γ determinată de relațiile :

$$\sin \gamma = \frac{1}{I} [I_1 \sin \gamma_1 + I_2 \sin \gamma_2]; \quad \cos \gamma = \frac{1}{I} [I_1 \cos \gamma_1 + I_2 \cos \gamma_2]. \quad (33.25)$$

Valorile de mai sus se obțin prin identificare, după înlocuirea mărimilor (33.22) în (33.23).

b) *Amplificarea cu scalarul constant* $\lambda \geq 0$ a unei mărimi sinusoidale conduce la o mărime sinusoidală de aceeași frecvență și de aceeași fază inițială, avînd valoarea efectivă multiplicată cu λ

$$i = \lambda i_1 = \lambda I_1 \sin (\omega t + \gamma_1) = I \sin (\omega t + \gamma), \quad (33.26)$$

cu

$$I = \lambda I_1; \quad \gamma = \gamma_1$$

Observație: Scăderea a două mărimi sinusoidale se reduce la operațiile precedente :

$$i_1 - i_2 = i_1 + (-1) \cdot i_2. \quad (33.26')$$

c) *Derivarea unei mărimi sinusoidale în raport cu timpul* conduce la o mărime sinusoidală de aceeași frecvență, defazată înainte cu $\pi/2$ și avînd valoarea efectivă de ω ori mai mare. Fie $i = I \sqrt{2} \sin (\omega t + \gamma)$. Atunci :

$$\frac{di}{dt} = \sqrt{2} I \omega \cos (\omega t + \gamma) = \omega I \sqrt{2} \sin \left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2} \right). \quad (33.27)$$

d) *Integrarea unei mărimi sinusoidale în timp* conduce la o mărime sinusoidală de aceeași frecvență, defazată în urmă cu $\pi/2$ și avînd valoarea efectivă de ω ori mai mică. Fie $i = I \sqrt{2} \sin (\omega t + \gamma)$.

Atunci :

$$\int i dt = - \frac{\sqrt{2} I}{\omega} \cos (\omega t + \gamma) = \frac{I}{\omega} \sqrt{2} \sin \left(\omega t + \gamma - \frac{\pi}{2} \right) \quad (33.28)$$

Observație: În regim permanent căutăm la integrare numai funcțiunea primitivă de aceeași formă cu cea inițială, adică tot sinusoidală; de aceea nu se adaugă nici o constantă arbitrară.

La efectuarea unor operații neliniare, rezultatul nu mai este o mărime sinusoidală. Astfel, produsul mărimilor sinusoidale (33.22) este

$$i_1 i_2 = 2 I_1 I_2 \sin (\omega t + \gamma_1) \sin (\omega t + \gamma_2) = I_1 I_2 \cos (\gamma_1 - \gamma_2) - I_1 I_2 \cos (2 \omega t + \gamma_1 + \gamma_2) \quad (33.29)$$

și conține un termen constant și unul de frecvență dublă. Termenul constant e chiar valoarea medie a produsului în decursul unei perioade :

$$\overline{i_1 i_2} = \frac{1}{T} \int_0^T i_1 i_2 dt = I_1 I_2 \cos (\gamma_1 - \gamma_2). \quad (33.29')$$

Valoarea medie pe o perioadă a produsului a două mărimi sinusoidale e egală cu produsul valorilor lor efective, multiplicat cu cosinusul defazajului dintre ele.

33.2. Regimul permanent sinusoidal al circuitelor simple determinat cu metoda substituției soluțiilor sinusoidale

Considerăm diferite circuite simple (adică neramificate), liniare și pasive, cărora li se aplică tensiunea la borne sinusoidală (luată după convenția de asociere a sensurilor de referință de la receptoare) :

$$u = U \sqrt{2} \sin (\omega t + \beta). \quad (33.30)$$

Scriind ecuația diferențială a circuitului cu ajutorul schemei echivalente, alcătuite din elemente ideale de circuit conectate în serie, vom căuta pentru intensitatea curentului soluția de regim permanent (forțat), adică o soluție de aceeași formă cu a tensiunii aplicate :

$$i = I \sqrt{2} \sin (\omega t + \gamma). \quad (33.31)$$

Anticipând asupra celor care vor fi dezvoltate în paragraful 33.3, precizăm că defazajul între tensiune și curent se notează cu simbolul φ , fără alți indici :

$$\varphi = \beta - \gamma \geq 0, \quad (33.32)$$

iar raportul între valorile efective ale tensiunii și curentului se numește *impedanță* și se notează cu simbolul Z :

$$\frac{U}{I} = Z > 0. \quad (33.33)$$

Cu aceste notații, curentul de regim permanent se scrie :

$$i = \frac{U}{Z} \sqrt{2} \sin (\omega t + \beta - \varphi). \quad (33.34)$$

33.2.1. Rezistorul ideal¹ (fig. 33.4). În acest caz, ecuația circuitului e :

$$u = u_r = r i = U \sqrt{2} \sin (\omega t + \beta).$$

Se obține :

$$i = \frac{u}{r} = \frac{U}{r} \sqrt{2} \sin (\omega t + \beta). \quad (33.35)$$

Rezultă cu relațiile (33.33) și (33.32) :

$$\boxed{Z_r = r} ; \quad \boxed{\varphi_r = 0}. \quad (33.36)$$

Curentul unui rezistor ideal e în fază cu tensiunea aplicată, și are valoarea efectivă proporțională cu a tensiunii aplicate și independentă de frecvență.

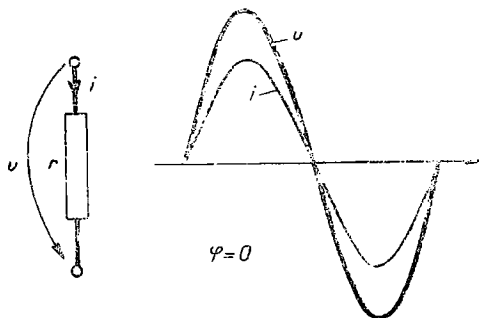


Fig. 33.4.

¹În cele ce urmează folosim simbolul r pentru rezistența unui rezistor, rezervând simbolul R rezistența întregului circuit (v. par. 33.3).

33.2.2. **Bobina ideală** (fig. 33.5). În acest caz, ecuația circuitului e (31.26) :

$$u = u_L = L \frac{di}{dt} \text{ sau } U \sqrt{2} \sin (\omega t + \beta) = L \frac{di}{dt}.$$

Substituind expresia (33.31) rezultă

$$U \sqrt{2} \sin (\omega t + \beta) = L \omega I \sqrt{2} \cos (\omega t + \gamma) = L \omega I \sqrt{2} \sin \left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2} \right),$$

adică :

$$I = \frac{U}{L \omega} \text{ și } \gamma = \beta - \frac{\pi}{2}. \quad (33.37)$$

Se obține pentru curent expresia :

$$i = \frac{U}{L \omega} \sqrt{2} \sin \left(\omega t + \beta - \frac{\pi}{2} \right) \quad (33.37')$$

Rezultă cu relațiile (33.33) și (33.32) :

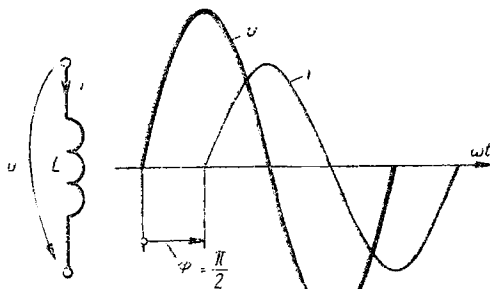


Fig. 33.5.

$$\boxed{Z_L = L \omega} ; \quad \boxed{\varphi_L = \frac{\pi}{2}}. \quad (33.38)$$

Curentul unei bobine ideale e defazat în urma tensiunii aplicate cu $\pi/2$, și are valoarea efectivă proporțională cu a tensiunii aplicate și invers proporțională cu frecvența. Impedanța unei bobine ideale e egală cu produsul dintre inductivitate și pulsație. La frecvențe înalte, o bobină blochează trecerea curentului, iar la frecvențe joase, reprezintă un scurtcircuit.

33.2.3. **Condensator ideal** (fig. 33.6). În acest caz, ecuația circuitului e (31.29) :

$$i = C \frac{du}{dt} = C \frac{d}{dt} [U \sqrt{2} \sin (\omega t + \beta)]$$

și se obține pentru curent expresia

$$i = I \sqrt{2} \sin (\omega t + \gamma) = C \omega U \sqrt{2} \cos (\omega t + \beta),$$

adică :

$$i = C \omega U \sqrt{2} \sin \left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2} \right), \quad (33.39)$$

iar

$$I = C \omega U \text{ și } \gamma = \beta + \frac{\pi}{2}. \quad (33.39')$$

Rezultă cu relațiile (33.33) și (33.32) :

$$\boxed{Z_C = \frac{1}{C \omega}} ; \quad \boxed{\varphi_C = -\frac{\pi}{2}}. \quad (33.40)$$

Curentul unui condensator ideal e defazat înaintea tensiunii aplicate cu $\pi/2$ și are valoarea efectivă proporțională cu a tensiunii și proporțională cu frecvența. Impedanța unei bobine ideale e egală cu valoarea reciprocă a produsului dintre capacitate și frecvență.

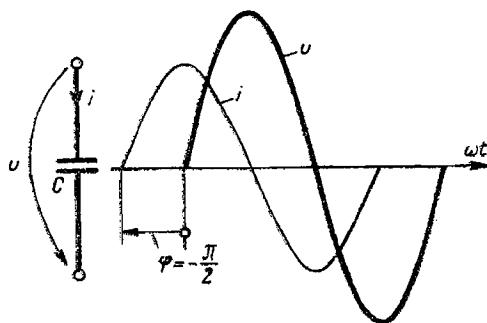
La frecvențe înalte un condensator reprezintă un scurtcircuit, iar la frecvențe joase blochează trecerea curentului.

33.2.4. Circuit r, L serie (fig. 33.7, Ecuația circuitului este :

$$u = u_r$$

$$U \sqrt{2} \sin (\omega t + \varphi) = r i + L \frac{di}{dt} \quad (33.41)$$

Căutînd soluția de regim permanent sub forma relației (33.31) și, substituind-o în ecuație, rezultă identitatea (în timp):



33.6.

$$U \sqrt{2} \sin (\omega t + \beta) = r I \sqrt{2} \sin (\omega t - \gamma) + L \omega I \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (33.42)$$

Identitatea trebuie să fie satisfăcută și în acele momente t particulare, în care :

$$\omega t = 0 \text{ și } \omega t + \gamma = \frac{\pi}{2} \quad (33.43)$$

Înlocuind aceste valori particulare în relația (33.42), rezultă egalitățile :

$$U \sin (\beta - \gamma) = L \omega I \quad (33.44)$$

$$U \cos (\beta - \gamma) = r I \quad (33.45)$$

Ridicînd la pătrat și adunînd aceste relații, se obține

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{U}{Z} \quad (33.46)$$

de unde :

$$Z = \sqrt{r^2 + \omega^2 L^2} \quad (33.47)$$

e impedanța circuitului r, L serie. Împărțind relația (33.44) și (33.45), se obține :

$$\operatorname{tg} (\beta - \gamma) = \left[\operatorname{tg} \varphi = \frac{L \omega}{r} \right] > 0, \quad (33.48)$$

cu

$$\sin \varphi = L \omega / Z > 0 \text{ și } \cos \varphi = r / Z > 0. \quad (33.48')$$

Aceste relații permit calcularea defazajului

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \quad (33.49)$$

Cu relația (33.46) și (33.48), curentul are expresia :

$$i = \frac{U}{\sqrt{L^2 \omega^2 + r^2}} \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \beta - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{L \omega}{r} \right) \quad (33.50)$$

Curentul circuitului r, L serie e defazat în urma tensiunii (v. fig. 33.7, b) cu un unghi crescător cu frecvența, care tinde către $\frac{\pi}{2}$ când $\omega \rightarrow \infty$. Valoarea efectivă a curentului scade monoton cu frecvența, tinzând asimptotic către $I_L = U/\omega L \rightarrow 0$ (fig. 33.7, c)

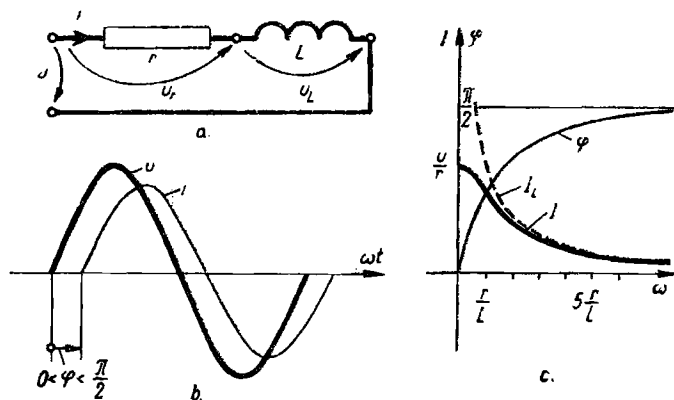


Fig. 33.7.

33.2.5. Circuit cu r, C serie (fig. 33.8, a). Ecuația circuitului

$$u = u_r + u_C$$

$$U \sqrt{2} \sin(\omega t + \beta) = rI + \frac{1}{C} \int i dt. \quad (33.51)$$

Căutînd soluția de regim permanent sub forma (33.31) și substituind-o în ecuație, rezultă identitatea (în timp):

$$U \sqrt{2} \sin(\omega t + \beta) = rI \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma) + \frac{1}{C\omega} I \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \gamma - \frac{\pi}{2}\right). \quad (33.52)$$

Identitatea trebuie să fie satisfăcută și în acele momente t particulare,

$$\omega t + \gamma = 0 \quad \text{și} \quad \omega t + \gamma = \frac{\pi}{2}. \quad (33.53)$$

Înlocuind aceste valori particulare în relația (33.52), rezultă egalitățile

$$U \sin(\beta - \gamma) = -\frac{1}{C\omega} I \quad (33.54)$$

$$U \cos(\beta - \gamma) = rI. \quad (33.55)$$

Ridicînd la pătrat și adunînd aceste relații, se obține:

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + 1/C^2 \omega^2}} = \frac{Z}{U} \quad (33.56)$$

de unde:

$$Z = \sqrt{r^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}} \quad (33.57)$$

e impedanța circuitului r, C serie.

Împărțind relațiile (33.54) și (33.55), se obține :

$$\operatorname{tg}(\beta - \gamma) = \left[\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\omega Cr} \right] \quad 0, \quad (33.58)$$

cu

$$\sin \varphi = 1/C\omega Z \quad 0, \quad \cos \varphi = r/Z \quad 0. \quad (33.58)$$

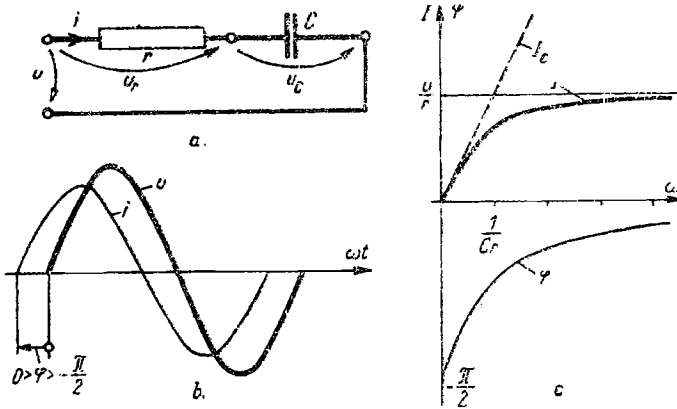


Fig. 33.8.

Aceste relații permit calcularea defazajului :

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}. \quad (33.59)$$

Cu relațiile (33.56) și (33.58), curentul are expresia :

$$i = \frac{U}{\sqrt{r^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}} \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \arctg \frac{1}{rC\omega} \right) \quad (33.60)$$

Curentul circuitului r, C serie e defazat *înainte* i_L (fig. 33.6, b) cu un unghi scăzător, cu frecvența care tinde către $-\frac{\pi}{2}$, când $\omega \rightarrow 0$. Valoarea efectivă a curentului crește la frecvențe mici ca $I_C = UC\omega$, tinzând monoton către $I_R = U/r$ (fig. 33.8, c), când $\omega \rightarrow \infty$.

33.2.6. Circuit r, L, C serie (fig. 33.9). Ecuația circuitului cu relațiile (31.22), (31.26), (31.30') este

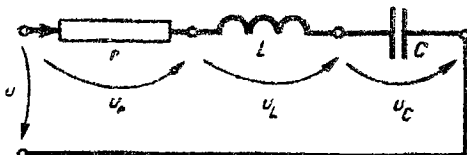


Fig. 33.9.

$$\begin{aligned} &= u_r + u_L \\ U\sqrt{2} \sin(\omega t + \beta) &= r i + L \frac{di}{dt} + \\ &+ \frac{1}{C} \int i dt. \end{aligned} \quad (33.61)$$

Căutînd soluția de regim permanent sub forma (33.31) și substituind-o în ecuație, rezultă ideatitatea (în timp):

$$U\sqrt{2} \sin(\omega t + \beta) = rI\sqrt{2} \sin(\omega t - \gamma) + L\omega I\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \gamma - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I}{C\omega} \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \gamma - \frac{\pi}{2}\right). \quad (33.62)$$

Înlocuind pentru t valorile particulare care rezultă din relațiile (33.53), rezultă egalitățile

$$U \sin(\beta - \gamma) = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)I \quad (33.63)$$

$$U \cos(\beta - \gamma) = rI. \quad (33.64)$$

Ridicînd la pătrat și adunînd aceste relații, se obține

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{U}{Z}, \quad (33.65)$$

de unde

$$Z = \sqrt{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad (33.66)$$

e impedanța circuitului r , L , C serie. Împărțind relațiile (33.63) și (33.64), se obține:

$$\operatorname{tg}(\beta - \gamma) = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{r}, \quad (33.67)$$

$$\sin \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{Z} \geq 0 \text{ și } \cos \varphi = \frac{r}{Z}. \quad (33.67')$$

Aceste relații permit calcularea defazajului:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad (33.68)$$

Cu relațiile (33.65) și (33.67), curentul are expresia

$$i = \frac{U}{\sqrt{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \gamma + \operatorname{tg}^{-1} \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{r}\right). \quad (33.69)$$

Se observă că acest circuit cuprinde, în cazuri particulare, toate circuitele studiate anterior: rezistorul ideal (cu $L \rightarrow 0$, $C \rightarrow \infty$), bobina ideală (cu $r \rightarrow 0$, $C \rightarrow \infty$), condensatorul ideal (cu $r \rightarrow \infty$, $L \rightarrow 0$), circuitul r , L (cu $C \rightarrow \infty$) și circuitul r , C (cu $L \rightarrow 0$).

Exemplele precedente arată că metoda substituției permite determinarea fără dificultăți a curentului de regim permanent. Dacă circuitele sînt mai complexe, ramificate etc., calculele devin însă complicate și nu permit o privire de ansamblu asupra proprietăților calitative ale circuitului. De aceea, în tehnică se folosesc alte metode (v. par. 34) mai sistematice și mai intuitive.

33.3. Caracterizarea circuitelor liniare în regim permanent sinusoidal

Caracterizarea unui circuit de curent alternativ sinusoidal — la o frecvență dată — se poate face cu ajutorul a numai doi parametri. Există diferite moduri de alegere a acestei perechi de parametri.

33.3.1. Impedanța și defazajul. Fie un dipol electric liniar și pasiv (fig. 33.10, a), sub tensiunea la borne sinusoidală de frecvență $f = \frac{\omega}{2\pi}$ dată :

$$u = U \sqrt{2} \sin (\omega t + \beta). \quad (33.70)$$

Curentul de regim permanent (cu sensul de referință corespunzător regulii de la receptoare) va fi de asemenea sinusoidal și de aceeași frecvență :

$$i = I \sqrt{2} \sin (\omega t + \gamma) \quad (33.71)$$

și poate fi determinat cu metoda substituției exemplificată în paragraful precedent. În general, $\gamma \neq \beta$ și raportul

$$\frac{u(t)}{i(t)} = f(t) \neq \text{const.} \quad (33.72)$$

~ funcțiune de timp în curent alternativ, raportul dintre tensiunea la borne instantanee și curentul instantaneu nu mai e o constantă caracteristică circuitului, ca în curent continuu.

Deoarece circuitul e liniar și pasiv, cînd valoarea efectivă a tensiunii crește de λ ori și valoarea efectivă a curentului crește de λ ori, iar fazele inițiale rămîn neschimbate; de asemenea, dacă la faza inițială a tensiunii se adaugă un termen aditiv, totul se petrece ca și cum s-ar fi schimbat originea timpului, și la faza inițială a curentului se adaugă aceeași cantitate. Rezultă că raportul valorilor efective și diferența fazelor inițiale ale ten-

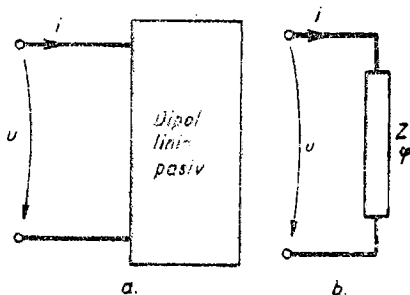


Fig. 33.10.

siunii aplicate și curentului sînt mărimi independente de tensiuni și de curent, proprii pentru a caracteriza circuitul studiat la frecvența de lucru. De aceea, pentru caracterizarea circuitului se definesc :

Impedanța circuitului :

$$\boxed{Z = \frac{U}{I}} = f(\omega; r, L, C, \dots) > 0, \quad (33.73)$$

care e totdeauna pozitivă și depinde numai de frecvența $f = \omega/2\pi$ și de parametrii circuitului, și se măsoară în ohmi ca și rezistența ;

Defazajul circuitului :

$$\boxed{\varphi = \beta - \gamma} = g(\omega; r, L, C, \dots) \geq 0, \quad (33.74)$$

care depinde numai de frecvența $f = \omega/2\pi$ și de parametrii circuitului și se măsoară în radiani. Dacă se cunosc Z și φ , curentul i e univoc determinat, deoarece $I = U/Z$ și $\gamma = \beta - \varphi$:

$$i = \frac{U}{Z} \sqrt{2} \sin(\omega t + \beta - \varphi). \quad (33.75)$$

În exemplele de la paragraful 33.2. au fost determinate impedanțele și defaza-jele circuitelor simple studiate (v. 33.36, 33.38, 33.40, 33.47 și 33.48, 33.57 și 33.58, 33.66 și 33.67).

Circuitele pasive neconținînd generatoare absorb o putere medie pozitivă (cel mult nulă). Așa cum se va arăta în paragraful 33.4, din această proprietate, rezultă că pentru circuitele pasive :

$$\boxed{\cos \varphi > 0.} \quad (33.76)$$

Defazajul acestor circuite e deci cuprins în intervalul :

$$\boxed{-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}} \quad (33.77)$$

și e univoc caracterizat de tangenta lui ($\operatorname{tg} \varphi$).

33.3.2. Rezistența și reactanța. În locul parametrilor Z și φ se mai folosesc pentru caracterizarea aceluiași circuit parametrii R și X , definiți cum urmează :

*Rezistența circuitului*¹ :

$$\boxed{R = \frac{U \cos \varphi}{I} = Z \cos \varphi} > 0, \quad (33.78)$$

Această mărime nu trebuie confundată cu rezistența definită prin legea conducției electrice (rezistența de curent continuu), cu care coincide numai în cazuri particulare și spre deosebire de care este în general o funcțiune de frecvență. De aceea, rezistența de curent continuu a fost notată mai sus cu r .

unde $U_R = U \cos \varphi$ se mai numește *componenta activă a tensiunii aplicate* (v. mai departe relația 33.116).

Reactanța circuitului :

$$\boxed{X = \frac{U \sin \varphi}{I} = Z \sin \varphi} \geq 0, \quad (33.79)$$

unde $U_X = U \sin \varphi$ se mai numește *componenta reactivă a tensiunii aplicate* (v. mai departe relația 33.116).

Dacă se dau rezistența și reactanța, defazajul și impedanța rezultă din relațiile :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}, \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z}, \quad \sin \varphi = \frac{X}{Z}, \quad Z = \sqrt{X^2 + R^2}, \quad (33.80)$$

care se rețin ușor cu ajutorul „triunghiului impedanțelor” (fig. 33.11, a), iar valoarea instantanee a curentului se scrie :

$$i = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} \sqrt{2} \sin \left(\omega t + \beta - \arctg \frac{X}{R} \right). \quad (33.81)$$

Rezistența și reactanța se măsoară în ohmi (Ω).

33.3.3. Admitanța și defazajul. În locul impedanței se poate folosi pentru caracterizarea circuitului valoarea ei reciprocă, numită :

Admitanța circuitului :

$$\boxed{Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{U}} > 0, \quad (33.82)$$

care împreună cu defazajul φ constituie un sistem complet de parametrii caracteristici. Există, evident, relațiile :

$$I = YU; \quad Y = \frac{1}{\sqrt{R^2 + X^2}}; \quad R = \cos \varphi / Y; \quad X = \sin \varphi / Y, \quad (33.83)$$

iar valoarea instantanee a curentului se scrie :

$$i = UY \sqrt{2} \sin (\omega t + \beta - \varphi). \quad (33.84)$$

Admitanța se măsoară în *siemens* ($1 \text{ S} = 1 \Omega^{-1}$).

33.3.4. Conductanța și susceptanța. În locul parametrilor Z și φ , sau R și X ,

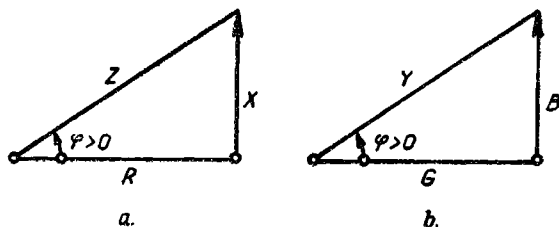


Fig. 33.11.

sau Y și φ , se mai folosesc pentru caracterizarea aceluiași circuit parametrii G și B , definiți cum urmează:

*Conductanța circuitului*¹

$$G = \frac{I \cos \varphi}{U} = Y \cos \varphi > 0, \quad (33.85)$$

unde $I_G = I \cos \varphi$ se numește *componenta activă a curentului*.

*Susceptanța circuitului*²:

$$B = \frac{I \sin \varphi}{U} = Y \sin \varphi \geq 0, \quad (33.86)$$

unde $I_B = I \sin \varphi$ se numește *componenta reactivă a curentului*.

Dacă se dau conductanța și susceptanța, defazajul și admitanța rezultă din relațiile:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{G}{B}; \cos \varphi = \frac{G}{Y} \quad \sin \varphi = \frac{B}{Y}; Y = \sqrt{B^2 + G^2} \quad (33.87)$$

care se rețin ușor cu ajutorul „triunghiului admitanțelor” (fig. 33.11, b).

Totodată:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{G^2 + B^2}}; G = R/Z^2; B = X/Z^2; R = G/Y^2; X = B/Y^2, \quad (33.88)$$

iar valoarea instantanee a curentului se scrie:

$$i = U \sqrt{G^2 + B^2} \sqrt{2} \sin \left(\omega t + \beta - \arctg \frac{B}{G} \right) \quad (33.89)$$

Conductanța și susceptanța se măsoară în siemens (Ω^{-1}).

33.3.5. Aplicații: În exemplele (33.2.1....33.2.6) s-au calculat impedanța și defazajul circuitelor celor mai simple. Calculînd acum și ceilalți parametri, se obțin datele din tabela alăturată, completată cu încă două circuite tip paralel, a căror rezolvare se propune ca exercițiu.

Observații: a) Din examinarea acestei tabele rezultă că rezistența circuitelor de curent alternativ R (33.78) a fost astfel definită, încît să coincidă cu rezistența r a rezistorului la circuitele serie cele mai simple, iar conductanța circuitelor de c.a., G (33.85) a fost astfel definită, încît să coincidă cu conductanța ($1/r$) a rezistorului la circuitele paralel cele mai simple. În paragraful 33.4 vom arăta (relația 33.105) că aceste definiții asigură pentru puterea activă (medie) aceleași expresii ca în curent continuu: $P = R I^2 = G U^2$. De subliniat că, în general,

$$Y \neq \frac{1}{Z} \quad \text{dar} \quad G \neq \frac{1}{R} \quad B \neq \frac{1}{X}.$$

b) În aplicații prezintă deosebită importanță următoarele expresii:

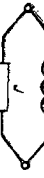
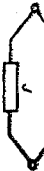
Reactanța unei bobine (reactanța inductivă):

$$X_L = \frac{1}{L\omega} \quad 0. \quad (33.90)$$

¹ Această mărime nu e în general egală cu valoarea reciprocă a rezistenței (33.78) și nu trebuie confundată nici cu conductanța definită în curent continuu cu care coincide numai în cazuri particulare și spre deosebire de care e, în general, o funcțiune de frecvență. De aceea e numită uneori conductanță echivalentă.

² Uneori se definește susceptanța astfel încît să aibă semnul opus celei definite aici, pentru a fi egală cu partea imaginară a admitanței complexe (v. par. 34): $B' = -Y \sin \varphi$.

Tabela 33.1.

Nr. crt.	CIRCUITUL	Z	φ	Y	R	X	G	B
1	Rezistorul ideal 	r	0	$\frac{1}{r}$	r	0	$\frac{1}{r}$	0
2	Bobina ideală 	$L\omega$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{L\omega}$	0	$L\omega$	0	$\frac{1}{L\omega}$
3	Condensatorul ideal 	$\frac{1}{C\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$	$C\omega$	0	$-\frac{1}{C\omega}$	0	$-C\omega$
4	Circuitul r, L serie 	$\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}$	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{r}$	$\frac{1}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}}$	r	$L\omega$	$\frac{r}{r^2 + \omega^2 L^2}$	$\frac{L\omega}{r^2 + \omega^2 L^2}$
5	Circuitul r, C serie 	$\sqrt{r^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}$	$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{C\omega r}$	$\frac{C\omega}{\sqrt{1 + r^2 C^2 \omega^2}}$	r	$-\frac{1}{C\omega}$	$\frac{r}{r^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}$	$-\frac{C\omega}{1 + r^2 C^2 \omega^2}$
6	Circuitul r, L, C serie 	$\sqrt{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{r}$	$\frac{1}{\sqrt{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$	r	$L\omega - \frac{1}{C\omega}$	$\frac{r}{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$	$\frac{1}{L\omega - \frac{1}{C\omega}}$
7	Circuitul r, L paralel 	$\frac{rL\omega}{\sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}}$	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{r}{L\omega}$	$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{L^2 \omega^2}$	$\frac{rL^2 \omega^2}{r^2 + L^2 \omega^2}$	$\frac{r^2 L\omega}{r^2 + L^2 \omega^2}$	$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{L\omega}$
8	Circuitul r, C paralel 	$\frac{r}{\sqrt{1 + r^2 C^2 \omega^2}}$	$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{rC\omega}$	$\frac{1}{r^2} + C^2 \omega^2$	$\frac{r}{1 + r^2 C^2 \omega^2}$	$-\frac{C\omega r^2}{1 + r^2 C^2 \omega^2}$	$\frac{1}{r}$	$-C\omega$

Reactanța unui condensator (reactanța capacitivă):

$$X_C = - \frac{1}{C\omega} < 0. \quad (33.91)$$

Rezistența și reactanța circuitului serie r, L, C :

$$R = r \quad X = L\omega - \frac{1}{C\omega}. \quad (33.92)$$

c) Parametrii Z, Y, R, X, G, B ai circuitelor depind, în general, de frecvența $f = \omega/2\pi$ a tensiunii de alimentare — și anume cu atât mai complicat, cu cât structura circuitului e mai complicată.

d) Comparînd definițiile parametrilor circuitelor cu valorile lor din cazul celor mai simple circuite serie sau paralel, mai rezultă că un circuit liniar și pasiv admite la o frecvență dată două scheme echivalente:

— O schemă echivalentă serie, în care un rezistor de rezistență R e conectat în serie cu un element reactiv de circuit de reactanță X .

— O schemă echivalentă paralel, în care un rezistor de rezistență $1/G$ e conectat în paralel cu un element reactiv de circuit de reactanță $1/B$.

33.3.6. Clasificarea circuitelor de curent alternativ sinusoidal. În analogie cu proprietățile celor mai simple circuite, se folosește următoarea terminologie, valabilă la o frecvență dată:

a) Circuit rezistiv¹, dacă

$$\varphi = 0, X = 0, B = 0; Z = R, Y = G. \quad (33.93)$$

Cel mai simplu circuit pur rezistiv (la orice frecvență) e rezistorul ideal.

b) Circuit reactiv, dacă

$$\varphi \neq 0, \quad X \neq 0, \quad B \neq 0. \quad (33.94)$$

c) Circuit pur reactiv sau nedisipativ, dacă

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{2}, \quad R = 0, \quad G = 0; \quad Z = |X|, \quad Y = |B|. \quad (33.95)$$

d) Circuit inductiv, dacă

$$\varphi > 0, \quad X > 0, \quad B > 0. \quad (33.96)$$

Circuitul inductiv e un circuit reactiv. Defazajul pozitiv se mai numește defazaj inductiv: curentul e în urma tensiunii.

e) Circuit pur inductiv, dacă

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad R = 0, \quad G = 0, \quad X = Z, \quad B = Y. \quad (33.97)$$

Cel mai simplu circuit pur inductiv (la orice frecvență) e bobina ideală.

f) Circuit capacitiv, dacă

$$\varphi < 0, \quad X < 0, \quad B < 0. \quad (33.98)$$

¹ Numit uneori, impropriu, circuit ohmic.

Circuitul capacitiv e un circuit reactiv; defazajul negativ se mai numește *defazaj capacitiv*: tensiunea e în urma curentului.

g) *Circuit pur capacitiv*, dacă

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}, \quad R = 0, \quad G = 0, \quad X = -Z, \quad B = -Y. \quad (33.99)$$

Cel mai simplu circuit pur capacitiv (la orice frecvență) e condensatorul ideal.

h) *Circuit disipativ*, dacă laturile lui au rezistențe nenule, în care au loc pierderi de energie prin efect Joule-Lenz.

Observație: În limbajul tehnic, curent se numește adesea *impedanță* nu numai mărimea Z , ci și dipolul linear și pasiv caracterizat de această mărime, folosindu-se drept simbol grafic un dreptunghi alb, ca și pentru rezistoare (v. fig. 33.10.b). De asemenea se mai numește *reactanță* nu numai mărimea X , ci și elementul de circuit pur reactiv, caracterizat de această mărime.

33.4. Puteri

33.4.1. *Putere activă. Puterea instantanee* la bornele unui dipol electric (v. teorema transferului de putere, relația 31.21')

$$p = u i \quad (33.100)$$

este (algebric) putere primită, respectiv cedată, după cum sensurile tensiunii la borne u și curentului i se asociază după regula de la receptoare, respectiv de la generatoare. În cele ce urmează vom considera regula de la receptoare (fig. 33.12, a), deși definițiile care urmează sînt valabile și în celălalt caz cu interpretarea respectivă. În regim sinusoidal, înlocuind pe u din relația (33.70) și pe i din relația (33.71), se obține, cu $\varphi = \beta - \gamma$, expresia:

$$p = 2 UI \sin(\omega t + \beta) \sin(\omega t + \gamma) = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \gamma + \beta)^1 \quad (33.101)$$

Puterea instantanee e deci o mărime periodică, avînd o componentă constantă și o componentă de frecvență dublă. În aplicații interesează numai energia absorbită într-un interval de timp τ , foarte mare față de perioada $T = 2\pi/\omega$

$$W_\tau = \int_0^\tau p \, dt = \tau UI \cos \varphi - UI \frac{T}{4\pi} [\sin(2\omega\tau + \gamma + \beta) - \sin(\gamma + \beta)],$$

respectiv puterea medie absorbită în acest interval:

$$\frac{W_\tau}{\tau} = UI \cos \varphi - \frac{T}{\tau} \cdot \frac{UI}{4\pi} [\sin(2\omega\tau + \gamma + \beta) - \sin(\gamma + \beta)]. \quad (33.102)$$

Al doilea termen al acestei puteri tinde către zero, cînd $\tau \rightarrow \infty$.

¹ Conform identității trigonometrice:

$$2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$$

Se numește *putere activă* și se notează cu P valoarea medie a puterii instantanee p , luată pe un număr întreg de perioade :

$$P = \tilde{p} = \frac{1}{nT} \int_0^{nT} p \, dt \quad (33.103)$$

În acest caz, pentru un dipol electric

$$P = \tilde{ui} = \frac{1}{nT} \int_0^{nT} ui \, dt = \left(\frac{W_\tau}{\tau} \right)_{\tau = nT} \quad (33.103')$$

Cu $2\pi\tau = 2\pi n \cdot T$, paranteza dreaptă din (33.102) se anulează și rezultă pentru puterea activă expresia :

$$P = UI \cos \varphi = \frac{U_{max} I_{max}}{2} \cos \varphi. \quad (33.104)$$

Egalitatea (33.102) arată că puterea medie pe un interval arbitrar de timp τ are valori apropiate de puterea activă, cu abateri de ordinul $\frac{T}{\tau}$, fiind practic egală cu puterea activă, dacă $\tau \gg T$. Această condiție e totdeauna realizată în practică, unde intervalele τ cele mai mici în care se apreciază puterea medie sînt de ordinul secundelor și cuprind sute de perioade (la frecvența industrială de 50 Hz). De aceea și aparatele de măsură a puterii, wattmetrele, al căror echipaj mobil nu poate urmări variațiile puterii instantanee cu care e proporțional cuplul lor activ, indică puterea medie, adică puterea activă.

Din relația (33.104) rezultă că *în regim sinusoidal puterea activă a unui dipol electric e egală cu produsul dintre valorile efective ale tensiunii și curentului înmulțit cu cosinusul unghiului de defazaj corespunzător*. Pentru un circuit receptor pasiv, puterea medie e neapărat pozitivă, cel mult nulă (dacă nu conține rezistențe) :

$$P = UI \cos \varphi \geq 0. \quad (33.104')$$

Puterea activă se măsoară, ca și puterea instantanee, în watt (W — unitatea S.I.), kilowatt (1 kW = 10^3 W), megawatt (1 MW = 10^6 W), gigawatt (1 GW = 10^9 W).

Observație: Relația (33.103) e relația generală de definiție a puterii active, valabilă și în regim periodic nesinusoidal și pentru o rețea oarecare; relația (33.104) e relația de calcul a puterii active în regim sinusoidal pentru o rețea cu două borne (în monofazat).

Puterea activă primită de un dipol pasiv e totdeauna pozitivă și se poate exprima cu ajutorul rezistenței și conductanței (v. par. 33.3) :

$$P = RI^2 = GU^2 = \frac{RI_{max}^2}{2} = \frac{GU_{max}^2}{2} \geq 0. \quad (33.105)$$

Această expresie e nulă pentru circuitele nedisipative sau pur reactive (v. 33.95) (care deci nu absorb în medie putere din exterior) și e pozitivă pentru circuite disipative.

Expresia (33.101) a puterii instantanee arată că aceasta oscilează cu frecvența unghiulară 2ω , în jurul valorii ei medii, care e puterea activă (v. fig. 33.12, b). Chiar dacă circuitul e un receptor pasiv, cu $P > 0$, există momente în decursul unei perioade, cînd puterea instantanee primită e negativă, adică e în fapt cedată spre exterior. În acele momente, energia acumulată

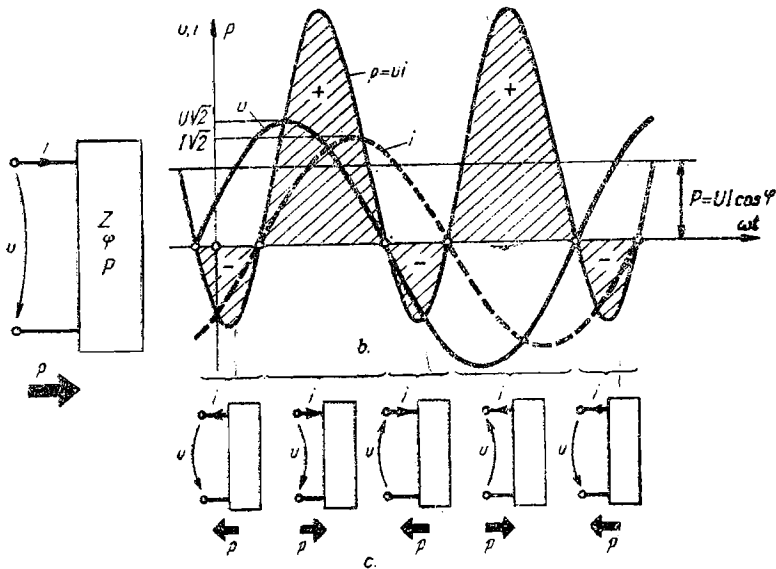


Fig. 33.12.

în cîmpul magnetic al bobinelor sau în cîmpul electric al condensatoarelor e parțial restituită sursei de alimentare. În figura 33.12, c se indică sensurile instantanee reale ale tensiunii curentului și puterii în diferite momente ale unei perioade.

33.4.2. Puterea aparentă. Factorul de putere. Se numește *putere aparentă* a unui dipol electric mărimea definită de produsul pozitiv al valorilor efective ale tensiunii și curentului, notat cu S (sau P_{ap}):

$$S = UI = \frac{U_{max} I_{max}}{2} > 0. \quad (33.106)$$

Puterea aparentă se măsoară în: volt-ampere (VA — unitate S.I.), kilovolt-ampere (1 kVA = 10^3 VA), megavolt-ampere (1 MVA = 10^6 VA), gigavolt-ampere (1 GVA = 10^9 VA).

Puterea aparentă a unui dipol pasiv se poate exprima cu ajutorul impedanței și admitanței sub forma:

$$S = ZI^2 = YU^2 = Z \frac{I_{max}^2}{2} = Y \frac{U_{max}^2}{2}. \quad (33.107)$$

Puterea aparentă e o putere calculată „ca în curent continuu“, fără a lua în considerație influența defazajului. Fără a avea semnificația energetică nemijlocită ca putere activă, puterea aparentă e importantă, deoarece reprezintă valoarea maximă a puterii active, la valori efective invariabile ale tensiunii și curentului și la defazaj variabil. După cum mașinile și aparatele elec-

trice sînt caracterizate prin valori maxime admisibile ale curentului (ca pierderile prin efect Joule în conductoare să nu determine o încălzire excesivă) și tensiunii (ca izolația să nu se străpungă), puterea aparentă caracterizează limitele lor de funcționare și se indică de obicei pe plăcuța de fabricație respectivă.

Se numește *factor de putere* raportul pozitiv și subunitar dintre puterea activă și cea aparentă :

$$1 \geq k_p = \frac{P}{S} \geq 0. \quad (33.108)$$

În regim sinusoidal pentru un dipol electric, cu (33.104) și (33.106), rezultă pentru factorul de putere expresia :

$$k_p = \cos \varphi. \quad (33.109)$$

Pentru ca o anumită instalație de putere aparentă dată să funcționeze cu maximum de putere activă, adică cu maximum de eficacitate, factorul de putere corespunzător trebuie să fie cît mai mare (mai apropiat de unitate), adică defazajul trebuie să fie cît mai mic. De aici rezultă una din problemele tehnico-economice cele mai importante ale gospodăriei energetice : problema ameliorării factorului de putere (v. și par. 33.4.5. aplicația 2).

33.4.3. Puterea reactivă : Se numește *putere reactivă* a unui dipol electric mărimea definită de produsul valerilor efective ale tensiunii și curentului multiplicat cu sinusul unghiului de defazaj și se notează cu simbolul Q (sau P_r) :

$$Q = UI \sin \varphi = \frac{U_{max} I_{max}}{2} \sin \varphi \geq 0. \quad (33.110)$$

Puterea reactivă se măsoară în var¹ (unitate S.I.), kilovar (1 kvar = 10³ var), megavar (1 Mvar = 10⁶ var), gigavar (1 Gvar = 10⁹ var).

Între puterea aparentă, puterea activă și puterea reactivă există relațiile :

$$P^2 + Q^2 = S^2; \quad Q = P \operatorname{tg} \varphi; \quad P = S \cos \varphi; \quad Q = S \sin \varphi \quad (33.111)$$

(care se rețin ușor cu ajutorul „triunghiului puterilor” — fig. 33.13). Puterea reactivă primită de un dipol pasiv — pozitivă la circuitele inductive, negativă la circuitele capacitive — se poate exprima cu ajutorul reactanței și susceptanței (v. par. 33.3) sub formele :

$$Q = XI^2 = BU^2 = X \frac{I_{max}^2}{2} = B \frac{U_{max}^2}{2} \geq 0 \quad (33.112)$$

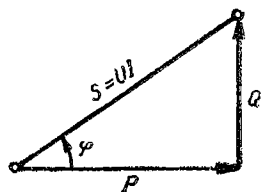


Fig. 33.13.

și e nulă pentru circuitele rezistive.

Privitor la sensul de transmisiune real al puterii reactive facem următoarele precizări : La circuitele receptoare (la care u și i sînt asociați după regula de la receptoare)

— dacă $Q = UI \sin \varphi > 0$ — puterea reactivă e absorbită de la rețeaua exterioară

— dacă $Q = UI \sin \varphi < 0$ — puterea reactivă cedată rețelei exterioare

La circuitele generatoare (la care u și i sînt asociați după regula de la generatoare) :

¹ Denumirea „var” provine de la inițialele cuvintelor din expresia volt-ampere-reactiv și a fost adoptată internațional de C.E.I. (Comisia Electrotehnică Internațională) la propunerea delegatului țării noastre, regretatul acad. prof. C. Budeanu.

- dacă $Q = UI \sin \varphi > 0$ — puterea reactivă e cedată rețelei exterioare
 — dacă $Q = UI \sin \varphi < 0$ — puterea reactivă e absorbită de la rețeaua exterioară.

Cum în cazul unor circuite capacitive ($X < 0$), și în particular al unor condensatoare, $Q < 0$ (cu regula de la receptoare), rezultă că aceste circuite (și în particular condensatoarele) sînt producătoare de putere reactivă; în mod corespunzător, circuitele inductive ($X > 0$) — și în particular bobinele — sînt consumatoare de putere reactivă.

Observație: a) Puterea reactivă a fost introdusă pe baza relației de definiție (33.110), construită prin analogie cu expresia (33.104) a puterii active — paralelism care se păstrează în toate celelalte relații (v. 33.105 și 33.112). Spre deosebire de puterea activă, puterea reactivă nu are însă interpretarea energetică simplă a acesteia — adică nu corespunde unui aport mediu de energie pe la borne. Cu toate acestea, puterea reactivă prezintă o deosebită importanță practică, din mai multe motive, dintre care cele mai importante le amintim pe scurt aici:

b) Factorul de putere se poate scrie:

$$k = \frac{P}{S} = \frac{\sqrt{S^2 - Q^2}}{S} = \sqrt{1 - \frac{Q^2}{S^2}}, \quad (33.113)$$

de unde rezultă că problema ameliorării factorului de putere e echivalentă cu problema reducerii puterii reactive (v. și par. 33.4.5., aplicația 2).

c) Așa cum vom arăta că rezultă din teorema conservării puterilor (v. par. 36.3), suma algebrică a puterilor reactive primită este nulă pentru toate laturile unei rețele izolate. Dacă există o latură care consumă efectiv putere reactivă, trebuie să existe neapărat în rețea cel puțin o altă latură producătoare de putere reactivă. Cu puterile reactive se pot face bilanțuri bazate pe o proprietate de conservare, ca și cum ar corespunde unei anumite forme de energie specifice (distincte de energia obișnuită care condiționează bilanțul puterilor active).

d) Puterea reactivă primită de o rețea pasivă e proporțională cu diferența dintre valoarea medie a energiei cîmpului magnetic al bobinelor rețelei și valoarea medie a energiei cîmpului electric al condensatoarelor rețelei (v. rel. 33.123). Aceste energii sînt variabile în timp cu frecvența unghiulară 2ω și cu faze diferite. Dacă valorile lor medii nu sînt egale, înseamnă că variațiile acestor energii nu se compensează reciproc în cadrul rețelei:

Puterea reactivă reprezintă o măsură a necompensării schimburilor interioare de energie între cîmpul magnetic și cîmpul electric.

33.4.4. Bilanțul energetic instantaneu al circuitului serie. Considerăm circuitul r, L, C serie (fig. 33.9) și ecuația (33.61), din care, multiplicînd-o cu i , obținem ecuația puterilor. Cu relațiile (31.27) și (31.31) rezultă atunci relația

$$p = ui = u_r i + u_L i + u_C i = ri^2 + Li \frac{di}{dt} + Cu_C \frac{du_C}{dt}$$

sau

$$p = ui = ri^2 + \frac{d}{dt}(W^{(m)} + W^{(e)}). \quad (33.114)$$

Alegînd pentru simplificarea tensiunea ca origine de fază, vom avea:

$$u = U\sqrt{2} \sin \omega t \quad \text{și} \quad i = I\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi). \quad (33.115)$$

Tensiunea se poate descompune aditiv, într-un termen în fază cu curentul (*componenta activă a tensiunii instantanee*) și unul în cuadratură (*componenta reactivă a tensiunii instantanee*)¹:

$$u = U \cos \varphi \sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi) + U \sin \varphi \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (33.116)$$

¹ Această descompunere e unică, deoarece se face în baza identităților trigonometrice: $\sin a = \sin(a - b + b) = \cos b \sin(a - b) + \sin b \cos(a - b) = \cos b \sin(a - b) + \sin b \sin\left(a - b + \frac{\pi}{2}\right)$.

Folosind această descompunere, puterea instantanee se scrie :

$$p = ui = 2UI \cos \varphi \sin^2(\omega t - \varphi) + 2UI \sin \varphi \sin(\omega t - \varphi) \cos(\omega t - \varphi)$$

sau

$$p = p_R + p_N = \underbrace{UI \cos \varphi [1 - \cos 2(\omega t - \varphi)]}_{rI^2} + \underbrace{UI \sin \varphi \sin 2(\omega t - \varphi)}_{XI^2}. \quad (33.117)$$

Se observă din comparația relațiilor (33.114) și (33.117) că primul termen :

$$p_R = u_R i = r i^2 = r I^2 2 \sin^2(\omega t - \varphi) = UI \cos \varphi [1 - \cos 2(\omega t - \varphi)] > 0 \quad (33.118)$$

este o putere instantanee pozitivă, rezultată din multiplicarea curentului cu componenta tensiunii în fază cu el. Puterea p_R se numește *putere instantanee de pulsație*, are valoarea medie egală cu valoarea medie a puterii p , adică cu puterea activă P și este chiar puterea instantanee dezvoltată în rezistența circuitului. Al doilea termen :

$$p_N = (u_L + u_C) i = \frac{d}{dt} (\overline{W}^{(m)} - \overline{W}^{(e)}) = p - p_R = \underbrace{UI \sin \varphi \sin 2(\omega t - \varphi)}_Q \quad (33.119)$$

este puterea instantanee rezultată din multiplicarea curentului cu componenta tensiunii în cuadratură cu el și se numește *putere instantanee oscilantă*. Valoarea medie a puterii p este nulă, iar valoarea ei maximă e chiar puterea reactivă (în modul). Puterea instantanee oscilantă e egală cu viteza de variație a energiei instantanee totale (electrice și magnetice) a circuitului. *Puterea reactivă (în modul) e deci egală cu amplitudinea vitezei de variație a energiei acumulate în câmpul electromagnetic al circuitului*. O altă interpretare a puterii reactive rezultă din (33.112) și (33.92) :

$$Q = XI^2 = (X_L - X_C) I^2 = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) I^2 = 2\omega \left(\frac{LI^2}{2} - \frac{I^2}{2C\omega^2} \right) \quad (33.120)$$

Valoarea medie a energiei magnetice este :

$$\overline{W}^{(m)} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{Li^2}{2} dt = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt \right] = \frac{LI^2}{2}, \quad (33.121)$$

conform relației (33.5).

Valoarea medie a energiei electrice este :

$$\overline{W}^{(e)} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{Cu_C^2}{2} dt = \frac{C}{2} \left[\frac{1}{T} \int_0^T u_C^2 dt \right] = \frac{CU_C^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{I^2}{C\omega^2} \quad (33.122)$$

conform relației (33.5) și (33.39').

Rezultă :

$$Q = 2\omega [\overline{W}^{(m)} - \overline{W}^{(e)}] \quad (33.123)$$

În consecință, puterea reactivă este nulă dacă $\overline{W}^{(m)} - \overline{W}^{(e)} = 0$. Această situație corespunde defazajului $\varphi = 0$.

33.4.5. **Aplicații.** 1. Un motor de c.a. monofazat, funcționând sub tensiunea $U = 220$ V, absoarbe o putere activă $P = 2$ kW, sub $\cos \varphi = 0,8$ inductiv. Se calculează parametrii dipolului receptor constituit de motor, puterea reactivă și puterea aparentă.

Cu aceste date se pot calcula succesiv:

$$\text{Curentul absorbit: } I = \frac{P}{U \cos \varphi} = \frac{2 \cdot 10^3}{220 \cdot 0,8} = 11,35 \text{ A.}$$

$$\text{Impedanța motorului: } Z = \frac{U}{I} = \frac{220}{11,35} = 19,4 \Omega.$$

$$\text{Rezistența motorului: } R = Z \cos \varphi = 19,4 \cdot 0,8 = 15,5 \Omega.$$

$$\text{Reactanța motorului: } X = Z \sin \varphi = 19,4 \cdot 0,6 = 11,65 \Omega.$$

$$\text{Puterea reactivă absorbită: } Q = UI \sin \varphi = 220 \cdot 11,35 \cdot 0,6 = 1,5 \text{ kvar.}$$

$$\text{Puterea aparentă: } S = UI = 220 \cdot 11,35 = 2,49 \text{ kVA.}$$

2. O linie bifilară debitează la receptor puterea $P = 20$ kW, sub tensiunea $U = 220$ V și $\cos \varphi = 0,8$ inductiv. Conductorul liniei are o rezistență specifică $\frac{r}{2l} = 3 \cdot 10^{-4} \Omega/\text{m}$ și linia are lungimea $l = 100$ m. Să se calculeze pierderile de putere activă ΔP pe linie.

Exprimăm pierderile în funcțiune de datele problemei. Cu relațiile (33.105) și (33.111) rezultă:

$$\Delta P = rI^2 = r \frac{S^2}{U^2} = r \frac{P^2 + Q^2}{U^2}. \quad (33.124)$$

$$\text{Aici } Q = P \tan \varphi = 20 \cdot 000 \cdot \frac{0,6}{0,8} = 15 \cdot 000 \text{ var}$$

$$10^{-4} \cdot 2 \cdot 100 = 6 \cdot 10^{-2} \Omega$$

și rezultă:

$$\Delta P = 6 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{20^2 + 15^2}{220^2} 10^6 = 774 \text{ W.}$$

Observație: Din relația (33.124) rezultă că dacă se cere transmisiunea unei puteri active P , date cu o linie de rezistență r dată, pierderile sînt invers proporționale cu pătratul tensiunii și cresc cu pătratul puterii reactive. Din acest exemplu rezultă necesitatea tensiunilor înalte pentru puteri și distanțe mari (la 380 V, pierderile ar fi fost de trei ori mai mici), cum și importanța ameliorării factorului de putere (la $\varphi = 0$, $Q = 0$ pierderile ar fi fost de 495 W).

34. || METODE DE REPREZENTARE SIMBOLICĂ A MĂRIMILOR SINUSOIDALE ȘI UTILIZAREA LOR

La circuitele electrice cu o structură mai complexă, determinarea regimului permanent cu metoda substituției folosită în paragraful 33.2 devine o operație laborioasă, greu de sistematizat, depărtată de metodele familiare electricienilor de la studiul circuitelor de curent continuu (utilizarea sistemelor de ecuații algebrice liniare) și prea puțin intuitivă.

De aceea s-au elaborat numeroase alte metode (v. și metoda separării puterilor — par. 36.4), dintre care cele mai utilizate sînt însă *metodele de reprezentare simbolică*¹, care consistă în principiu în următoarele :

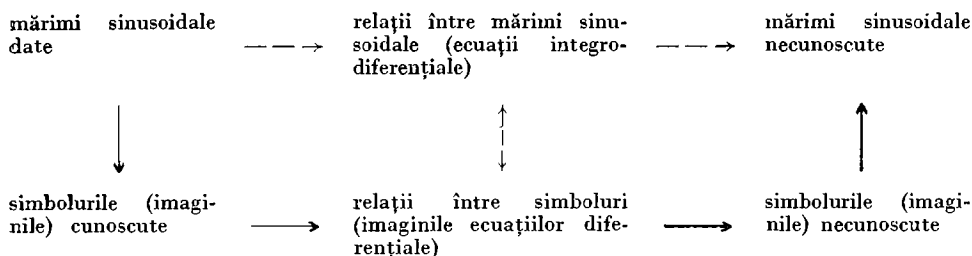
— Utilizînd o anumită regulă de reprezentare (transformare, corespondență), se asociază biunivoc fiecărei mărimi sinusoidale un simbol, numit *imaginea* sau *reprezentarea* mărimii (de ex. un vector în reprezentările geometrice și un număr complex în cele analitice).

— Se identifică relațiile dintre simboluri care corespund relațiilor dintre mărimile sinusoidale, adică ecuațiilor integro-diferențiale ale circuitelor.

— În loc să se rezolve direct aceste ecuații integro-diferențiale, se rezolvă relațiile corespunzătoare dintre simboluri în raport cu simbolurile mărimilor necunoscute.

— Utilizînd regula de reprezentare în sens invers, se determină care sînt mărimile sinusoidale necunoscute, știind că trebuie să corespundă simbolurilor determinate anterior.

Schematic, aceste metode se pot prezenta astfel :



Pentru ca această cale de rezolvare — aparent ocolită — să fie avantajoasă, trebuie să fie îndeplinite anumite condiții :

I. Reprezentarea să fie biunivocă, adică fiecărei mărimi sinusoidale să-i corespundă un singur simbol și fiecărui simbol să-i corespundă o singură mărime sinusoidală.

II. Transformarea directă (de la mărimea sinusoidală la simbolul ei) și transformarea inversă (de la simbol la mărimea sinusoidală) să se facă fără dificultăți de calcul.

III. Fiecareia dintre operațiile elementare cu mărimi sinusoidale care intervin în ecuațiile circuitelor (adunarea, amplificarea, derivarea și integrarea) să-i corespundă biunivoc o operație omologă efectuată cu simboluri. În particular, deoarece pentru simbolurile utilizate (vectori, numere complexe) operațiile de adunare și de amplificare (înmulțire cu un scalar) sînt definite în prealabil (independent de problema utilizării lor în metodele de reprezentare simbolică), trebuie ca adunarea mărimilor sinusoidale să corespundă adunării simbolurilor respective, iar amplificarea unei mărimi sinusoidale cu un scalar să corespundă înmulțirii simbolului cu același scalar : reprezentarea trebuie să fie liniară.

IV. Calculul cu simboluri să fie mai simplu, mai ușor de sistematizat, sau mai intuitiv decît calculul cu mărimi sinusoidale, acesta fiind însuși rostul acestor metode.

¹ Metode de reprezentare simbolică se utilizează cu succes și în studiul regimului tranzitoriu (v. cap. 52).

34.1. Reprezentări geometrice

O funcțiune sinusoidală de timp, de frecvență dată, e complet caracterizată de două valori scalare : *amplitudinea* (sau valoarea efectivă) și *faza inițială*. Un vector liber ¹ în plan e complet caracterizat de două valori scalare : *modulul* și unghiul făcut de orientarea lui cu o axă de referință, numit *argumentul* său. În ambele cazuri, obiectul considerat (funcțiune sinusoidală de timp sau vector liber în plan) e complet caracterizat de un număr pozitiv și de valoarea unui unghi. Se poate deci asocia fără restricție fiecărei mărimi sinusoidale dintr-o specie dată (curent, tensiune etc.) un vector liber în plan și reciproc, această asociere fiind biunivocă :

$$i = I \sqrt{2} \sin (\omega t + \alpha) \Longleftrightarrow \mathcal{F}(i). \quad (34.1)$$

Relațiilor analitice dintre mărimile sinusoidale le vor corespunde relații geometrice între vectorii corespunzători, relații care vor fi mai intuitive și mai ușor de explicitat. Aceasta este ideea fundamentală a reprezentării geometrice a mărimilor sinusoidale, reprezentare introdusă în fizică de Fresnel.

Vectorii reprezentativi $\mathcal{F}(i)$ sînt numiți *fazori* (uneori vectori de timp), pentru a se preciza distincția față de mărimile fizice vectoriale definite în spațiul fizic tridimensional (cum este, de exemplu, densitatea de curent $\mathbf{J}$), cu care nu trebuie confundați.

Planul fazorilor e un plan abstract — mai exact, cîte un plan abstract pentru fiecare specie de mărimi fizice cu variație sinusoidală — în care se reprezintă biunivoc mărimi care, din punctul de vedere al spațiului fizic, sînt mărimi scalare : intensitatea curentului electric, tensiunea electrică etc. Ceea ce se reprezintă prin fazori nu sînt însă *valorile* scalare (instantanee) ale acestor mărimi (care sînt caracterizabile printr-un singur număr, ca orice scalari), ci *funcțiunile sinusoidale de timp* respective (caracterizabile prin cîte doi scalari : amplitudinea și faza). Ceea ce are deci „o natură vectorială” (în sensul că admite o reprezentare biunivocă pe mulțimea vectorilor liberi din plan) nu este specia de mărimi fizice i (intensitatea curentului electric), ci mulțimea funcțiunilor sinusoidale de timp de forma $I \sqrt{2} \sin (\omega t + \gamma)$.

Deși limbajul tehnic comun e destul de ambiguu — numindu-se, de exemplu, curent electric atît mărimea sinusoidală cît și fazorul corespunzător — nu trebuie să se confunde această mărime cu imaginea ei : vectorul $\mathcal{F}(i)$ nu este curentul electric, ci numai îl reprezintă, în cazul particular cînd are o variație sinusoidală.

34.1.1. Reprezentarea cinematică (cu vectori rotitori). În reprezentarea cinematică, fazorul asociat mărimii sinusoidale e un vector liber, de modul constant, egal cu amplitudinea mărimii sinusoidale și de orientare variabilă, care face în fiecare moment t , cu o axă de referință fixă OX_0 , un unghi (argumentul) egal cu faza mărimii (fig. 34.1) :

$$i = I \sqrt{2} \sin (\omega t + \gamma) \Longleftrightarrow \overrightarrow{OA} \begin{cases} OA = I \sqrt{2} \\ \angle AOX_0 = \omega t + \alpha \end{cases} \quad (34.2)$$

¹ Se numește *vector liber* un vector al cărui punct de aplicație e arbitrar, astfel că reprezintă mulțimea tuturor vectorilor omoparaleli și de aceeași mărime cu el (echipolenți cu el), avînd diferite puncte de aplicație. De obicei se utilizează același punct de aplicație pentru toți vectorii liberi care intervin într-o problemă dată, afară doar dacă claritatea construcțiilor grafice nu cere contrariul.

Pentru vectorul liber în plan cu modulul A și cu argumentul α se folosește uneori notația A/α . Cu această notație, regula reprezentării cinematice se scrie :

$$\boxed{\mathcal{F}(i) = I\sqrt{2} \angle \omega t + \gamma} \quad (34.3)$$

Proprietăți a) Vectorul reprezentativ (fazorul) se rotește în sensul trigonometric direct cu viteza unghiulară constantă ω . El face mereu un unghi constant (egal cu faza inițială, $\gamma = \angle AOX$) cu o axă OX , rotitoare cu aceeași viteză și numită *axa de origine de fază* (pentru că are orientarea vectorilor reprezentativi ai mărimilor sinusoidale luate ca origine de fază). Axa origine de fază face unghiul $\angle XO X_0 = \omega t$ cu axa de referință fixă OX_0 . Dacă se reprezintă mai multe mărimi sinusoidale de aceeași frecvență (v. fig. 34.2), toți vectorii reprezentativi sînt în repaus relativ. Figura geometrică formată de acești vectori împreună cu axa origine de fază se rotește în ansamblu cu viteza ω în sens direct.

b) Valoarea instantanee a mărimii sinusoidale corespunzătoare unui anumit fazor dat, în momentul t , se poate determina grafic, proiectînd fazorul pe o axă fixă OY_0 , rotită cu $\frac{\pi}{2}$ în sens direct față de axa de referință OX_0 (fig. 34.1) și numită *axa transversală*.

c) Defazajul $\varphi_{12} = \gamma_1 - \gamma_2$ al mărimii sinusoidale $i_1 = I_1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma_1)$ față de rimea sinusoidală $i_2 = I_2 \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma_2)$, cu

$$\mathcal{F}(i_1) = I_1 \sqrt{2} \angle \omega t + \gamma_1 = \overrightarrow{OA_1}; \quad \mathcal{F}(i_2) = I_2 \sqrt{2} \angle \omega t + \gamma_2 = \overrightarrow{OA_2} \quad (34.4)$$

se reprezintă direct prin unghiul $\angle A_2OA_1$, format de vectorii reprezentativi respectiv i_1 (v. fig. 34.2). Toate unghiurile sînt orientate, sensul de referință pozitiv al fazelor și defazajelor fiind sensul trigonometric direct. Fazorul unei mărimi cu faza inițială mai mare — adică defazată înainte față de o a doua — e rotit în sensul direct față de fazorul celei de a doua mărimi. Săgeata defazajului φ_{12} e deci îndreptată de la $\overrightarrow{OA_2}$ la $\overrightarrow{OA_1}$; dacă sensul ei coincide cu sensul direct, $\varphi_{12} > 0$, ($\gamma_1 > \gamma_2$), iar dacă nu coincide, $\varphi_{12} < 0$, ($\gamma_1 < \gamma_2$). Posibilitatea reprezentării intuitive directe a defazajelor constituie unul dintre marile avantaje ale reprezentării geometrice.

d) În același plan se pot reprezenta fazori asociați unor mărimi din specii diferite. În acest caz, pentru fiecare specie se folosește o altă scară și nu se pot aduna decît mărimi din aceeași specie. De aceea e recomandabil să se diferențieze diferitele specii prin tipul de linie folosit (groasă, subțire, întreruptă). În figura 34.3 se reprezintă alături de curentul (34.2), tensiunea $u = U \sqrt{2} \sin(\omega t + \beta)$ prin fazorul :

$$\mathcal{F}(u) = U \sqrt{2} \angle \omega t + \beta \quad (34.5)$$

Corespondența operațiilor. O dată formulată regula de reprezentare și proprietățile ei, trebuie să stabilim cari sînt operațiile cu fazori corespunzătoare operațiilor elementare cu mărimi sinusoidale (v. par. 33.1.3.). De proprietățile acestei transpuneri a operațiilor depinde întreaga utilitate a metodei. Se demonstrează fără dificultăți următoarele :

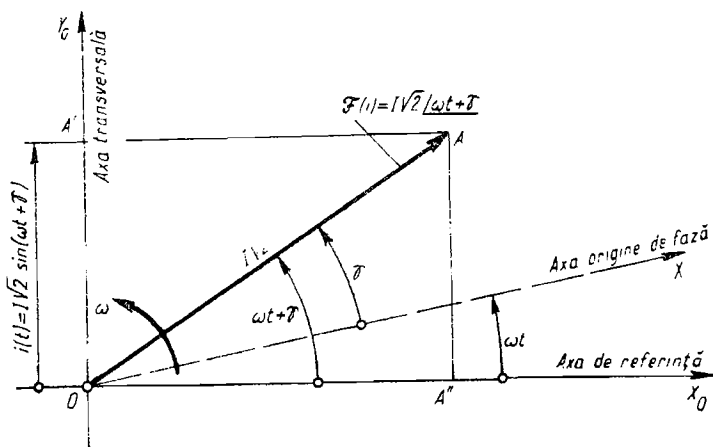


Fig. 34.1.

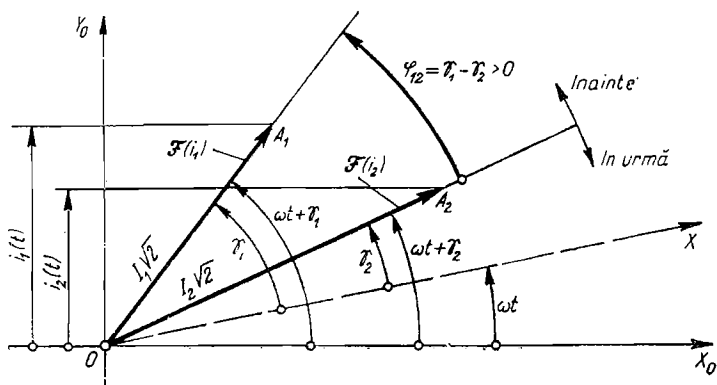


Fig. 34.2.

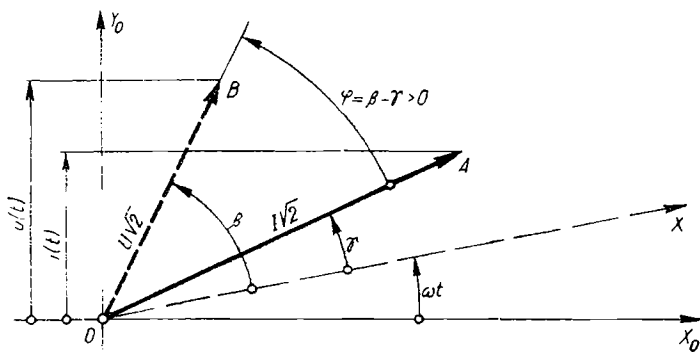


Fig. 34.3.

a) *Adunarea mărimilor sinusoidale corespunde biunivoc cu adunarea vectorială a fazorilor respectivi* (v. fig. 34.4) :

$$i_1 + i_2 \iff \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2, \quad (34.6)$$

adică

$$\mathcal{F}(i_1 + i_2) = \mathcal{F}(i_1) + \mathcal{F}(i_2). \quad (34.6')$$

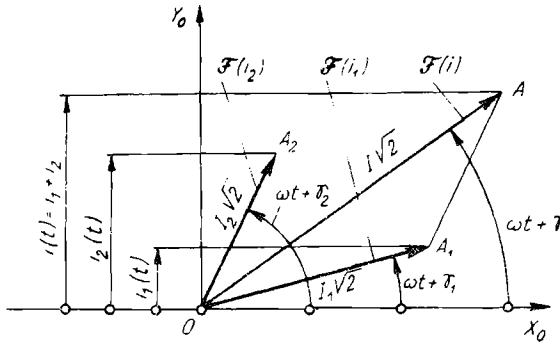


Fig. 34.4.

Această proprietate rezultă imediat, folosind interpretarea mărimilor sinusoidale ca proiecții pe axa transversală OY a fazorilor și utilizând teorema proiecțiilor : „proiecția sumei mai multor vectori e egală cu suma proiecțiilor“. Relațiile (33.24), (33.25) care dau parametrii sumei a două mărimi sinusoidale coincid cu relațiile corespunzătoare de la adunarea vectorilor cu regula paralelogramului.

b) *Amplificarea (înmulțirea) unei mărimi sinusoidale cu un scalar real corespunde biunivoc cu amplificarea (înmulțirea) cu același scalar a vectorului reprezentativ* (fig. 34.5) :

$$\lambda i \iff \lambda \vec{OA} = \lambda I \sqrt{2} / \omega t + \gamma, \quad (34.7)$$

adică

$$\mathcal{F}(\lambda i) = \lambda \mathcal{F}(i). \quad (34.7')$$

Această proprietate rezultă imediat din regula de reprezentare (34.2), care asociază amplitudinea mărimii sinusoidale la modulul vectorului (cu observația că dacă $\lambda < 0$, trebuie modificată faza inițială cu π , ceea ce corespunde inversării sensului vectorului, așa cum era necesar).

Observație: Reprezentarea cinematică este o *reprezentare liniară*, deoarece asigură corespondența operațiilor de adunare și înmulțire cu un scalar.

c) *Derivarea unei mărimi sinusoidale în raport cu timpul se traduce prin înmulțirea modulului fazorului cu ω și rotirea în sens direct (înainte) cu $\pi/2$* (fig. 34.6) :

$$\frac{di}{dt} \iff \omega I \sqrt{2} / \omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}, \quad (34.8)$$

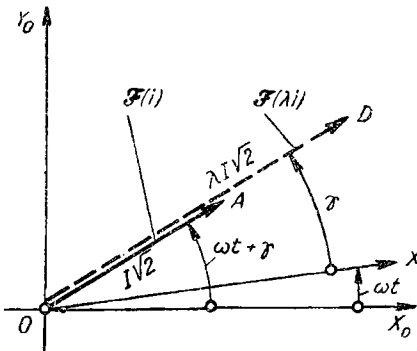


Fig. 34.5.

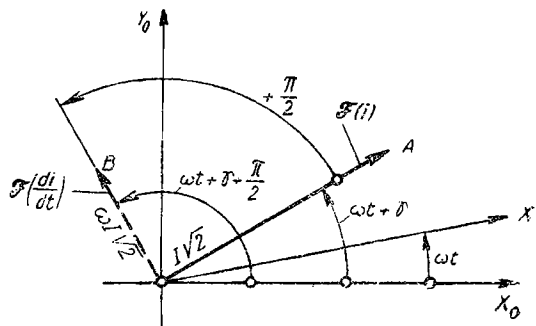


Fig. 34.6.

adică

$$\mathcal{F}\left(\frac{di}{dt}\right) = \omega I \sqrt{2} / \omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}. \quad (34.8')$$

În adevăr, membrul drept e fazorul care corespunde mărimii sinusoidale $\frac{di}{dt}$ din relația (33.27). Am găsit astfel corespondentul (biunivoc) al operației de derivare de la mărimi sinusoidale.

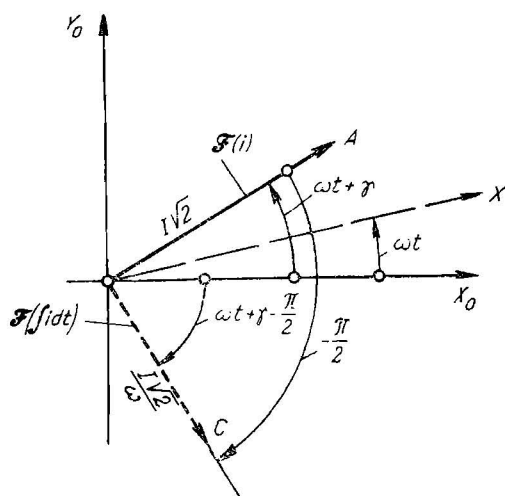


Fig. 34.7.

d) *Integrarea în timp a unei mărimi sinusoidale se traduce prin împărțirea modului fazorului cu ω și rotirea în sens invers (în urmă) cu $\pi/2$ (fig. 34.7) :*

$$\int i dt \Leftrightarrow \frac{1}{\omega} I \sqrt{2} / \omega t + \gamma - \frac{\pi}{2}, \quad (34.9)$$

adică

$$\mathcal{F}\left(\int i dt\right) = \frac{1}{\omega} I \sqrt{2} / \omega t + \gamma - \frac{\pi}{2}. \quad (34.9')$$

În adevăr, membrul drept e fazorul care corespunde mărimii sinusoidale (33.28). Am găsit astfel corespondentul (biunivoc) al operației de integrare de la mărimi sinusoidale.

Deoarece operațiilor elementare cu mărimi sinusoidale, care intervin în ecuațiile diferențiale liniare ale circuitelor, le corespund operații elementare efectuate cu vectori (adunări, amplificări, rotiri cu $\frac{\pi}{2}$), rezultă că acestor ecuații diferențiale le vor corespunde construcții geometrice (grafice), consistînd din însumarea unor vectori cu diferite orientări. Aceste construcții geometrice se numesc *diagramele vectoriale sau fazoriale* ale circuitelor și reprezintă imaginile ecuațiilor circuitelor în această reprezentare.

Metoda reprezentării cinematice pentru rezolvarea circuitelor liniare de curent alternativ consistă deci în următoarele :

1. Se consideră ecuația integro-diferențială a circuitului și se construiește diagrama vectorială corespunzătoare, pornind de la fazorii reprezentativi ai mărimilor sinusoidale asupra cărora se efectuează operațiile reprezentate de diferiți termeni ai ecuației (indiferent de faptul dacă aceste mărimi sînt „necunoscute” sau sînt „datele” problemei).

2. Se construiește fazorul care corespunde termenului liber al ecuației și are — în conformitate cu regula adunării vectorilor — închide poligonul format prin însumarea fazorilor corespunzători diferiților termeni ai ecuației.

3. Se verifică corectitudinea reprezentării tuturor operațiilor și a mărimilor „date”, trasîndu-se (dacă e nevoie) axa de origine de fază și axa de referință.

4. Se determină cu metode geometrice (cel mai ades prin proiecții pe două axe ortogonale) relațiile dintre modulele și argumentele fazorilor mărimilor necunoscute și cele ale fazorilor mărimilor date.

5. Se explicitează din aceste relații parametrii mărimilor necunoscute (în general, valori efective și defazaje) și se scrie cu acești parametri expresia instantanee pe baza regulii de reprezentare.

Se constată că în această metodă, rezolvarea ecuațiilor integro-diferențiale ale circuitelor în regim permanent sinusoidal revine la determinarea cu metode geometrice — eventual grafice — a unor segmente și unghiuri necunoscute dintr-o construcție grafică.

Observație: Dacă s-ar folosi pentru mărimi sinusoidale forma normală în cosinus (33.13), vectorul reprezentativ ar fi tot (34.3) și toate proprietățile metodei — inclusiv modul de transpunere al operațiilor elementare — ar rămâne neschimbate, cu o singură excepție: determinarea grafică a valorii instantanee s-ar face proiectând fazorul pe axa de referință OX_0 (segmentul OA'' în fig. 34.1). În acest caz, γ ar fi faza inițială de la forma în cosinus, notată în relația (33.13), cu x . Toate mărimile sinusoidale care intervin în aceeași problemă trebuie scrise într-un singur mod, în sinus sau în cosinus; în caz contrar, interpretarea diagramei (care nu depinde de această scriere) se face greșit.

34.1.2. **Aplicație.** Circuitul serie r, L, C . Exemplificăm metoda reprezentării cinemactice prin rezolvarea circuitului serie r, L, C studiat cu metoda substituției în paragraful 33.2.6. Ecuația circuitului e (33.61):

$$U \sqrt{2} \sin(\omega t + \beta) = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt, \quad (34.10)$$

funcțiunea necunoscută fiind curentul:

$$I \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma) = \frac{U}{Z} \sqrt{2} \sin(\omega t + \beta - \varphi). \quad (34.11)$$

Deoarece adunării și amplificării mărimilor sinusoidale le corespund adunarea și amplificarea vectorilor, diagrama corespunzătoare ecuației (34.10) — adică imaginea acestei ecuații — exprimă următoarele: fazorul tensiunii este o sumă de trei termeni, dintre care primul e fazorul curentului amplificat cu r , al doilea e fazorul derivatei curentului amplificat cu L , iar al treilea e fazorul integralei curentului amplificat cu $\frac{1}{C}$.

Ținând seama de regulile (34.8) și (34.9) ale derivării și integrării, însumarea aceasta se poate efectua grafic (fig. 34.8), pas cu pas, pornind de la un vector arbitrar $\vec{OA}$, ales pentru fazorul necunoscut al curentului (reprezentăm curentul cu linie întreruptă și căderile de tensiune cu linii pline): adunăm vectorial fazorul $\vec{OB}$ al curentului amplificat cu r , (ri) — cu fazorul $\vec{BC}$ al curentului rotit înainte cu $\frac{\pi}{2}$ și amplificat cu $L\omega \left(L \frac{di}{dt} \right)$ — și cu fazorul $\vec{CD}$ al curentului rotit în urmă cu $\frac{\pi}{2}$ și amplificat cu $\frac{1}{C\omega} \left(\frac{1}{C} \int i dt \right)$. Conform ecuației (34.10),

suma $\vec{OD}$ a acestor trei fazori trebuie să fie fazorul tensiunii u . Am obținut diagrama circuitului serie r, L, C . Putem acum trasa axa de referință OX_0 , formînd unghiul $\omega t + \beta$ în urmă față de fazorul tensiunii. Unghiul format de fazorul tensiunii cu fazorul curentului este chiar defazajul $\varphi = \beta - \gamma = (\omega t + \beta) - (\omega t + \gamma)$ dintre tensiune și curent. Din triunghiul dreptunghic OBD se deduce imediat:

$$(U \sqrt{2})^2 = (rI \sqrt{2})^2 + \left(L\omega I \sqrt{2} - \frac{1}{C\omega} I \sqrt{2} \right)^2$$

$$U^2 = I^2 \left[r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 \right],$$

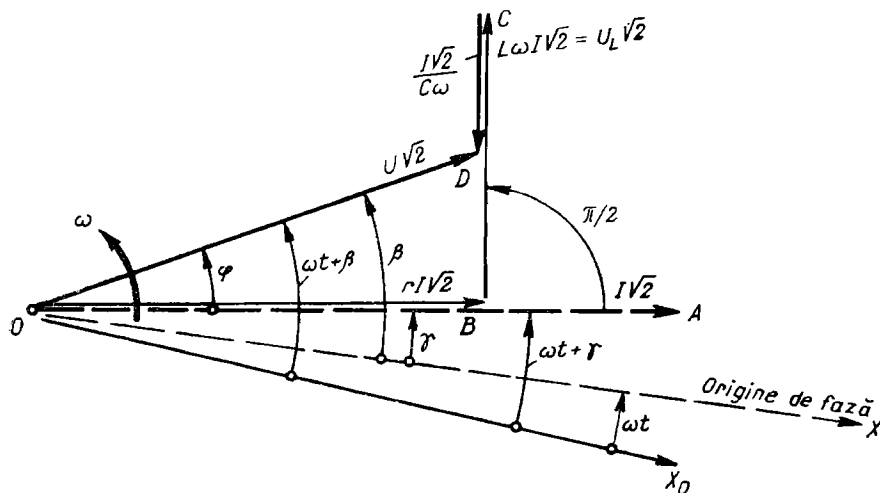


Fig. 34.8.

adică

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad (34.12)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega I\sqrt{2} - \frac{1}{C\omega} I\sqrt{2}}{rI\sqrt{2}} = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{r} \quad (34.13)$$

(deoarece pe desen a rezultat φ în sens direct, semnul obținut pentru defazaj din calculul geometric e cel corect. Dacă din construcția grafică, săgeata lui φ , dirijată de la curent la tensiune, ar fi rezultat în sens invers, ar fi trebuit să schimbăm semnul). Rezultatele obținute sînt cele cunoscute, relația (33.66) și (33.67) de la aplicarea metodei substituției.

Observații: a) Cu metoda reprezentării cinematice se obține o privire de ansamblu intuitivă asupra proprietăților circuitului și, în special, asupra relațiilor de fază. Putem urmări, de exemplu, fără dificultăți modul cum se modifică diagrama — cînd frecvența crește, cînd rezistența r scade etc. Avantajul principal al reprezentărilor geometrice constă în această posibilitate de a putea aprecia repede, intuitiv, proprietăți calitative ale circuitului.

b) După construirea diagramei și găsirea valorilor necunoscute se poate scrie direct valoarea instantanee a oricăreia dintre mărimile sinusoidale care apar în circuitul considerat. De exemplu, în cazul circuitului din figura 34.8, căderea de tensiune din bobină este:

$$u_L = U_L \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \gamma + \frac{\pi}{2} \right) = L\omega I \sqrt{2} \sin \left(\omega t + \beta - \varphi + \frac{\pi}{2} \right). \quad (34.14)$$

c) Metoda reprezentării cinematice se poate utiliza și în cazul cînd în circuitul liniar studiat se întîlnesc mărimi sinusoidale de frecvențe diferite, datorită faptului că tensiunea aplicată e o suprapunere de mai multe tensiuni sinusoidale (v. și cap. 48). În acest caz, metoda se aplică pentru fiecare grup de componente de aceeași frecvență în parte, cu observația că unghiurile formate de fazori cu frecvențe diferite nu mai sînt constante.

care o individualizează în raport cu celelalte de aceeași frecvență : *valoarea efectivă și faza inițială*. Defazajul a două mărimi se reprezintă, ca și mai înainte, prin unghiul format de fazorii respectivi. De astă dată, pentru a obține valoarea instantanee a mărimii, trebuie să se multiplice cu $\sqrt{2}$ proiecția fazorului pe axa

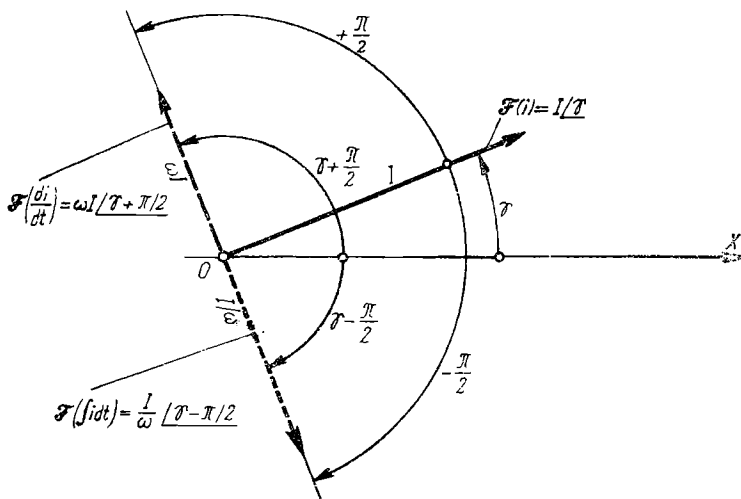


Fig. 34.10.

transversală OY_0 , care se rotește în acest caz cu viteza de rotație ω în sens invers celui trigonometric (împreună cu axa de referință OX_0). Deoarece această construcție nu e de obicei utilă, sistemul de axe OX_0Y_0 nu se mai reprezintă în diagrame (v. fig. 34.10).

Avînd în vedere că reprezentarea polară este (pînă la factorul de asemănare $\sqrt{2}$) tot reprezentare cinematică, raportată însă la un reper în rotație cu viteza unghiulară ω , în raport cu care vectorii sînt imobili — toate proprietățile reprezentării, privitoare la mărimi sinusoidale de aceeași frecvență, rămîn valabile :

a) Suma a două mărimi sinusoidale se reprezintă prin suma fazorilor corespunzători (rel. 34.6);

b) Amplificarea cu un scalar real a mărimii sinusoidale se reprezintă prin amplificarea cu același scalar a fazorului (rel. 34.7);

c) Fazorul care reprezintă derivata unei mărimi sinusoidale se obține din fazorul reprezentativ al mărimii, prin amplificare cu ω și rotire înainte (în sens trigonometric direct) cu $\frac{\pi}{2}$ (fig. 34.10) :

$$\frac{di}{dt} \longleftrightarrow \omega I \angle \gamma + \frac{\pi}{2} . \quad (34.17)$$

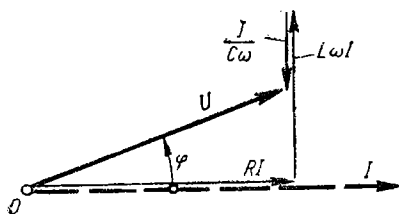


Fig. 34.11.

d) Fazorul care reprezintă integrala unei mărimi sinusoidale se obține din fazorul reprezentativ al mărimii prin împărțire cu ω și rotire înapoi (în sens trigonometric invers) cu $\frac{\pi}{2}$ (fig. 34.10) :

$$\int i \, dt \rightleftharpoons \frac{I}{\omega} \angle \gamma - \frac{\pi}{2}. \quad (34.18)$$

Metoda reprezentării polare se aplică la fel ca și metoda reprezentării cinematice, cu singura deosebire că se lucrează cu valori efective, iar trasarea axei de referință (acum mobilă) nu e necesară. Mai mult, deoarece alegerea originii timpului — și deci poziția axei OX origine de fază — e arbitrară, nici această axă nu se mai desenează. Diagrama astfel obținută cuprinde toate defazajele și reflectă în modul cel mai simplu structura circuitului, permițind calculul pe cale geometrică al parametrilor funcțiunilor sinusoidale necunoscute: valori efective și defazaje. Pe diagramă, fazorii se notează cu simbolul valorii efective respective.

Exemplu : În figura 34.11 e construită diagrama polară a circuitului serie r, L, C , studiat în paragraful 34.1.2., din care rezultă imediat relațiile cunoscute (34.12) și (34.13), suficiente pentru a scrie valoarea instantanee (33.69) a curentului.

În legătură cu alegerea orientării axei origine de fază observăm următoarele: de obicei, această orientare se ia orizontală de la stînga spre dreapta. Cum această alegere e arbitrară, adesea e mai bine să nu se fixeze de la început direcția acestei axe. În adevăr, de cele mai multe ori e dată tensiunea aplicată, și anume cu faza inițială nulă (deoarece știm că în orice problemă, faza inițială a uneia dintre mărimi e arbitrară și se poate alege nulă) și se cere curentul. Construcția diagramei se începe adesea (v. par. 34.1.2) de la fazorul curentului (a cărei fază inițială nu e cunoscută), și orientarea tensiunii rezultă prin construcție. Dezideratul de a întocmi astfel diagrama, încît tensiunea să rezulte orizontală, ar îngreua în mod nejustificat această operație.

34.1.4. Elementele de circuit studiate cu reprezentarea polară. Considerăm succesiv elementele ideale de circuit studiate în regim permanent cu metoda substituției (par. 33.2). Presupunem de astă dată tensiunea origine de fază :

$$u = U\sqrt{2} \sin \omega t \quad (\beta = 0) \quad (34.19)$$

și determinăm curentul cu ajutorul metodei reprezentării polare, deoarece $\beta = 0$, $\gamma = \beta - \varphi = -\varphi$ și curentul va fi de forma :

$$i = I\sqrt{2} \sin (\omega t - \varphi) = \frac{U}{Z} \sqrt{2} \sin (\omega t - \varphi). \quad (34.20)$$

Chiar dacă în aceste cazuri elementare aplicarea metodei reprezentării geometrice nu aduce o simplificare, cunoașterea proprietăților elementelor de circuit e necesară pentru aplicarea sistematică a metodei la cazuri mai complicate.

a) **Rezistorul ideal**, de rezistență r , are ecuația (31.22) :

$$u = u_r = r i.$$

Fazorul curentului amplificat cu scalarul r e egal cu tensiunea. Cei doi fazori sînt deci paraleli (fig. 34.12, a) și au : modulele I și $U = r I$ și argumentele egale. Defazajul egal cu unghiul celor doi fazori e nul. Rezultă deci :

$$I = \frac{U}{r}, \quad \varphi = 0, \quad i = \frac{U}{r} \sqrt{2} \sin \omega t. \quad (34.21)$$

Parametrii circuitului sînt :

$$\begin{aligned} Z &= r, & R &= Z \cos \varphi = r, & X &= Z \sin \varphi = 0 \\ Y &= 1/Z = s/r, & G &= Y \cos \varphi = 1/r, & B &= Y \sin \varphi = 0 \end{aligned} \quad (34.22)$$

iar puterile sînt :

$$P = R I^2 = r I^2 = \frac{U^2}{r}, \quad Q = X I^2 = 0, \quad S = U I = \frac{U^2}{r}. \quad (34.23)$$

b) *Bobina ideală*, de inductivitate L , are ecuația (31.26) :

$$u = u_L = L \frac{di}{dt}.$$

Fazorul tensiunii se obține cu relația (34.17) din fazorul curentului rotit cu $\frac{\pi}{2}$

înainte (în sens direct), prin amplificare cu ω și apoi cu L (fig. 34.12, b) : $U = L \omega I$, iar curentul e defazat în urma tensiunii cu $\frac{\pi}{2}$. Rezultă deci :

$$\begin{aligned} I &= \frac{U}{L \omega}, \quad \varphi = + \frac{\pi}{2}, \\ i &= \frac{U}{L \omega} \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (34.24)$$

Parametrii circuitului sînt :

$$\begin{aligned} Z &= L \omega, & R &= Z \cos \varphi = 0, \\ X &= Z \sin \varphi = L \omega, \\ Y &= 1/Z = 1/L \omega, & G &= Y \cos \varphi = 0, \\ B &= Y \sin \varphi = 1/L \omega, \end{aligned} \quad (34.25)$$

iar puterile sînt :

$$\begin{aligned} P &= R I^2 = 0, \\ Q &= X I^2 = L \omega I^2 = U^2 / L \omega, \\ S &= U I = U^2 / L \omega. \end{aligned} \quad (34.26)$$

c) *Condensator ideal*, de capacitate C , are ecuația (31.30')

$$u = u_C = \frac{1}{C} \int i \, dt.$$

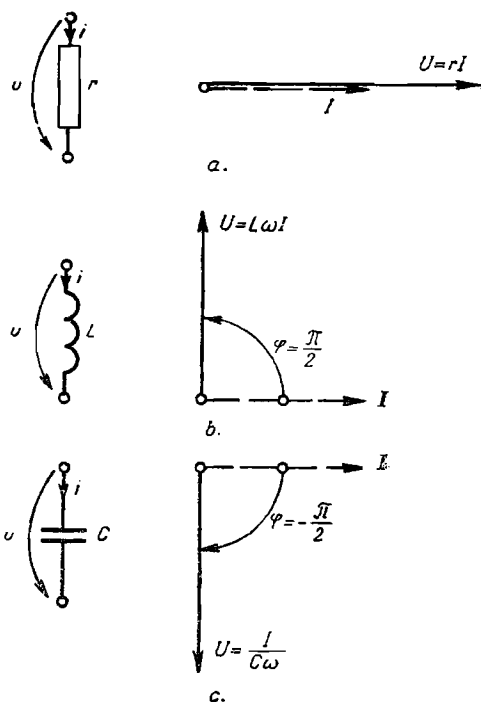


Fig. 34.12.

Fazorul tensiunii se obține cu (34.18) din fazorul curentului rotit cu $\pi/2$ în urmă (în sens invers), prin împărțire cu ω , și apoi cu C : $U = I/\omega C$, iar curentul e defazat înaintea tensiunii cu $\frac{\pi}{2}$ (fig. 34.12, c). Rezultă deci :

$$I = UC\omega, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}, \quad i = C\omega U\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (34.27)$$

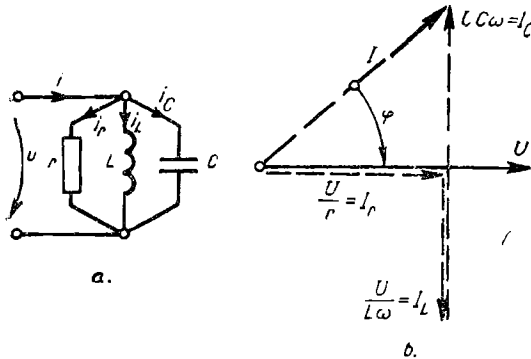


Fig. 34.13.

Parametrii circuitului sînt :

$$\begin{aligned} Z &= 1/C\omega, \\ Y &= 1/Z = C\omega, \\ R &= Z \cos \varphi = 0, \\ G &= Y \cos \varphi = 0, \\ X &= Z \sin \varphi = -1/C\omega, \\ B &= Y \sin \varphi = -C\omega, \end{aligned} \quad (34.28)$$

iar puterile sînt :

$$\begin{aligned} P &= RI^2 = 0, \\ Q &= XI^2 = -\frac{I^2}{C\omega} = -C\omega U^2, \\ S &= UI = C\omega U^2. \end{aligned} \quad (34.29)$$

34.1.5. Aplicație : Circuitul r, L, C cu toate elementele în paralel. Considerăm circuitul din figura 34.13, a (cu cele trei elemente ideale de circuit în paralel), căruia i se aplică tensiunea (34.19). Deoarece în regim cvasistationar e valabilă teorema continuității (31.10) și consecința ei directă, teorema I-a a lui Kirchhoff (v. și cap. 36) își păstrează valabilitatea. Se poate deci scrie :

$$i = i_r + i_L + i_C, \quad (34.30)$$

unde curenții sînt cei determinați mai înainte pentru elementele de circuit cărora, în acest caz, li se aplică aceeași tensiune u . Conform relației (34.30), diagrama circuitului se construiește obținînd fazorul reprezentativ al curentului total I (fig. 34.13, b), prin adunarea a trei fazori : fazorul $I_r = \frac{U}{r}$ al curentului din rezistor, în fază cu fazorul tensiunii; fazorul $I_L = \frac{U}{L\omega}$ al curentului din bobină (v. rel. 34.25), defazat în urma fazorului tensiunii cu $\pi/2 = \frac{\pi}{2}$; fazorul $I_C = UC\omega$ al curentului din condensator (v. rel. 34.28), defazat înaintea fazorului tensiunii cu $\pi/2$. Deoarece, așa cum am luat la întîmplare mărimile acestor fazori, curentul total I a rezultat defazat înaintea tensiunii (cazul $\varphi < 0$), unghiul de defazaj φ trebuie introdus cu semnul minus în relațiile geometrice obținute scriind proiecțiile pe două axe (paralelă cu U și transversală față de U) a adunării vectoriale efectuate :

$$\left. \begin{aligned} I \cos(-\varphi) &= I \cos \varphi = I_r \\ I \sin(-\varphi) &= -I \sin \varphi = I_C - I_L = U \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) \end{aligned} \right\} \quad (34.31)$$

Din aceste relații rezultă :

$$I = U \sqrt{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega \right)^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = r \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega \right); \quad (34.32)$$

$$i = I \sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi) = U \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2} \sin\left[\omega t - \arctg r \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)\right]. \quad (34.33)$$

Parametrii circuitului sînt :

$$\left. \begin{aligned} Z &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2}}, \quad R = \frac{\frac{1}{r}}{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2}, \quad X = \frac{\frac{1}{L\omega} - C\omega}{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2}, \\ Y &= \sqrt{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2}, \quad G = \frac{1}{r}, \quad B = \frac{1}{L\omega} - C\omega \end{aligned} \right\} \quad (34.34)$$

puterile sînt :

$$P = GU^2 = \frac{U^2}{r}, \quad Q = BU^2 = \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right) U^2, \quad S = UI = U^2 \sqrt{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2} \quad (34.35)$$

Se verifică ușor cum din acest circuit, particularizînd valorile parametrilor, se pot obține relațiile caracteristice ale elementelor de circuit, respectiv ale unor circuite cu două elemente în derivație, din tabela 33.1 (par. 33.3.5).

34.2. Reprezentări analitice (în complex)

În reprezentarea geometrică se folosește proprietatea funcțiilor sinusoidale de timp de a putea fi puse în corespondență biunivocă cu vectorii liberi din plan. Dar, așa cum se știe din algebra numerelor complexe, fiecărui număr complex îi corespunde biunivoc un punct din planul complex (afixul numărului) — și deci îi corespunde și vectorul de poziție al acelui punct. Rezultă că identificînd planul abstract al reprezentărilor geometrice cu planul complex, stabilim o corespondență biunivocă între mulțimea funcțiilor sinusoidale și mulțimea numerelor complexe. Se obțin astfel reprezentările analitice — sau în complex — ale mărimilor sinusoidale :

$$i = I \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma) \iff \mathcal{C}(i), \quad (34.36)$$

în care fiecărei funcțiuni sinusoidale de timp i îi corespunde o mărime complexă $\mathcal{C}(i)$ ¹, susceptibilă de a face obiectul unui calcul mai simplu și mai sistematic decît cel efectuat cu mărimi sinusoidale. După cum planul complex a fost identificat cu planul reprezentării cinematice (cu vectori rotitori) sau cu planul reprezentării polare (cu vectori fiși), se obține o reprezentare în complex nesimplificată (cu mărimi complexe funcțiuni de timp, pentru a avea afixul rotitor în jurul originii) sau o reprezentare în complex simplificată — ultima fiind utilizabilă numai cînd toate mărimile sinusoidale au aceeași frecvență.

¹ Se citește : „reprezentarea în complex a curentului i “.

Numere complexe. Reamintim pe scurt cîteva noțiuni asupra mărimilor complexe, introducînd totodată unele notații folosite în electrotehnică.

Numerele complexe (sau mărimile complexe) sînt expresii de forma :

$$\underline{c} = a + jb, \text{ cu } j = \sqrt{-1}^1, \quad (34.37)$$

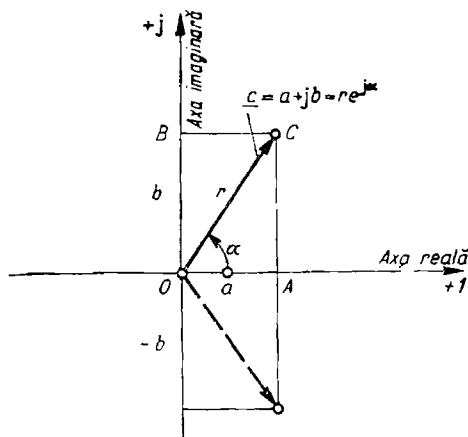


Fig. 34.14.

în care a este un număr real, numit *partea reală* a numărului complex, iar b este tot un număr real, numit *partea imaginară* a numărului complex. Se scrie :

$$a = \operatorname{Re} \{ \underline{c} \}, \quad b = \operatorname{Im} \{ \underline{c} \}. \quad (34.38)$$

În conformitate cu recomandările C.E.I., în studiul regimului permanent, vom nota *prin subliniere* mărimile din electrotehnică, care sînt numere complexe. Adesea nu se folosește nici o notație specială — ca în matematici — sau se folosesc literele barate deasupra (adică, simbolul folosit ades pentru mărimile electromagnetice vectoriale).

Numerele complexe se pot scrie și sub forma *exponențială*, respectiv *trigonometrică* (folosind formula lui Euler) :

$$\underline{c} = re^{j\alpha} = r \cos \alpha + jr \sin \alpha^2, \quad (34.39)$$

în care r e un număr real și pozitiv (sau nul, pentru numărul complex zero), numit *modulul* numărului complex $\underline{c}$

$$r = |\underline{c}| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0, \quad (34.40)$$

iar $\alpha = \arg \{ \underline{c} \} \geq 0$ e un număr real, numit *argumentul* numărului complex $\underline{c}$, dat de relațiile :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}; \quad \sin \alpha = \frac{b}{r}; \quad \cos \alpha = \frac{a}{r}, \quad (34.41)$$

astfel că

$$a = r \cos \alpha, \quad b = r \sin \alpha. \quad (34.41')$$

Numerele complexe se pot reprezenta grafic, biunivoc, prin punctele unui plan abstract, numit planul complex sau planul lui Gauss, într-un sistem de coordonate carteziene. Punctul C asociat numărului complex $\underline{c}$ se numește *afixul* lui $\underline{c}$ și are abscisa egală cu partea reală a , iar ordonata egală cu partea imaginară b (fig. 34.14). Rezultă :

$$OA = a, \quad OB = b, \quad OC = r, \quad \angle COA = \alpha. \quad (34.42)$$

În acest plan, axa absciselor se numește *axa reală* și sensul ei pozitiv se indică, de obicei, prin simbolul $+1$ al unității reale; axa ordonatelor se numește *axa imaginară*, iar sensul ei pozitiv se indică, de obicei, prin simbolul $+j$ al unității imaginare. Prin această corespon-

¹ În electrotehnică, unitatea imaginară $\sqrt{-1}$ se notează cu simbolul j , pentru a evita confuzii cu simbolul i al curentului.

² Această egalitate (formula lui Euler) trebuie utilizată numai cu unghiul α exprimat în radiani

dență se asociază totodată biunivoc fiecărui număr complex $\underline{c}$ un vector liber în planul complex: vectorul de poziție $\vec{OC}$ al afixului C al acestui număr. Acesta e vectorul reprezentativ al numărului $\underline{c}$. În exprimarea curentă, numărul complex, afixul său și vectorul său reprezentativ se numesc și se simbolizează la fel: numărul complex $\underline{c}$.

Se numește *operator de rotație* cu unghiul θ un număr complex de modul unitate și de argument θ :

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta. \quad (34.43)$$

Exemple de operatori de rotație sînt:

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}} \quad j^2 = -1 = e^{\pm j\pi} \quad j^3 = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad (34.44)$$

Numărul complex *zero* are atât partea reală cît și partea imaginară nule, respectiv modulul nul și argumentul nedeterminat. Se notează cu simbolul obișnuit pentru cifra zero (fără subliniere) și corespunde originii O a planului complex.

Numărul complex $\underline{c}^* = a - jb = re^{-ja}$ (v. fig. 34.14) se numește *conjugatul* numărului complex $\underline{c} = a + jb = re^{ja}$.

Operații elementare cu numere complexe. Anularea: Un număr complex (respectiv o expresie formată după regulile de calcul cu astfel de numere) se anulează anulîndu-i modulul, respectiv și partea reală și partea imaginară:

$$\underline{c} = 0 \rightarrow r = |\underline{c}| = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad (34.45)$$

Egalarea: Două numere complexe sînt egale dacă au părțile reale egale și părțile imaginare egale, respectiv modulele egale și argumentele egale (sau diferite cu un multiplu întreg, n , de 2π):

$$\underline{c}_1 = \underline{c}_2 \rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \alpha_1 = \alpha_2 + 2\pi n. \end{cases} \quad (34.46)$$

Orice egalitate între numere complexe (respectiv între expresii formate după regulile de calcul cu astfel de numere) furnizează două egalități între numere (expresii) reale.

Adunarea (scăderea): Numerele complexe se adună (se scad) dacă li se adună (scad) părțile reale separat și părțile imaginare separat:

$$(a_1 + jb_1) \pm (a_2 + jb_2) = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2). \quad (34.47)$$

În reprezentarea grafică se face adunarea (scăderea) vectorială a vectorilor reprezentativi.

Observație: Suma dintre un număr complex și conjugatul lui e egală cu dublul părții lui reale; iar diferența dintre un număr complex și conjugatul lui e egală cu dublul părții lui imaginare:

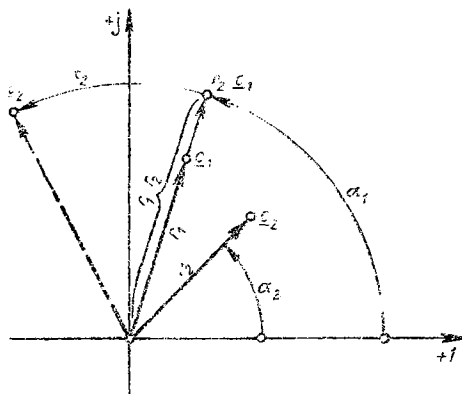
$$\underline{c} + \underline{c}^* = 2\operatorname{Re}\{\underline{c}\} = 2a, \quad \underline{c} - \underline{c}^* = 2j\operatorname{Im}\{\underline{c}\} = 2jb. \quad (34.48)$$

Înmulțirea (împărțirea): Numerele complexe se înmulțesc (se împart) dacă li se înmulțesc (împart) modulele și li se adună (scad) argumentele:

$$\underline{c}_1 \underline{c}_2 = r_1 r_2 e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (34.49)$$

$$\frac{\underline{c}_1}{\underline{c}_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)} \quad (34.50)$$

Modulul produsului (cîtelui) este, deci, egal cu produsul (cîtel) modulelor, iar argumentul produsului (cîtelui) este egal cu suma (diferența) argumentelor. În reprezentarea grafică: vectorul reprezentativ al produsului se obține (fig. 34.15, a) din vectorul unuia dintre factori (c_1), amplificîndu-l cu modulul celuilalt (r_2) și rotindu-l cu argumentul acestuia (în sens direct dacă $\alpha_2 > 0$



și în sens invers dacă $\alpha_2 < 0$); vectorul reprezentativ al cîtelui se obține (fig. 34.15, b) din vectorul reprezentativ al numărătorului (c_1), amplificîndu-l cu valoarea reciprocă a modulului numitorului ($\frac{1}{r_1}$) și rotindu-l apoi cu argumentul acestuia în sens opus (în sens invers dacă $\alpha_2 > 0$ și în sens direct dacă $\alpha_2 < 0$).

Cazuri particulare: înmulțirea unui număr complex cu un factor real înseamnă amplificarea vectorului reprezentativ cu acel factor real; înmulțirea unui număr complex cu un operator de rotație (34.43) înseamnă rotirea vectorului reprezentativ cu argumentul θ al aceluși operator:

$$c e^{j\theta} = r e^{j\alpha} e^{j\theta} = r e^{j(\alpha+\theta)}. \quad (34.51)$$

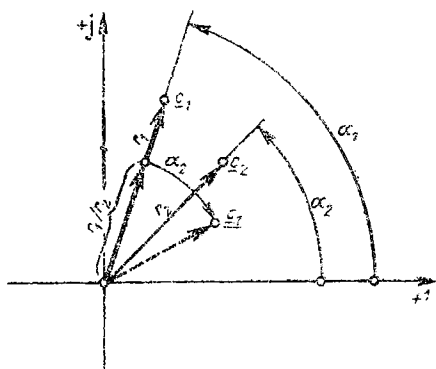


Fig. 34.15.

Înmulțirea cu $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ înseamnă rotirea cu $\pi/2$ în sens direct, iar împărțirea cu j ,

adică înmulțirea cu $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$ înseamnă rotirea cu $\pi/2$ în sens invers. Aceste două reguli vor fi foarte mult utilizate în studiul circuitelor cu metoda reprezentării în complex. Înmulțirea unui număr complex cu conjugatul său e un număr real: patrulul modulului celui număr

$$= |c|^2 = r^2. \quad (34.52)$$

34.2.1. Reprezentarea în complex (nesimplificat). În reprezentarea în complex nesimplificat, imaginea în complex a mărimii sinusoidale

i e o funcțiune complexă de timp, avînd modulul constant și egal cu amplitudinea mărimii sinusoidale și argumentul egal cu faza mărimii sinusoidale:

$$i = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma) \iff I\sqrt{2} e^{j(\omega t + \gamma)}. \quad (34.53)$$

Această imagine se mai numește *reprezentarea în complex nesimplificată* a lui i sau *valoarea instantanee complexă* a lui i . În acord cu ultima denumire, mai sugestivă, vom nota această imagine cu simbolul grafic subliniat al valorii instantanee a mărimii sinusoidale:

$$\underline{\mathcal{C}(i)} = I\sqrt{2} e^{j(\omega t + \gamma)} = \underline{i}. \quad (34.54)$$

(În literatură se mai folosește notația $\dot{I}$ sau $\mathbf{I}$).

În mod analog, imaginea în complex a tensiunii $\underline{u}$ este :

$$u = U\sqrt{2} \sin (\omega t + \beta) \iff \underline{u} = U\sqrt{2} e^{j(\omega t + \beta)} \quad (34.55)$$

Proprietăți : a) Din formula lui Euler (34.39) aplicată reprezentării în complex :

$$\underline{i} = I\sqrt{2} e^{j(\omega t + \gamma)} = I\sqrt{2} \cos (\omega t + \gamma) + jI\sqrt{2} \sin (\omega t + \gamma), \quad (34.56)$$

rezultă că *partea imaginară a reprezentării în complex nesimplificată este egală cu valoarea instantanee a mărimii :*

$$i(t) = \text{Im} \{ \underline{i} \} = \text{Im} \{ I\sqrt{2} e^{j(\omega t + \gamma)} \}. \quad (34.57)$$

Aceasta e regula, deosebit de simplă, a trecerii inverse de la imagine la mărimea sinusoidală.

b) Se poate da o expresie analitică și trecerii directe de la mărimea instantanee la reprezentarea ei, observînd că deoarece $\omega T = 2\pi$, avem :

$$I\sqrt{2} \cos (\omega t + \gamma) = I\sqrt{2} \sin \left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2} \right) = I\sqrt{2} \sin \left(\omega \left(t + \frac{T}{4} \right) + \gamma \right),$$

adică

$$I\sqrt{2} \cos (\omega t + \gamma) = i \left(t + \frac{T}{4} \right). \quad (34.58)$$

Cu această observație relația (34.56) se scrie :

$$\underline{i} = i \left(t + \frac{T}{4} \right) + ji(t). \quad (34.59)$$

Aceasta este *expresia analitică a regulii de reprezentare directe.*

c) Dacă s-ar folosi pentru mărimi sinusoidale forma normală în cosinus (33.13), reprezentarea în complex ar fi tot (34.54), și toate proprietățile metodei ar rămîne neschimbate, cu excepția regulilor de reprezentare, care ar fi :

— trecerea directă :

$$\underline{i} = i(t) + ji \left(t - \frac{T}{4} \right) \quad (34.60)$$

— trecerea inversă

$$i(t) = I\sqrt{2} \cos (\omega t + \gamma) = \text{Re} \{ \underline{i} \}. \quad (34.61)$$

Pentru toate mărimile sinusoidale care intervin în aceeași problemă trebuie să se utilizeze o singură regulă pentru trecerea directă și inversă, adică o singură formă normală : fie în sinus, fie în cosinus.

d) Comparînd regula de reprezentare în complex (34.13) cu regula reprezentării cinematice (34.2), se constată imediat că, identificînd planul fazorilor cu planul complex, fazorul corespunzător mărimii $i(t)$ este vectorul reprezentativ al imaginii complexe $\underline{i}$. Axa de referință e acum axa reală, iar axa transversală e axa imaginară. De aceea, în aplicații se folosește calculul în complex al circuitelor în paralel cu reprezentare geometrică (care ilustrează mai sugestiv relațiile de fază), iar în diagrame, factorii sînt notați cu simbolurile reprezentărilor în complex.

e) Defazajul $\varphi_{12} = \gamma_1 - \gamma_2$ dintre mărimea sinusoidală $i_1 = I_1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma_1)$ și mărimea sinusoidală $i_2 = I_2 \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma_2)$ e egal cu diferența argumentelor imaginilor lor în complex, adică cu argumentul cîtului lor :

$$\varphi_{12} = \gamma_1 - \gamma_2 = \arg \left\{ \frac{\underline{i}_1}{\underline{i}_2} \right\}. \quad (34.62)$$

Corespondența operațiilor se stabilește fără dificultăți :

1. *Adunarea mărimilor sinusoidale corespunde biunivoc adunării imaginilor lor în complex :*

$$i_1 + i_2 \Longleftrightarrow \underline{i}_1 + \underline{i}_2, \quad (34.63)$$

adică

$$\mathcal{C}(i_1 + i_2) = \mathcal{C}(i_1) + \mathcal{C}(i_2). \quad (34.63')$$

Această proprietate e evidentă în virtutea corespondenței pe care am stabilit-o cu reprezentarea cinematică. Analitic ea rezultă din relația (34.57), știind că partea imaginară a unei sume e suma părților imaginare ale termenilor sumei.

2. *Amplificarea unei mărimi sinusoidale cu un scalar real corespunde biunivoc cu înmulțirea imaginii cu același scalar real :*

$$\lambda i \Longleftrightarrow \lambda \underline{i}, \quad (\lambda \geq 0), \quad (34.64)$$

adică

$$\mathcal{C}(\lambda i) = \lambda \mathcal{C}(i). \quad (34.64')$$

Și această proprietate e evidentă și asigură împreună cu relația (34.63) liniaritatea reprezentării în complex.

3. *Derivarea unei mărimi sinusoidale în raport cu timpul se traduce prin înmulțirea imaginii ei în complex cu numărul imaginar $j\omega$*

$$\frac{di}{dt} \Longleftrightarrow j\omega \underline{i}, \quad (34.65)$$

adică

$$\mathcal{C}\left(\frac{di}{dt}\right) = j\omega \mathcal{C}(i). \quad (34.65')$$

În adevăr :

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \omega I \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}\right) \Longleftrightarrow \omega I \sqrt{2} e^{j\left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}\right)} \\ \frac{di}{dt} &\Longleftrightarrow \omega I \sqrt{2} e^{j(\omega t + \gamma)} e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega I \sqrt{2} e^{j(\omega t + \gamma)} = j\omega \underline{i}. \end{aligned}$$

Se observă totodată că, deoarece $\underline{i}$ este în această reprezentare funcțiune de timp, se obține

$$\frac{d\underline{i}}{dt} = \frac{d}{dt} (I \sqrt{2} e^{j(\omega t + \gamma)}) = j\omega I \sqrt{2} e^{j(\omega t + \gamma)} = j\omega \underline{i},$$

adică reprezentarea derivatei este derivata reprezentării :

$$\frac{di}{dt} \Longleftrightarrow \frac{d\underline{i}}{dt} = \mathcal{C}\left(\frac{di}{dt}\right). \quad (34.66)$$

4. Integrarea în timp a unei mărimi sinusoidale se traduce prin împărțirea imaginii ei în complex cu numărul imaginar $j\omega$

$$\int idt \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega} i, \quad (34.67)$$

adică :

$$\mathcal{C}\left(\int idt\right) = \frac{1}{j\omega} \mathcal{C}(i). \quad (34.67')$$

Demonstrația se poate face direct, ca pentru proprietatea precedentă, sau indirect, observînd că din relația (34.65) rezultă :

$$\mathcal{C}(i) = \mathcal{C}\left(\frac{d}{dt}\left(\int idt\right)\right) = j\omega \mathcal{C}\left(\int idt\right).$$

Se demonstrează analog cu (34.66) relația :

$$\int idt \longleftrightarrow \int \underline{i} dt = \mathcal{C}\left(\int idt\right). \quad (34.68)$$

adică reprezentarea integralei e integrala reprezentării.

Observație Dacă am calcula produsul a două mărimi sinusoidale (rel. 33.29) :

$$i_1 i_2 = I_1 I_2 \cos(\gamma_1 - \gamma_2) - I_1 I_2 \cos(2\omega t + \gamma_1 + \gamma_2),$$

precum și produsul imaginilor în complex respective :

$$\underline{i}_1 \underline{i}_2 = 2I_1 I_2 e^{j(\omega t + \gamma_1 + \gamma_2)},$$

a cărui parte imaginară e :

$$\text{Im}\{\underline{i}_1 + \underline{i}_2\} = 2I_1 I_2 \sin(2\omega t + \gamma_1 + \gamma_2) \neq i_1 i_2$$

am constata că produsele de mărimi sinusoidale nu se reprezintă prin produsele imaginilor complexe. Ca și metoda reprezentării geometrice, metoda reprezentării în complex poate fi utilizată numai pentru ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți, în care nu apar produse de funcțiuni de timp.

În studiul în complex al circuitelor prezintă însă interes semisuma produsului dintre imaginea complexă a unei mărimi și conjugata complexă a celeilalte :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \underline{i}_1 \underline{i}_2^* &= \frac{1}{2} I_1 \sqrt{2} e^{j(\omega t + \gamma_1)} \cdot I_2 \sqrt{2} e^{-j(\omega t + \gamma_2)} = \\ &= I_1 I_2 e^{j(\gamma_1 - \gamma_2)} = I_1 I_2 \cos(\gamma_1 - \gamma_2) + j I_1 I_2 \sin(\gamma_1 - \gamma_2), \end{aligned} \quad (34.69)$$

care are următoarele proprietăți remarcabile :

- nu mai depinde de timp;
- depinde numai de valorile efective și de diferența fazelor inițiale, adică nu depinde de alegerea originii timpului;
- arc partea reală egală cu valoarea medie a produsului valorilor instantanee (v. relația 33.29') :

$$\text{Re}\left\{\frac{\underline{i}_1 + \underline{i}_2^*}{2}\right\} = I_1 I_2 \cos(\gamma_1 - \gamma_2) = \widetilde{i_1 i_2} = \frac{1}{T} \int_0^T i_1 i_2 dt. \quad (34.70)$$

Regulile de mai sus, privitoare la traducerea operațiilor elementare efectuate cu mărimile sinusoidale, arată că aceste operații se traduc — fără excepție — prin operații algebrice efectuate cu imaginile în complex ale mărimilor.

Metodele de reprezentare în complex prezintă avantajul principal de a transforma ecuațiile integro-diferențiale liniare cu coeficienți constanți ale circuitelor, satisfăcute de curenții și tensiunile sinusoidale, în ecuații algebrice liniare (de gradul întâi) satisfăcute de imaginile complexe ale acestor curenți și tensiuni¹.

¹ Regula reprezentării analitice poate fi dedusă exclusiv din condiția ca ecuațiile diferențiale liniare ale circuitelor să fie traduse în ecuații algebrice liniare. Pentru aceasta e necesar ca reprezentarea căutată să fie liniară :

$$\mathcal{C}(\lambda i_1 + \lambda i_2) = \lambda_1 \mathcal{C}(i_1) + \lambda_2 \mathcal{C}(i_2),$$

iar derivarea să se traducă prin înmulțirea cu un număr

$$\mathcal{C}\left(\frac{di}{dt}\right) = p\mathcal{C}(i).$$

Din $i = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma)$ rezultă $\frac{d^2 i}{dt^2} = -\omega^2 i$. Aplicând condiția (b) dons,
se obține cu (a) :

$$\mathcal{C}(d^2 i/dt^2) = p\mathcal{C}(di/dt) = p^2 \mathcal{C}(i) = -\omega^2 \mathcal{C}(i),$$

de unde

$$p = \pm j\omega. \quad (c)$$

Ținând seama că

$$i = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma) = I\sqrt{2} \cos \gamma \sin \omega t + \frac{1}{\omega} I\sqrt{2} \sin \gamma \frac{d}{dt}(\sin \omega t)$$

cu (a), (b) și (c) rezultă :

$$\mathcal{C}(i) = I \cos \gamma \mathcal{C}(\sqrt{2} \sin \omega t) + I \sin \gamma \frac{1}{\omega} p \mathcal{C}(\sqrt{2} \sin \omega t) = I \cos \gamma \mathcal{C}(\sqrt{2} \sin \omega t) + j \sin \gamma \mathcal{C}(\sqrt{2} \sin \omega t)$$

$$\boxed{\mathcal{C}(i) = I e^{\pm j\gamma} \mathcal{C}(\sqrt{2} \sin \omega t) = A I e^{\pm j\gamma}} \quad (d)$$

Aceasta e cea mai generală reprezentare analitică a funcțiilor sinusoidale de timp, care asigură transformarea ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți, ale circuitelor, în ecuații algebrice de gradul întâi. Semnul de la exponent se alege +, pentru ca exponentul să fie chiar faza inițială a mărimii. Mărimea :

$$A = \mathcal{C}(\sqrt{2} \sin \omega t)$$

este imaginea celei mai „simple“ mărimi sinusoidale (de valoare efectivă egală cu unu și de fază inițială nulă). Alegerea acestui simbol e arbitrară. În reprezentarea în complex simplificat se alege $A = 1$ și rezultă :

$$\mathcal{C}(i) = I e^{j\gamma} = I. \quad (e)$$

În reprezentarea în complex nesimplificat se alege

$$A = \sqrt{2} e^{j\omega t}$$

și rezultă :

$$\mathcal{C}(i) = I\sqrt{2} e^{j(\omega t + \gamma)} \quad (f)$$

Circuitele electrice liniare de curent alternativ sinusoidal vor fi caracterizate prin sisteme de ecuații algebrice de gradul întâi, ca și circuitele de curent continuu. Aceasta va permite elaborarea teoriei circuitelor de curent alternativ în strinsă analogie cu aceea a circuitelor de curent continuu.

Metoda reprezentării în complex (nesimplificat), pentru rezolvarea circuitelor de curent alternativ, consistă în următoarele:

1. Se scriu ecuațiile integro-diferențiale ale circuitelor (ecuațiile în valori instantanee).

2. Se determină imaginile în complex ale mărimilor sinusoidale, care figurează ca termeni liberi ai acestor ecuații (și care sînt, de obicei, date — de ex. tensiunile) cu regula trecerii directe (34.53...34.55).

3. Se stabilesc imaginile în complex ale ecuațiilor diferențiale, adică ecuațiile algebrice liniare care le corespund (ecuațiile în complex) cu regulile (34.63, 34.64, 34.65, 34.67). Datorită liniarității, corespondența se face termen cu termen, înlocuind derivările în raport cu timpul prin înmulțiri cu $j\omega$ și integrările în timp prin împărțiri cu $j\omega$.

4. Se rezolvă aceste ecuații în raport cu imaginile (valorile instantanee complexe) mărimilor necunoscute (de obicei, curenții).

5. Se determină mărimile sinusoidale necunoscute cu regula trecerii inverse (34.57), adică separînd părțile imaginare ale imaginilor complexe ale lor.

34.2.2. *Aplicație la circuitul serie r, L, C .* Exemplificăm metoda — în forma expusă mai sus — prin rezolvarea (circuitului serie care a mai fost studiat în paragraful 33.2.6 și 34.1.2. Reprezentarea ecuației 34.10) a circuitului se poate prezenta schematic astfel:

$$\left. \begin{array}{l} u = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ u = r i \quad Lj\omega i + \frac{1}{Cj\omega} i \end{array} \right\} \quad (34.71)$$

sau

$$u = (r + j\omega L + 1/j\omega C) i,$$

de unde imaginea complexă a curentului este:

$$i = \frac{u}{r + j(\omega L - 1/\omega C)} = \frac{U \sqrt{2} e^{j(\omega t + \beta)}}{\sqrt{r^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} e^{j \arctg \{(\omega L - 1/\omega C)/r\}}}$$

sau

$$i = \frac{U \sqrt{2}}{\sqrt{r^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} e^{j \left(\omega t + \beta - \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{r} \right)} \quad (34.72)$$

Aceasta este imaginea complexă nesimplificată (valoarea instantanee complexă) a curentului care trebuie determinat și a cărui valoare instantanee se obține separînd partea imaginară a expresiei precedente:

$$i(t) = \frac{U \sqrt{2}}{\sqrt{r^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \sin \left(\omega t + \beta - \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{r} \right). \quad (34.72')$$

Am obținut chiar expresia (33.69), determinată prin calculul direct.

Observații: a) Avantajele acestei metode sînt și mai evidente la circuite complicate, la care se obțin sisteme de ecuații diferențiale și deci, cu ajutorul reprezentării în complex, sisteme de ecuații algebrice. Explicitarea formală a necunoscutelor e la fel de simplă ca și în cazul circuitelor de curent continuu (regula lui Kramer pentru sisteme de ecuații liniare), deși calculele sînt mai lungi, din cauză că se operează cu numere complexe. O dată scris ecuațiile în complex, rezolvarea e o chestiune de calcul algebric, care se desfășoară „mecanic”, fără să fie necesare raționamente suplimentare.

b) Metoda e avantajoasă nu numai pentru rezolvarea propriu-zisă a circuitelor (determinarea curenților cînd se dau tensiunile etc.) ci și pentru studii teoretice, deoarece sistemele de ecuații în complex permit studiul sistematic al circuitelor sub această formă. Întreaga teorie modernă a circuitelor de curent alternativ este elaborată astăzi cu reprezentarea în complex (v. și cap. 36, 37, 38, 39 etc.).

c) Dacă se scriu explicit (sub formă exponențială) toate imaginile complexe din ecuații — cînd toate mărimile sinusoidale au aceeași frecvență —, se constată că toți termenii acestor ecuații (care sînt liniare și omogene în raport cu aceste imagini) au un același factor comun $\sqrt{2} e^{j\omega t}$. Acest factor poate fi simplificat de la început, fără ca restul calculului să fie afectat. Ecuația (34.71), de exemplu, se poate scrie:

$$U \sqrt{2} e^{j(\omega t + \beta)} = rI \sqrt{2} e^{j(\omega t + \gamma)} + j\omega LI \sqrt{2} e^{j(\omega t + \gamma)} + \frac{1}{j\omega C} I \sqrt{2} e^{j(\omega t + \gamma)}$$

sau — după simplificare :

$$U e^{j\beta} = rI e^{j\gamma} + j\omega LI e^{j\gamma} + \frac{1}{j\omega C} I e^{j\gamma}, \quad (34.73)$$

de unde rezultă direct necunoscutele I și γ necesare scrierii valorii instantanee (34.72), dacă frecvența e cunoscută.

De aceea, în aplicații, metoda reprezentării în complex se simplifică, adoptînd ca simbol al mărimii sinusoidale i raportul $i/\sqrt{2} e^{j\omega t}$. Noul simbol nu mai e o funcțiune de timp, ci un număr complex constant. Se obține astfel o altă formă a reprezentării analitice, pe care o prezentăm în continuare și care e utilizabilă numai atunci cînd toate mărimile sinusoidale au aceeași frecvență.

34.2.3. Reprezentarea în complex simplificat. În reprezentarea în complex simplificat, imaginea în complex a mărimii sinusoidale i e un număr complex constant, avînd modulul egal cu valoarea efectivă a mărimii și argumentul egal cu faza inițială a mărimii :

$$i = I \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma) \iff I e^{j\gamma}. \quad (34.74)$$

Acastă imagine se mai numește *reprezentarea în complex simplificată* a lui i sau *valoarea efectivă complexă*¹ a lui i și se notează cu simbolul majuscul, subliniat, al lui i :

$$\mathcal{C}(i) = I e^{j\gamma} = \underline{I} \quad (34.75)$$

(În literatură se mai folosește simbolul $\bar{I}$ sau $\mathbf{I}$, sau chiar I — în acest ultim caz rămînînd ca valoarea efectivă să se noteze $|I|$). În mod analog, imaginea în complex a tensiunii u este :

$$u = U \sqrt{2} \sin(\omega t + \beta) \iff U e^{j\beta} = \underline{U}. \quad (34.76)$$

¹ Dacă se operează cu amplitudinile mărimilor sinusoidale și nu cu valorile lor efective, adică dacă se scrie $i = I \sin(\omega t + \gamma)$ — unde I e acum amplitudinea —, imaginea în complex e $\underline{I} = I e^{j\gamma}$ și se numește *amplitudine complexă*.

În exprimarea curentă se spune concis curentul complex (în loc de imaginea în complex a curentului) și tensiunea complexă (în loc de imaginea în complex a tensiunii).

O b s e r v a Ț i e În reprezentarea în complex simplificat, mărimile sinusoidale origine de fază ($\gamma = 0$) au imagini reale.

În această reprezentare, regula trecerii directe se poate exprima analitic sub forma :

$$\underline{I} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\omega t} \left[i \left(t + \frac{T}{4} \right) + j i(t) \right], \quad (34.77)$$

iar regula trecerii inverse sub forma :

$$i(t) = \text{Im} \{ \sqrt{2} e^{j\omega t} \underline{I} \}. \quad (34.78)$$

Deoarece reprezentarea simplificată se obține prin suprimarea unui factor comun parazit din toate relațiile în complex, care sînt liniare și omogene în raport cu imaginile complexe, toate proprietățile reprezentării în complex nesimplificate, corespunzătoare unor astfel de relații, rămîn valabile. Defaza-jele rămîn egale cu argumentele rapoartelor imaginilor complexe respective :

$$\gamma_1 - \gamma_2 = \varphi_{12} = \arg \left\{ \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \right\}. \quad (34.79)$$

și, în particular, defazajul dintre tensiune și curent c :

$$\beta - \gamma = \varphi = \arg \left\{ \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \right\} \quad (34.80)$$

Transpunerile operațiilor se fac după regulile stabilite :

1. *Suma a două mărimi sinusoidale se reprezintă prin suma imaginilor în complex corespunzătoare :*

$$i_1 + i_2 \Longleftrightarrow \underline{I}_1 + \underline{I}_2. \quad (34.81)$$

2. *Amplificarea cu un scalar real a mărimii sinusoidale se reprezintă prin amplificarea cu același scalar a imaginii în complex a mărimii :*

$$\lambda i \Longleftrightarrow \lambda \underline{I}. \quad (34.82)$$

3. *Derivarea unei mărimi sinusoidale în raport cu timpul se traduce prin înmulțirea imaginii ei în complex cu numărul imaginar $j\omega$:*

$$\frac{di}{dt} \Longleftrightarrow j\omega \underline{I}. \quad (34.83)$$

De astă dată, relația (34.66) nu mai e valabilă, adică imaginea derivatei nu e derivata imaginii (care nu mai e funcțiune de timp).

4. *Integrarea în timp a unei mărimi sinusoidale se traduce prin împărțirea imaginii ei în complex cu numărul imaginar $j\omega$:*

$$\int i dt \Longleftrightarrow \frac{1}{j\omega} \underline{I}. \quad (34.84)$$

De astă dată, relația (34.68) nu mai e valabilă, adică imaginea integralei nu mai este integrala imaginii (care nu mai e funcțiune de timp).

Observație: Înmulțirii sau împărțirii a două mărimi sinusoidale nu le corespund înmulțirea sau împărțirea imaginilor lor complexe. Reprezentarea e aplicabilă numai la operații liniare.

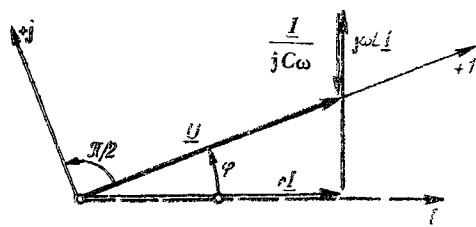


Fig. 34.16.

Metoda reprezentării în complex (simplificat) cuprinde aceleași etape ca și metoda reprezentării nesimplificate, cu diferența că trecerea directă (determinarea imaginii în complex a unei mărimi sinusoidale) se face acum cu regula (34.74); iar trecerea inversă (determinarea mărimii sinusoidale corespunzătoare unei anumite imagini în complex) se face cu regula (34.78).

Calculul e însoțit de obicei de diagrama vectorială întocmită în planul complex în care axa reală e axă origine de fază — și ades nici nu se figurează, în care fazorii sînt notați cu simbolurile (34.75) ale imaginilor în complex.

Construcția însăși a diagramei vectoriale se urmărește pe baza indicațiilor cuprinse în ecuațiile în complex, știind că înmulțirea cu j înseamnă rotirea în sens direct cu $\frac{\pi}{2}$, iar împărțirea cu j înseamnă rotirea în sens invers cu $\frac{\pi}{2}$.

Exemplu: Corespondența (34.71) a ecuațiilor în instantanen și în complex ale circuitului serie r, L, C este în acest caz:

$$u = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt$$

$$\underline{U} = r \underline{I} + j\omega L \underline{I} + \frac{1}{j\omega C} \underline{I}. \quad (34.85)$$

iar diagrama vectorială din figura 34.11 se notează că în figura 34.16, dacă se alege tensiunea ca origine de fază. Nici în cazul acesta nu prezintă utilitate să impunem axei reale o anumită direcție (de ex. cea orizontală de la stînga la dreapta).

Reprezentarea în complex se utilizează însă — așa cum am spus — la studiul sistematic al circuitelor electrice, împreună cu metode specifice de scriere directă a ecuațiilor în complex și de rezolvare a acestor ecuații. Pentru aceasta e necesară stabilirea mijloacelor de caracterizare a circuitelor cu mărimi complexe.

34.3. Caracterizarea în complex a circuitelor liniare.

Fie un circuit electric dipolar receptor, liniar și pasiv, ale cărui laturi interioare nu sînt cuplate magnetic cu exteriorul, la care se aplică tensiunea la borne sinusoidală, luată după regula de la receptoare:

$$u = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \beta) \rightleftharpoons \underline{U} = Ue^{j\beta}. \quad (34.86)$$

Dipolul absoarbe curentul de regim permanent :

$$i = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma) \iff \underline{I} = Ie^{j\gamma}. \quad (34.87)$$

Observație : În cazul studiului în complex al circuitelor se obișnuiește ca în schemele acestora să se treacă direct simbolurile imaginilor în complex ale mărimilor (v. fig. 34.17), în locul simbolurilor valorilor instantanee.

Caracterizarea acestui circuit în curent alternativ se face cu ajutorul parametrilor reali, definiți în paragraful 33.3 (impedanța, defazajul, rezistența, reactanța, admitanța, conductanța, susceptanța), iar caracterizarea regimului său energetic se face cu ajutorul puterilor reale, definite în paragraful 33.4 (puterea activă, puterea reactivă, puterea aparentă). Metoda reprezentării în complex se dovedește însă deosebit de eficace și în prezentarea unitară și concisă a proprietăților circuitelor electrice. Vom arăta în cele ce urmează că se pot defini parametri complecși (impedanța complexă, admitanța complexă) și o putere complexă, susceptibili de a asigura o caracterizare completă a circuitelor și din care se deduc imediat parametrii reali și puterile reale.

34.3.1. Impedanța complexă. Raportul dintre tensiunea complexă aplicată la bornele unui dipol liniar și pasiv și curentul complex corespunzător nu depinde decât de parametrii elementelor de circuit și de frecvență. Acest raport definește o mărime caracteristică dipolului, numită *impedanță complexă*

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{U}{I} \quad = \Phi(\omega; r, L, C, \dots) \quad (34.88)$$

În adevăr, înlocuind în această relație expresiile imaginilor complexe (care pot fi nesimplificate sau simplificate) se obține :

$$\begin{aligned} \underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} &= \frac{U\sqrt{2} e^{j(\omega t + \beta)}}{I\sqrt{2} e^{j(\omega t + \gamma)}} = \frac{Ue^{j\beta}}{Ie^{j\gamma}} = \frac{U}{I} = \frac{U}{I} e^{j(\beta - \gamma)} = \\ &= \frac{U}{I} \cdot \cos(\beta - \gamma) \quad j \frac{U}{I} \sin(\beta - \gamma). \end{aligned}$$

Dar $\frac{U}{I} = Z$ e *impedanța (reală)*, iar $\beta - \gamma = \varphi$ e *defazajul*, care, așa cum știm din relațiile (33.73) și (33.74), caracterizează circuitul la o frecvență dată. Impedanța complexă nu depinde deci de mărimile $\underline{U}$ și $\underline{I}$, prin care a fost definită,

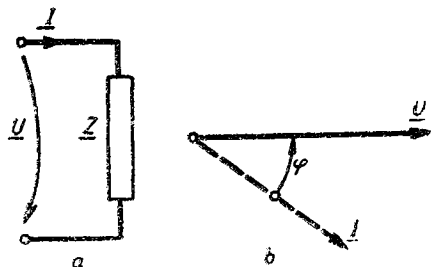


Fig. 34.17.

ei numai de dipolul pe care îl caracterizează. Ținând seama de aceste relații și de relațiile (33.78) și (33.79), rezultă :

$$\underline{Z} = Z e^{j\varphi} = R + jX \quad (34.89)$$

Impedanța complexă are modulul egal cu impedanța circuitului, argumentul egal cu defazajul circuitului, partea reală egală cu rezistența circuitului și partea imaginară egală cu reactanța circuitului :

$$Z = |\underline{Z}|, \quad \varphi = \arg \{\underline{Z}\}, \quad R = \operatorname{Re} \{\underline{Z}\}, \quad X = \operatorname{Im} \{\underline{Z}\}. \quad (34.90)$$

Valoarea impedanței complexe $\underline{Z}$ permite o caracterizare completă a circuitului dipolar considerat, la frecvența dată, deoarece permite deducerea tuturor parametrilor reali ai circuitului. Calculul curentului se face imediat cu relația :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U e^{j\beta}}{Z e^{j\varphi}} = \frac{U}{Z} e^{j(\beta - \varphi)}, \quad (34.91)$$

iar

$$i(t) = \operatorname{Im} \left\{ \sqrt{2} \underline{I} e^{j\omega t} \right\}. \quad (34.91')$$

Ca orice numere complexe, impedanțele complexe se pot reprezenta într-un plan complex „al impedanțelor“ (planul Z), în care afișul corespunzător se găsește totdeauna în semiplanul drept (inclusiv axa imaginară), deoarece :

$$\operatorname{Re} \{\underline{Z}\} = Z \cos \varphi = R \geq 0.$$

În figura 34.18, *a* sînt reprezentate impedanțele unui circuit inductiv ($\underline{Z}$), pur inductiv ($\underline{Z}_1$), capacitiv ($\underline{Z}_2$), pur capacitiv ($\underline{Z}_3$) și rezistiv ($\underline{Z}_4$).

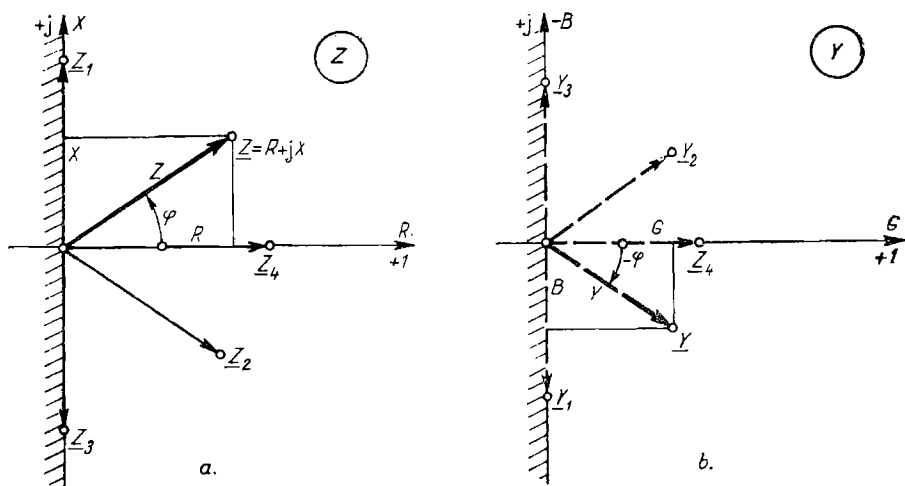


Fig. 34.18.

Observație: Impedanța complexă nu este o reprezentare în complex a raportului valorilor instantanee ale tensiunii și curentului (raport care — de altfel — nu e o mărime sinusoidală), sau a oricărei alte mărimi instantanee. De aceea, uneori se folosește și o notație diferită de cele folosite pentru imaginile complexe. Ea este un parametru complex, caracteristic circuitului, care acționează în ecuațiile în complex ale circuitului ca un operator de înmulțire.

34.3.2. Admitanța complexă. Raportul dintre curentul complex și tensiunea complexă aplicată la bornele unui dipol liniar și pasiv definește o mărime egală cu valoarea reciprocă a impedanței complexe și numită *admitanță complexă*:

$$\underline{Y} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{I}{I} = \frac{1}{\underline{Z}} = \Psi(\omega; r, L, C, \dots) \quad (34.92)$$

Și admitanța complexă depinde numai de structura dipolului și de frecvență, fiind o caracteristică a acestui dipol. Înlocuind expresiile imaginilor complexe ale curentului și tensiunii, se obține:

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \frac{I \sqrt{2} e^{j(\omega t + \gamma)}}{U \sqrt{2} e^{j(\omega t + \beta)}} = \frac{I e^{j\gamma}}{U e^{j\beta}} = \frac{I}{U} e^{-j(\beta - \gamma)} = \\ &= \frac{I}{U} \cos(\beta - \gamma) - j \frac{I}{U} \sin(\beta - \gamma). \end{aligned}$$

Cu relațiile (33.74'), (33.82), (33.85) și (33.86) rezultă:

$$\underline{Y} = Y e^{-j\varphi} = G - jB \quad (34.93)$$

Admitanța complexă are modulul egal cu admitanța circuitului, argumentul egal cu defazajul cu semn schimbat, partea reală egală cu conductanța circuitului și partea imaginară egală cu susceptanța circuitului cu semn schimbat:

$$Y = |\underline{Y}|, \quad \varphi = -\arg\{\underline{Y}\}, \quad G = \operatorname{Re}\{\underline{Y}\}, \quad B = -\operatorname{Im}\{\underline{Y}\}. \quad (34.94)$$

Valoarea admitanței complexe $\underline{Y}$ permite o caracterizare completă a circuitului dipolar considerat la frecvența dată, deoarece permite deducerea tuturor parametrilor reali ai circuitului. Calculul curentului se face imediat cu relația:

$$\underline{I} = \underline{Y} \underline{U} = \underline{U} Y e^{-j\varphi} = U Y e^{j(\beta - \gamma)} \quad (34.95)$$

și cu $i(t)$ dat de relația (34.91').

Ca orice numere complexe, admitanțele complexe se pot reprezenta într-un plan complex „al admitanțelor” (planul $\underline{Y}$), în care axul corespunzător se găsește totdeauna în semiplanul drept (inclusiv axa imaginară), deoarece

$$\operatorname{Re}\{\underline{Y}\} = Y \cos \varphi = G \geq 0.$$

În figura 34.18, b sînt reprezentate impedanțele unui circuit inductiv ($\underline{Y}$), pur inductiv ($\underline{Y}_1$), capacitiv ($\underline{Y}_2$), pur capacitiv ($\underline{Y}_3$) și rezistiv ($\underline{Y}_4$).

¹ Dacă susceptanța defini prin relația $B' = -Y \quad \varphi$, atunci am avea $\underline{Y} = G + jB'$.

Observație Admitanța complexă nu este o reprezentare în complex a cîtului valorilor instantanee ale curentului și tensiunii sau a oricărei alte mărimi instantanee. Ea este un parametru complex, caracteristic circuitului, care acționează în ecuații ca operator de înmulțire.

34.3.3. Puterea complexă. După ce am studiat reprezentarea în complex a operațiilor elementare (par. 34.2.1), am arătat că produsul a două mărimi instantanee nu e o mărime sinusoidală și nu se poate reprezenta în complex. De aceea, nici puterea instantanee p la bornele unui dipol (generator sau receptor) (v. par. 33.4.1).

$$p = ui = UI \cos \varphi - UI \cos (2\omega t + \gamma + \beta) \quad (34.96)$$

nu se poate reprezenta în complex după regulile reprezentării stabilite pentru mărimi sinusoidale.

Se poate defini însă o mărime complexă, care să strîngă în aceeași expresie puterea activă, puterea reactivă și puterea aparentă, utilizate pentru caracterizarea regimului permanent al circuitelor (v. par. 33.4), folosind proprietatea exprimată de relațiile (34.69), (34.70).

Se numește *putere complexă* (uneori *putere aparentă complexă*) mărimea $\underline{S}$ definită de produsul dintre tensiunea complexă și valoarea conjugată a curentului complex în reprezentare simplificată (sau cu semi-suma acestui produs, în reprezentarea nesimplificată):

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* = \frac{1}{2} \underline{u} \underline{i}^*. \quad (34.97)$$

Înlocuind expresiile explicite ale imaginilor complexe, se verifică ultima egalitate și se separă partea reală, partea imaginară, modulul și argumentul acestei mărimi:

$$\frac{1}{2} \underline{u} \underline{i}^* = \frac{1}{2} U \sqrt{2} e^{j(\omega t + \beta)} \cdot I \sqrt{2} e^{-j(\omega t + \gamma)} = U e^{j\beta} I e^{-j\gamma} = \underline{U} \underline{I}^*$$

$$\underline{U} \underline{I}^* = UI e^{j(\beta - \gamma)} = UI \cos (\beta - \gamma) + j UI \sin (\beta - \gamma).$$

Ținînd seama de relațiile (33.104), (33.106) și (33.110), rezultă:

$$\underline{S} = S e^{j\varphi} = UI e^{j\varphi} = UI \cos \varphi + j UI \sin \varphi = P + jQ. \quad (34.98)$$

Puterea complexă are modulul egal cu puterea aparentă, argumentul egal cu defazajul circuitului, partea reală egală cu puterea activă (adică valoarea medie a puterii instantanee) și partea imaginară egală cu puterea reactivă:

$$S = |\underline{S}| = UI; \quad \varphi = \arg \{\underline{S}\} \quad (34.99)$$

$$P = \tilde{p} = UI \cos \varphi = \operatorname{Re} \{\underline{S}\}; \quad Q = UI \sin \varphi = \operatorname{Im} \{\underline{S}\}. \quad (34.100)$$

O dată cu P și Q , puterea complexă e primită (ca sens de referință), dacă tensiunea $\underline{U}$ și curentul $\underline{I}$ sînt asociate ca sensuri după regula de la receptoare — și e produsă (ca sens de referință), dacă tensiunea $\underline{U}$ și curentul $\underline{I}$ sînt asociate ca sensuri după regula de la generatoare.

Ca orice număr complex și puterea complexă poate reprezenta într-un plan complex „al puterilor“ (planul S).

La dipoli activi, poziția afixului puterii complexe poate fi oricare în planul puterilor (S , S_1 , S_2 , S_3 în fig. 34.19). În adevăr, la acești dipoli $P \geq 0$ și $Q \geq 0$, în funcție de sensul real al transmisiei puterii și de convenția de asociere a sensurilor de referință ale tensiunii și curentului. De exemplu, S_2 poate fi puterea complexă la bornele unui dipol activ receptor (la care U și I se asociază după regula de la receptoare) când produce putere activă și primește putere reactivă — dar poate fi și puterea complexă la bornele unui dipol activ generator (la care U și I se asociază după regula de la generatoare) când primește putere activă și produce putere reactivă.

La dipoli pasivi, poziția afixului puterii complexe e conținută numai într-un semi-plan, și anume semiplanul drept (dacă se folosește convenția de asociere de la receptoare, așa cum se obișnuiește). În adevăr, la dipoli pasivi receptori $P \geq 0$ și $Q \geq 0$. În figura 34.19, S e puterea complexă primită de un dipol inductiv ($Q > 0$), iar S_1 puterea complexă primită de un dipol capacitiv ($Q < 0$).

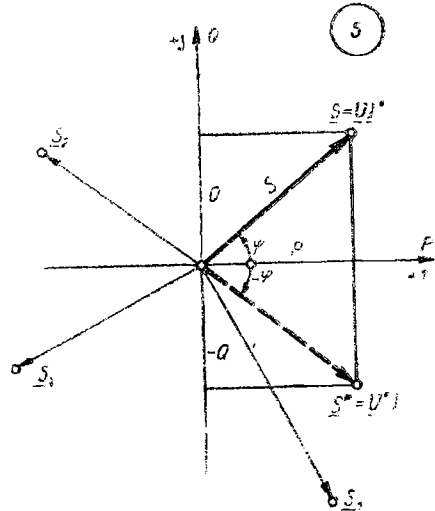


Fig. 34.19.

Puterea complexă primită de un dipol pasiv se mai exprimă folosind impedanța complexă și admitanța complexă:

$$S = \underline{U} \underline{I}^* = \underline{Z} \underline{I}^2 = \underline{Y}^* \underline{U}^2 = (R - jX) \underline{I}^2 = (G + jB) \underline{U}^2. \quad (34.101)$$

Observații: a) Puterea complexă S nu este imaginea în complex a puterii instantanee p , care — așa cum am menționat la începutul paragrafului — nu se poate reprezenta în complex.

b) Se poate opera în locul mărimii S cu mărimea (v. și fig. 34.19):

$$S^* = \underline{U}^* \underline{I} = \underline{U} \underline{I} e^{-j\psi} = UI \cos \varphi - jUI \sin \varphi = P - jQ, \quad (34.102)$$

numită putere complexă conjugată. Se operează cu această putere complexă în special în cazul când conjugata tensiunii complexe se calculează mai ușor decât a curentului complex (de ex. când $\underline{U} \quad \underline{U}^* = U$, deoarece e luat origine de fază).

c) O mărime complexă definită de produsul imaginilor complexe ale tensiunii și curentului (fără ca vreunul din factori să fie conjugat) nu poate caracteriza regimul permanent energetic al circuitului. În adevăr, această mărime:

$$\underline{U} \underline{I} = UI e^{j(\beta + \gamma)} = UI \cos(\beta + \gamma) + j UI \sin(\beta + \gamma)$$

are valori care depind de alegerea arbitrară a originii timpului (prin suma $\beta + \gamma$ a fazelor inițiale). O astfel de mărime nu are nici o semnificație fizică adecvată studiului regimului permanent.

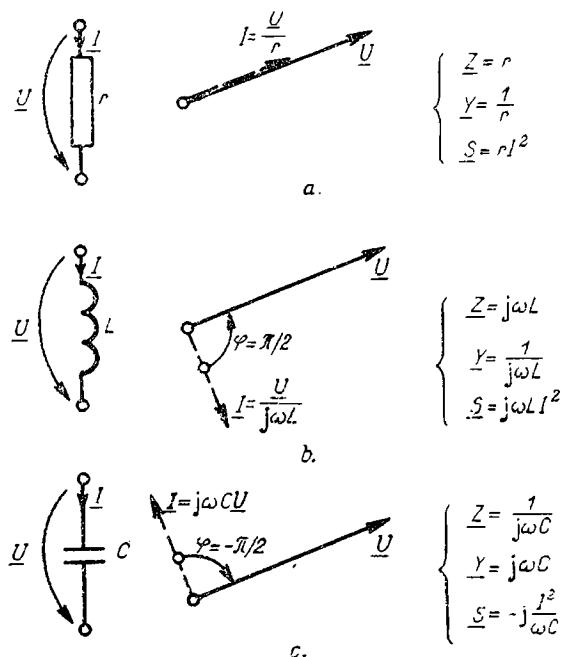


Fig. 34.20.

34.3.4. Caracterizarea elementelor de circuit în complex.

Pentru studiul în complex al circuitelor de curent alternativ este necesar să se cunoască proprietățile și modul de caracterizare al elementelor ideale de circuit r, L, C . Considerăm că li se aplică o tensiune sinusoidală dată (34.86), cu imaginea complexă $\underline{U} = U e^{j\beta}$ și determinăm curentul $\underline{I} = I e^{j\gamma}$, parametrii caracteristici și puterile.

În studiul în complex al circuitelor, pe scheme se figurează simbolurile imaginilor complexe (în locul simbolurilor mărimilor instantanee) alături de săgețile sensurilor de referință — totdeauna necesare pentru scrierea ecuațiilor și interpretarea rezultatelor (v. fig. 34.20).

a) *Rezistorul ideal*, de rezistență r , are ecuația (31.22), reprezentată în complex, utilizând regula amplificării cu un scalar (34.82):

$$u = r i = u_r \Leftrightarrow \underline{U} = \boxed{r \underline{I} = \underline{U}_r}. \quad (34.103)$$

Acasta e expresia în complex a căderii de tensiune rezistive. Rezultă:
— impedanța complexă a rezistorului ideal:

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \boxed{\underline{Z} = r}, \quad (34.104)$$

cu $Z = r, \varphi = 0, R = r, X = 0$.

— admitanța complexă a rezistorului ideal:

$$\frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \boxed{\underline{Y} = \frac{1}{r}}, \quad (34.105)$$

cu $Y = 1/r, G = 1/r, B = 0$.

— puterea complexă a rezistorului ideal:

$$\underline{U} \underline{I}^* = \boxed{\underline{S} = r I^2 = \frac{U^2}{r}} \quad (34.106)$$

cu $P = RI^2 = rI^2 = U^2/r > 0, Q = XI^2 = 0$.

Am regăsit toate valorile scalare determinate cu metoda reprezentării geometrice (34.21...34.23).

b) *Bobina ideală* de inductivitate L are ecuația (31.26), reprezentată în complex, utilizând regula derivării (34.83) și a amplificării cu un scalar (34.82) :

$$u = L \frac{di}{dt} = u_L \Leftrightarrow \underline{U} = \boxed{j \omega L \underline{I} = \underline{U}_L} \quad (34.107)$$

Aceasta expresia în complex a căderii de tensiune inductive. Rezultă :

— impedanța complexă a bobinei ideale

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \boxed{\underline{Z} = j \omega L} \quad (34.108)$$

cu

$$Z = \omega L, \quad \varphi = \pi/2, \quad R = 0, \quad X = \omega L > 0.$$

— admitanța complexă a bobinei ideale :

$$\frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \boxed{\underline{Y} = \frac{1}{j \omega L}}, \quad (34.109)$$

cu

$$Y = 1/\omega L, \quad G = 0, \quad B = \omega L > 0.$$

— puterea complexă a bobinei ideale :

$$\underline{U} \underline{I}^* = \boxed{\underline{S} = j \omega L I^2 = j \frac{U^2}{\omega L}}, \quad (34.110)$$

cu

$$P = RI^2 = 0, \quad Q = XI^2 = \omega LI^2 = U^2/\omega L > 0.$$

Am regăsit toate valorile scalare determinate cu metoda reprezentării geometrice (34.24...34.26).

c) *Condensatorul ideal* de capacitate C are ecuația (31.30'), reprezentată în complex, utilizând regula integrării (34.84) și a amplificării cu un scalar (34.82) :

$$u = \frac{1}{C} \int i \, dt = u_C \Leftrightarrow \underline{U} = \boxed{\frac{\underline{I}}{j \omega C} = \underline{U}_C} \quad (34.111)$$

Aceasta e expresia în complex a căderii de tensiune capacitive. Rezultă :

— impedanța complexă a condensatorului ideal :

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \boxed{\underline{Z} = \frac{1}{j \omega C}} \quad (34.112)$$

cu

$$Z = 1/\omega C, \quad \varphi = -\pi/2, \quad R = 0, \quad X = -1/\omega C.$$

— admitanța complexă a condensatorului ideal :

$$\frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \boxed{\underline{Y} = j \omega C}, \quad (34.113)$$

cu

$$Y = \omega C, \quad G = 0, \quad B = -\omega C < 0.$$

— puterea complexă a condensatorului ideal :

$$\underline{U} \underline{I}^* = \boxed{\underline{S} = \frac{I^2}{j \omega C} = -j \omega C U^2}, \quad (34.114)$$

cu

$$P = R I^2 = 0, \quad Q = X I^2 = -I^2/\omega C = -\omega C U^2 < 0.$$

Am regăsit toate valorile scalare determinate cu metoda reprezentării geometrice (34.27...34.29).

În figura 34.20 sînt construite și diagramele vectoriale corespunzătoare (cu notația de la reprezentarea în complex).

34.4. Formele complexe ale „legii lui Ohm“

34.4.1. Analogii cu circuitele de curent continuu. În regim staționar, datorită lipsei tensiunii electromotoare induse (31.8), cîmpul electric este un cîmp potențial și tensiunea electrică nu depinde de drum. De aceea, în curent continuu (v. și par. 13, vol. I), în expresia integrală (31.9) a legii conducției electrice, tensiunea în lungul firului poate fi înlocuită cu tensiunea la borne. Se obține astfel „legea lui Ohm“, sub forma

$$u_b = r i \quad (34.115)$$

pentru un dipol liniar și pasiv, de rezistență r , alimentat cu tensiunea la borne u_b cu sensul asociat curentului după regula de la receptoare — sau sub forma mai generală

$$e \pm u_b = r i \quad (i)$$

pentru un dipol liniar și activ, conținînd o sursă de tensiune electromotoare e , avînd sensul curentului. Semnul (+) din ultima relație corespunde dipolului receptor (sensul tensiunii la borne e asociat sensului curentului după regula de la receptoare), iar semnul (—) corespunde dipolului generator (sensul tensiunii la borne e asociat sensului curentului după regula de la generator).

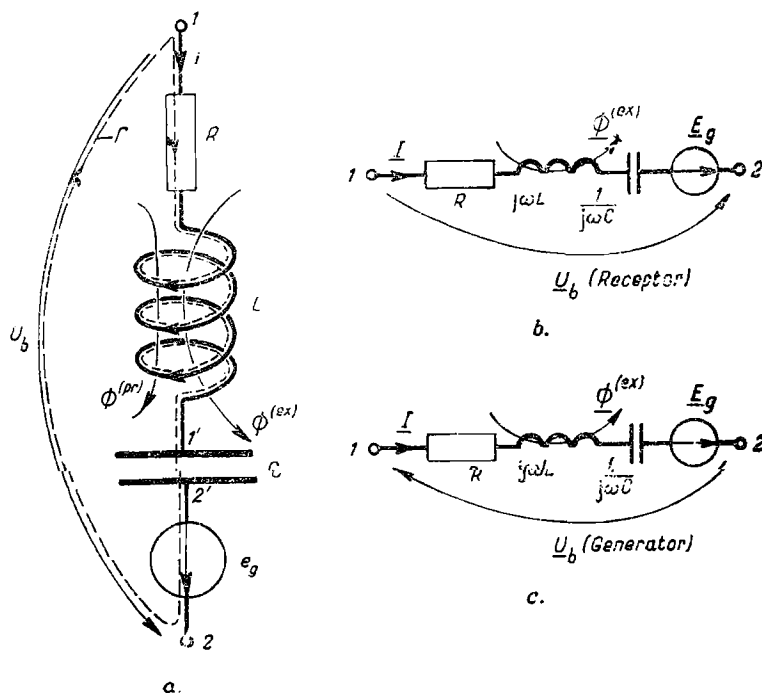
În regim nestaționar și deci și în curent alternativ, datorită existenței tensiunii electromotoare induse și a prezenței condensatoarelor, relațiile (34.115) și (34.116) nu mai sînt valabile în valori instantanee. Un analog formal al acestor relații se obține dacă se operează cu imaginile în complex ale tensiunilor și curenților. Analogul formal al relației (34.115) rezultă din relația (34.88) de introducere a impedanței complexe, pentru dipoli liniari și pasivi :

$$\boxed{\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}} \quad (34.117)$$

și se numește *forma complexă a legii lui Ohm*. Analogul formal al relației (34.116) este teorema lui Joubert, demonstrată în paragraful următor — și care se mai numește *forma complexă generalizată a legii lui Ohm*.

Aceste analogii formale cu relațiile fundamentale de la circuitele de curent continuu vor fi întregite prin formularea unor teoreme analoge teoremelor lui Kirchhoff (cap. 36) și constituie unul din marile avantaje ale reprezentării în complex. Ele sînt limitate de existența impedanțelor mutuale (v. 34.4.3).

34.4.2. Teorema lui Joubert. Fie o latură activă de circuit electric (fig. 34.21, a) cuplată magnetic cu altele, conținînd un rezistor, o bobină, un condensator și un generator de tensiune electromotoare instantanee dată e_g , avînd sensul de referință al curentului i . Inductivitatea proprie a laturii¹ este L , capacitatea condensatorului este C , rezistența totală a conductorului (de la borna 1 la armătura 1' a condensatorului și de la cealaltă armătură, 2', la borna 2) este R , iar tensiunea la borne instantanee cu sensul de referință după regula



de la receptoare este $u_{12} = u_b$. Fie Γ o curbă luată în sensul curentului (de la 1 la 1') prin interiorul conductorului laturii și prin dielectricul condensatorului și închisă pe la borne în sens opus tensiunii u_b . Fluxul total înălțuit de latură,

¹ Această inductivitate include și inductivitatea proprie a generatorului, dacă t.e.m. corespunzătoare nu e inclusă în e_g . Pentru definirea inductivității laturii și — mai general — a fluxului înălțuit de latură, suprafața de definiție a fluxului se consideră sprijinită de linia tensiunii la borne (v. și observația de la par. 31.3.2).

calculat prin suprafața S_Γ în sensul asociat sensului curentului burghiului drept, se compune din fluxul bobinei $\Phi = L i + \Phi^{(ex)}$ și din fluxul care induce t.e.m. a generatorului e_s . Fluxul exterior $\Phi^{(ex)}$ e fluxul produs prin bobină de curenții altor laturi. Tensiunea electromotoare indusă în lungul curbei Γ este :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{E} \, ds = - \frac{d\Phi}{dt} + e_s \quad (34.118)$$

Această integrală se poate însă desface pe porțiuni :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{E} \, ds = \int_1^{1'} \mathbf{E} \, ds + \int_{1'}^{2'} \mathbf{E} \, ds + \int_{2'}^2 \mathbf{E} \, ds + \int_2^1 \mathbf{E} \, ds$$

(fir) (dielectric) (fir) (pe la borne)

Primul și al treilea termen reprezintă tensiunea în lungul firului, egală, conform legii conducției electrice, cu produsul dintre rezistență și curent. Termenul al doilea e tensiunea condensatorului, iar ultimul e tensiunea la borne cu semn schimbat :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{E} \, ds = u_R \quad u_C - u_b = R i + \frac{1}{C} \int i dt - u_b, \quad (34.118')$$

ultima egalitate fiind valabilă pentru circuite liniare.

Egalînd expresiile (34.118) și (34.118'), se obține ecuația unei laturi receptoare active și cuplate

$$e_s - \frac{d\Phi}{dt} = u_R + u_C - u_b = R i + \frac{1}{C} \int i dt - u_b \quad (34.119)$$

Înlocuind $\Phi = Li + \Phi^{(ex)}$ și separînd termenii dependenți de curent, se obține ecuația unei laturi liniare receptoare :

$$e_s - \frac{d\Phi^{(ex)}}{dt} + u_b = R i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt. \quad (34.120)$$

Ecuația corespunzătoare în complex este :

$$\underline{E}_s - j \omega \underline{\Phi}^{(ex)} + \underline{U}_b = \left(R + j \omega L + \frac{1}{j \omega C} \right) \underline{I} \quad (34.120')$$

Factorul complex al curentului este chiar impedanța complexă proprie $\underline{Z}$ a laturii. Se obține astfel expresia teoremei lui Joubert pentru laturi receptoare (v. schema echivalentă din fig. 34.21, b) :

$$\underline{E}_s - j \omega \underline{\Phi}^{(ex)} + \underline{U}_b = \underline{Z} \underline{I}, \quad (34.121)$$

care pentru laturi generatoare (la care s-a luat $u_b = u_{21} = -u_{12}$ v. schema echivalentă din fig. 34.21, c) se scrie :

$$\underline{E}_g - j\omega \Phi^{(ex)} - \underline{U}_b = \underline{Z} \underline{I} \quad (34.121')$$

Aceste două expresii se scriu strîns :

$$\boxed{\underline{E}_g - j\omega \Phi^{(ex)} \pm \underline{U}_b = \underline{Z} \underline{I}} \quad (34.122)$$

semnul (+) corespunzînd laturii receptoare și semnul (—) laturii generatoare.

Acastă relație constituie analogul pentru curent alternativ, în complex, al legii lui Ohm generalizate (34.116). Suma tensiunilor din membrul stîng se numește *tensiune aplicată*

$$\boxed{\underline{U}_a = \underline{E}_g - j\omega \Phi^{(ex)} \pm \underline{U}_b} \quad (34.123)$$

și coincide cu tensiunea la borne luată după regula de la receptoare, în cazul laturilor pasive ($\underline{E}_g = 0$) și necuplate ($\Phi^{(ex)} = 0$). Cu ajutorul tensiunii aplicate, teorema lui Joubert se enunță : *Tensiunea aplicată unei laturi de circuit (pasive sau active, cuplate sau necuplate) e egală cu produsul dintre impedanța proprie a laturii și curent :*

$$\boxed{\underline{U}_a = \underline{Z} \underline{I}} \quad (34.124)$$

34.4.3. Impedanțe mutuale. Fluxul exterior instantaneu poate fi produs de curenții $i_2, i_3, \dots, i_L$ ai altor $L - 1$ laturi de circuit. În acest caz vom da indicele 1 laturii studiate pînă acum, al cărei curent va fi $i = i_1$, a cărei inductivitate proprie va fi $L = L_{11}$, și al cărei flux exterior va fi $\Phi_1^{(ex)}$. Vom exprima acest flux cu ajutorul relației lui Maxwell (31.15) :

$$\Phi_1^{(ex)} = \Phi_1 - L_{11} i_1 = \sum_{i=2}^L L_{1i} i_i \quad (34.125)$$

în care intervin inductivitățile mutuale $L_{1i} = L_{i1} \gtrless 0$. Semnul unei inductivități mutuale, de exemplu L_{12} (v. fig. 34.22), depinde de sensurile de referință de pe circuite în raport cu care a fost definită. Dacă $L_{12} > 0$, fluxul produs de circuitul 2 (parcurs de curentul i_2 în sensul de referință considerat pe acest circuit) înălțăuie circuitul 1 (v. fig. 34.22, a) într-un sens asociat după regula burghiului drept cu sensul de referință de pe circuitul 2 (sensul în care calculăm tensiunea electromotoare indusă de 2 în 1). Dacă $L_{12} < 0$, fluxul produs de circuitul 2 înălțăuie circuitul 1 (v. fig. 34.22, c) într-un sens opus celui asociat după regula burghiului drept. De aceea, pe schemele echivalente ale circuitelor (v. fig. 34.22, b pentru cazul din fig. 34.22, a și fig. 34.22, d pentru cazul din

fig. 34.22, c), valoarea, pozitivă sau negativă, a inductivității mutuale trebuie însoțită de indicarea sensurilor ei de referință de pe circuite, indicarea care se face cu steluțe (sau puncte), plasate alături de bornele „de intrare” pentru

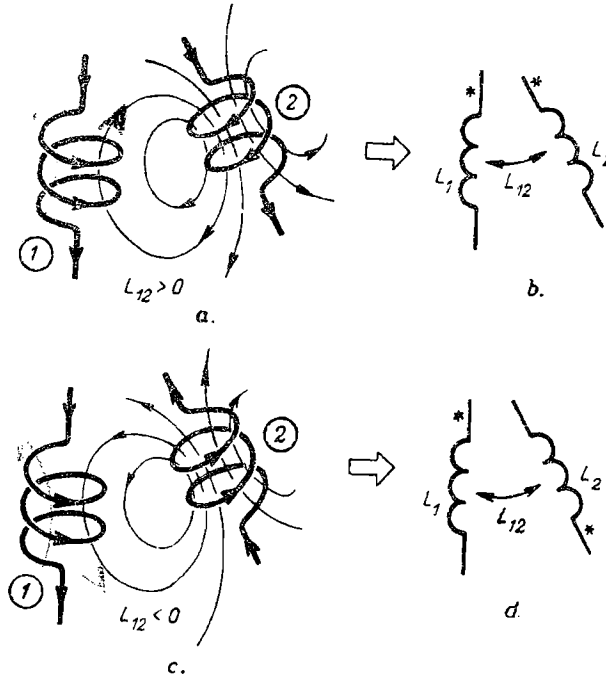


Fig. 34.22.

acelor sensuri de referință (bornele polarizate). Indicarea nu se face cu săgeți, pentru a nu se impune în nici un fel sensurile de referință ale curenților folosite la scrierea ecuațiilor.

Tensiunea electromotoare indusă de fluxul exterior (34.125) are (în circuite liniare cu $L_{rs} = \text{const.}$) expresia instantanee :

$$e_1^{(ex)} = - \frac{d \Phi_1^{(ex)}}{dt} = - \sum_{s=2}^L L_{1s} \frac{di_s}{dt}, \quad (34.126)$$

respectiv în complex :

$$\underline{E}_1^{(ex)} = - j \omega \underline{\Phi}_1^{(ex)} = - \sum_{s=2}^L j \omega L_{1s} \underline{I}_s = - \sum_{s=2}^L \underline{Z}_{1s} \underline{I}_s \quad (34.127)$$

Mărima imaginară :

$$\boxed{\underline{Z}_{rs} = j \omega L_{rs} = j X_{rs}} = \underline{Z}_{sr} \quad (34.128)$$

se numește *impedanță complexă mutuală* dintre circuitele s și r , iar mărimea reală :

$$\underline{X}_{rs} = \omega L_{rs} = X_{sr} \geq 0 \quad (34.129)$$

se numește *reactanță mutuală (inductivă)*. Deci, în cazul cînd fluxul exterior e produs de curenții altor laturi (lăuare) de circuit, expresia (34.122) se poate scrie (afectînd acum indicele 1 tuturor mărimilor referitoare la latura studiată) :

$$\underline{E}_{s1} - \sum \underline{Z}_{1s} \underline{I}_s - \underline{U}_{b1} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1$$

sau

$$\underline{E}_{s1} - \underline{U}_{b1} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \sum_{s=2}^L \underline{Z}_{1s} \underline{I}_s = \sum_{s=1}^L \underline{Z}_{1s} \underline{I}_s. \quad (34.130)$$

Semnul (+) corespunde regulii de la receptoare, iar semnul (—) regulii de la generatoare pentru $\underline{U}_{b1}$. Mărimea

$$\underline{U}_{1s} = -\underline{E}_{1s} = \underline{Z}_{1s} \underline{I}_s = jX_{1s} \underline{I}_s = j\omega L_{1s} \underline{I}_s \quad (34.131)$$

($s \neq 1$)

se mai numește *cădere de tensiune indusă mutual* de curentul $\underline{I}_s$ în latura 1 și e egală și de semn contrar cu *tensiunea electromotoare indusă* de curentul $\underline{I}_s$ în latura 1 :

$$\underline{E}_{1s} = -j\omega \Phi_{1s} = -j\omega L_{1s} \underline{I}_s = -\underline{Z}_{1s} \underline{I}_s. \quad (34.132)$$

Comparînd relațiile (34.116) și (34.130), se constată imediat că analogia formală dintre relațiile fundamentale de la circuitele de curent continuu și cele de la circuitele de curent alternativ studiate în complex este imperfectă, în cazul cînd există tensiuni de inducție mutuală, respectiv impedanțe mutuale, care nu au analog în curent continuu.

Observație a) Semnele din fața mărimilor L_{1s} și X_{1s} , din ecuațiile (34.125), (34.126), (34.127), (34.128) se schimbă, dacă se schimbă unul dintre sensurile de referință ale curentului $\underline{I}_s$, sau al tensiunii electromotoare calculate în latura 1, față de sensurile de referință indicate de bornele polarizate, utilizate pentru definirea mărimii $L_{1s} \geq 0$.

b) Semnul din fața t.e.m. a generatorului $\underline{E}_g$ se schimbă dacă sensul de referință al acesteia e opus celui al curentului. În acest caz, $\underline{E}_g$ se mai numește *tensiune contraelectromotoare*.

Sistematizarea studiului rețelelor electrice cu ajutorul reprezentării în complex se poate face în strînsă analogie cu aceea a rețelelor de curent continuu (v. cap. 13, vol. I). La circuitele dipolare, determinarea curentului la tensiune dată se reduce la calculul impedanței complexe prezentate de circuit (v. rel. 34.91); de aceea interesează metodele de calcul ale acestei impedanțe în funcție de structura circuitului și de impedanțele laturilor lui (v. cap. 35). La rețele

mai complicate se utilizează forma complexă a teoremelor lui Kirchhoff (v. cap. 36), cu ajutorul cărora se poate rezolva orice problemă privitoare la rețelele liniare. Numeroase alte teoreme și metode de rezolvare, consecințe ale teoremelor lui Kirchhoff, sint utilizate pentru simplificarea și sistematizarea calculelor (v. cap. 37).

35. IMPEDANȚE ECHIVALENTE ȘI UTILIZAREA LOR

35.1. Impedanța complexă echivalentă și admitanța complexă echivalentă

Considerăm un circuit dipolar oarecare D , a cărui tensiune la borne e sinusoidală, cu imaginea în complex $\underline{U}$. Presupunem că în regim permanent curentul este, de asemenea, sinusoidal și are imaginea în complex $\underline{I}$, considerată cu sensul de referință asociat tensiunii la borne după regula de la receptoare (fig. 35.1).

Se numește *impedanța echivalentă complexă* raportul dintre tensiunea la borne complexă și curentul complex, cu sensul asociat după regula de la receptoare, ale unui circuit dipolar oarecare :

$$\underline{Z}_e = \left[\frac{\underline{U}_b}{\underline{I}} \right]_{recep} = Z_e e^{j\varphi_e} = R_e + j X_e \quad (35.1)$$

cu partea reală, $R_e \geq 0$, *rezistența echivalentă* — și cu partea imaginară, $X_e \geq 0$, *reactanța echivalentă*.

Impedanța echivalentă mai e numită impedanța „văzută” din exterior a circuitului.

Se numește *admitanță echivalentă complexă* valoarea reciprocă a impedanței echivalente complexe

$$\underline{Y}_e = \frac{1}{\underline{Z}_e} = \left[\frac{\underline{I}}{\underline{U}_b} \right]_{recep} = Y_e e^{-j\varphi_e} = G_e - j B_e, \quad (35.2)$$

cu partea reală, $G_e \geq 0$, *conductanța echivalentă* — și cu partea imaginară cu semn schimbat, $B_e \geq 0$, *susceptanța echivalentă*.

Mărimile (35.1) și (35.2) se definesc pentru circuite oarecare, care pot fi active, neliniare, cuplate cu alte circuite etc., cu singura presupunere că $u_b(t)$ și $i(t)$ sînt sinusoidale (eventual componente sinusoidale ale unor funcțiuni periodice nesinusoidale). De aceea, impedanța echivalentă și admitanța echivalentă nu caracterizează circuitul la care se referă decît într-un

regim dat de funcționare, pot depinde de valoarea tensiunii și a curentului și pot avea părțile reale negative. Aceste mărimi generalizează noțiunile de impedanță complexă și admitanță complexă definite în paragraful 34.3. Pentru dipolii liniari, pasivi și necuplați cu alte circuite exterioare, impedanța (admitanța) echivalentă complexă este egală cu impedanța (admitanța) complexă definită anterior (rel. 34.88, 34.92) și are partea reală pozitivă.

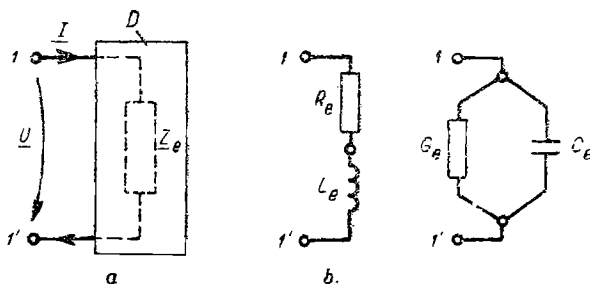


Fig. 35.1

Un circuit de impedanță echivalentă Z_e admite o schemă echivalentă, constituită dintr-o singură latură de circuit de impedanță $Z = Z_e$ (fig. 35.1, a). Dacă se definesc inductivitatea echivalentă L_e și capacitatea echivalentă C_e prin relațiile:

$$\left[L_e = \frac{X_e}{\omega} \right] = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \{Z_e\}; \quad \left[C_e = -\frac{B_e}{\omega} \right] = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \{Y_e\}, \quad (35.3)$$

circuitul mai admite o schemă echivalentă serie (fig. 35.1, b), compusă dintr-un rezistor ideal de rezistență $R_e = \operatorname{Re} \{Z_e\}$ și o bobină ideală de inductivitate L_e , precum și o schemă echivalentă paralel (derivație), compusă dintr-un rezistor ideal de conductanță $G_e = \operatorname{Re} \{Y_e\}$ și un condensator ideal de capacitate C_e (v. fig. 35.1, c).

Aceste scheme echivalente sînt utilizabile pentru studiul circuitului la o frecvență dată și în regimul de funcționare pentru care au fost definite Z_e și Y_e . În general, aceste scheme nu sînt realizabile în concret, deoarece parametrii lor R_e, G_e, L_e, C_e nu sînt neapărat pozitivi și independenți de frecvență, cum sînt parametrii elementelor ideale de circuit.

În cazul general, pentru calculul impedanței echivalente e necesară rezolvarea circuitului respectiv (de ex. cu teoremele lui Kirchhoff, cap. 36), presupunînd că i se aplică tensiunea $\underline{U}_b$, pentru a afla curentul $\underline{I}$ absorbit.

Exemplu: Considerăm un dipol liniar și activ, cu o singură latură necuplată cu altele (fig. 35.2), de impedanță proprie Z și de t.e.m. $\underline{E}$. Din teorema lui Joubert pentru laturi receptoare (34.121) rezultă $\underline{U}_b + \underline{E} = Z \underline{I}$. Impedanța echivalentă complexă (35.1) rezultă:

$$\underline{Z}_e = \left[\frac{\underline{U}_b}{\underline{I}} \right]_{\text{recep}} = Z - \frac{\underline{E}}{\underline{I}} = R_e - jX_e.$$

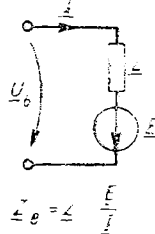


Fig. 35.2

Dacă t.e.m. e suficient de mare și proporțională cu curentul, se poate obține $R_e < 0$ și constant, adică se poate realiza în concret o rezistență echivalentă negativă.

În cazul particular al unor dipoli liniari, pasivi și fără inductivități mutuale între laturile lor interioare, impedanța echivalentă și admitanța echivalentă se pot calcula cu teoremele impedanțelor echivalente, eventual completate cu teoremele de transfigurare (v. par. 38.2).

35.2. Teoremele impedanțelor echivalente

35.2.1. Dipoli în serie, necuplați inductiv (fig. 35.3, a). Fie n dipoli pasivi, necuplați inductiv între ei sau cu exteriorul, și conectați în serie, având impedanțele complexe $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3, \dots, \underline{Z}_n$. În lipsa unor fluxuri de inducție exterioare,

tensiunea instantanee $u_{11}' = \int_1^{1'} \mathbf{E} \, ds$ poate fi calculată pe orice drum luat

prin exteriorul dipolilor fie direct între borne ($u_{11}' = u_b$), fie urmînd succesiunea liniilor tensiunilor la borne:

$$u_{11} = u_b = u_1 + u_2 + u_3 + \dots \quad (35.4)$$

La conexiunea în serie, suma tensiunilor aplicate dipolilor e egală cu tensiunea aplicată la borne. În complex:

$$\underline{U}_b = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 + \dots \quad (35.4')$$

Deoarece dipolii sînt pasivi și necuplați inductiv între ei, tensiunea fiecăruia e egală cu produsul dintre impedanța proprie și curent (rel. 34.117):

$$\underline{U}_b = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{Z}_3 \underline{I}_3 + \dots \quad (35.5)$$

În regim cvasistaționar, curentul are însă aceeași valoare în lungul circuitului neramificat (conexiune serie):

$$\underline{I} = \underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \underline{I}_3 = \dots \quad (35.6)$$

și împărțind relația (35.5) cu această valoare comună $\underline{I}$ a curentului rezultă cu relația (35.1):

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \dots = \sum_{s=1}^n \underline{Z}_s \quad (35.7)$$

Separînd părțile reale și cele imaginare, se mai obțin relațiile:

$$R_e = \sum_{s=1}^n R_s; \quad X_e = \sum_{s=1}^n X_s. \quad (35.8)$$

La dipoli în serie, necuplați inductiv, impedanța echivalentă complexă e suma impedanțelor complexe ale dipolilor, rezistența echivalentă e suma rezistențelor lor, iar reactanța echivalentă e suma reactanțelor lor. Am obținut aceeași regulă ca pentru rezistoarele în serie în curent continuu (v. par. 13.5, vol. I).

Observații: a) Deoarece suma modulelor unor numere complexe nu este în general egală cu modulul sumei, rezultă că regula de mai sus nu e valabilă pentru impedanțele scalare:

$$|\underline{Z}_e| = Z_e \neq \sum_{s=1}^n Z_s \quad (35.9)$$

(exceptînd cazul cînd toți dipolii au același defazaj).

b) Pentru admitanța echivalentă complexă din relația (35.7) rezultă la dipoli în serie :

$$\frac{1}{\underline{Y}_c} = \sum_{s=1}^n \frac{1}{\underline{Y}_s} \quad (35.10)$$

c) În cazul a numai două laturi în

$$\underline{Z}_c = \underline{Z}_1 - \underline{Z}_2; \quad \underline{Y}_c = \frac{\underline{Y}_1 \cdot \underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 - \underline{Y}_2} \quad (35.11)$$

35.2.2. **Dipoli în paralel, necuplați inductiv** (fig. 35.3, b). Fie cei n dipoli din cazul precedent, conectați de astă dată în paralel. Admitanțele lor complexe sînt :

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} \quad \underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} ; \dots ;$$

$$\underline{Y}_n = \frac{1}{\underline{Z}_n}$$

În regim cvasistaționar, din teorema continuității (31.10) rezultă că suma curenților care ies dintr-un nod e nulă (teorema I-a a lui Kirchhoff, v. cap. 36).

Ținînd seama de sensurile curenților celor n dipoli și de al curențului rezultat i , se poate scrie :

$$i = i_1 - i_2 - i_3 - \dots \quad (35.12)$$

La conexiunea în paralel, curentul total absorbit e suma curenților dipolilor. În complex :

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 + \dots \quad (35.12')$$

Deoarece dipolii sînt pasivi și necuplați inductiv între ei, curentul fiecăruia e egal cu produsul dintre admitanță și tensiune (rel. 34.95) :

$$\underline{I} = \underline{Y}_1 \underline{U}_1 + \underline{Y}_2 \underline{U}_2 + \underline{Y}_3 \underline{U}_3 + \dots \quad (35.13)$$

În lipsa unor fluxuri de inducție exterioare, tensiunea la bornele circuitului e egală cu tensiunea aplicată fiecărui dipol în parte (conexiunea paralel) :

$$\underline{U}_b = \underline{U}_1 = \underline{U}_2 = \underline{U}_3 = \dots \quad (35.14)$$

și împărțind relația (35.13) cu această valoare comună, rezultă cu relația (35.2) :

$$\underline{Y}_c = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \dots = \sum_{s=1}^n \underline{Y}_s \quad (35.15)$$

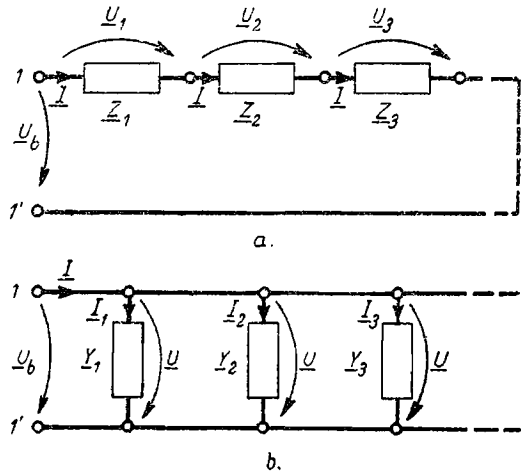


Fig. 35.3

Separînd părțile reale și cele imaginare, se mai obțin relațiile :

$$G_e = \sum_{s=1}^n G_s \quad B_e = \sum_{s=1}^n B_s. \quad (35.16)$$

La dipoli în paralel, necuplați inductiv, admitanța echivalentă complexă e suma admitanțelor complexe ale dipolilor, conductanța echivalentă complexă e suma conductanțelor lor, iar susceptanța echivalentă complexă e suma susceptanțelor lor. Am obținut aceeași regulă ca pentru rezistoarele în paralel, în curent continuu (v. par. 13.5, vol. I).

Observații: a) Teorema nu e valabilă pentru admitanțele scalare :

$$\underline{Y}_e \neq \sum_{s=1}^n \underline{Y}_s \quad (35.17)$$

(exceptînd cazul cînd toți dipolii au același defazaj).

b) Pentru impedanța echivalentă complexă, din relația (35.15) rezultă la dipoli în paralel :

$$\frac{1}{\underline{Z}_e} = \sum_{s=1}^n \frac{1}{\underline{Z}_s} \quad (35.18)$$

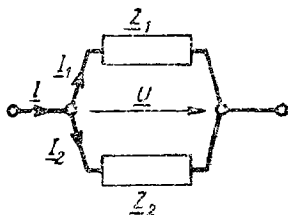
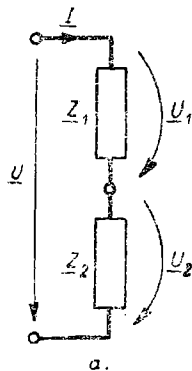
c) În cazul a numai două laturi în paralel

$$\underline{Y}_e = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 \quad \underline{Z}_e = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \quad (35.19)$$

Ultima formulă e foarte mult utilizată în aplicații.

35.2.3. Aplicații la divizarea tensiunii și a curentului. *Divizorul de tensiune* e un sistem de doi dipoli în serie ($\underline{Z}_1, \underline{Z}_2$), căruia i se aplică tensiunea dată $\underline{U}$, astfel că la bornele fiecărui din dipolii componenți se obține o „fracțiune” a tensiunii aplicate (v. fig. 35.4, a): $\underline{U}_1$, respectiv $\underline{U}_2$. Deoarece dipolii sînt în serie $\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$ și $\underline{I} = \underline{U}/\underline{Z}_e$, iar $\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}$ și $\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}$. Se obține :

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}, \quad \underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U} \quad (35.20)$$



Relațiile obținute arată că dacă un dipol e capacitiv și altul inductiv, putem avea $|\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2| < |\underline{Z}_1|$, și tensiunile parțiale pot fi mai mari decît tensiunea aplicată. O divizare propriu-zisă se obține numai cu $\varphi_1 = \varphi_2$. De obicei, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ (divizor de tensiune rezistiv — sau potențiometric) sau $\varphi_1 = \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$ (divizor de tensiune capacitiv); acești divizori se folosesc la măsurarea tensiunilor electrice înalte.

Divizorul de curent e un sistem de doi dipoli în paralel, care absoarbe din exterior curentul dat $\underline{I}$, astfel că în fiecare din dipolii componenți se obține cîte o „fracțiune” a curentului total

Fig. 35.4

(fig. 35.4, b): I_1 , respectiv I_2 . Deoarece dipolii sînt în paralel, $Y = Y_1 + Y_2$ și $U = I/Y$, iar $I_1 = U/Y_1$ și $I_2 = U/Y_2$. Se obține:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} I = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} I; \\ I_2 &= \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2} I = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} I \quad (35.21) \end{aligned}$$

Curentul dintr-o latură e proporțional deci cu impedanța celeilalte laturi. Relațiile (35.21) sînt foarte utilizate în aplicații. Și în acest caz se obține o divizare propriu-zisă numai cu $\varphi_1 = \varphi_2$. De obicei, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ (divizor de curent rezistiv — sau tip shunt, care se folosește la măsurarea curenților intensi).

35.2.4. Aplicație numerică la rezolvarea unui circuit mixt (serie-paralel). Se numește circuit mixt serie-paralel un circuit constituit din doi dipoli în paralel, conectați în serie cu un al treilea. Considerăm ca exemplu circuitul din figura 35.5, în care:

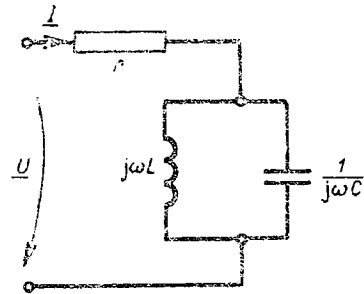


Fig. 35.5

$$r = 3\Omega, \quad L\omega = 2\Omega, \quad \frac{1}{C\omega} = 6\Omega, \quad U = 120 \text{ V}.$$

Se determină valoarea instantanee a curentului absorbit, avînd tensiunea ca origine de fază, cu folosirea teoremelor impedanțelor echivalente. Impedanțele complexe ale celor trei ramuri sînt:

$$Z_1 = r = 3, \quad Z_2 = j\omega L = j2, \quad Z_3 = \frac{1}{j\omega C} = -j6.$$

Impedanța echivalentă grupului paralel (L, C) este:

$$Z_{23} = \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{j2(-j6)}{j2 - j6} = \frac{12}{-4j} = 3j.$$

Impedanța echivalentă a ansamblului (Z_1 în serie cu Z_{23}) este:

$$Z_e = Z_1 + Z_{23} = 3 + 3j = 3\sqrt{2} e^{j\pi/4} = Z_e e^{j\varphi},$$

asa că impedanța scalară și defazajul sînt:

$$Z_e = 3\sqrt{2} \Omega, \quad \varphi_e = \frac{\pi}{4} = 45^\circ > 0.$$

Curentul complex, cu $U = U = 120$ origine de fază, este:

$$I = \frac{U}{Z_e} = \frac{120}{3\sqrt{2} e^{j\pi/4}} = 20\sqrt{2} e^{-j\pi/4} = I e^{j\varphi},$$

valoarea efectivă a curentului e $I = 20\sqrt{2}$ A, iar valorile instantanee sînt

$$i(t) = 20\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) = 40 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right); \quad u(t) = 120\sqrt{2} \sin \omega t.$$

Observație La frecvența considerată, circuitul a rezultat inductiv. La o frecvență de două ori mai mare $Z_2 = j4$, $Z_3 = -j3$, $Z_{23} = -j12$ și $Z_e = 3 - j12$, adică $\varphi < 0$ și circuitul e capacitiv. Reactanța echivalentă a acestui circuit depinde de frecvență.

35.3. Circuite cu inductivități mutuale

Studiem, ca exemplu, un caz în care nu se pot utiliza teoremele impedanțelor echivalente (35.7, 35.18), deoarece dipolii sînt cuplați magnetic: o bobină de rezistență r_1 și inductivitatea L_1 e conectată în serie cu o bobină de rezistență r_2 și inductivitate L_2 . Inductivitatea lor mutuală (pentru sensuri de referință corespunzătoare sensului curentului, v. fig. 35.6, a) e notată L_{12} și poate fi pozitivă (bobine cu fluxuri aditive) sau negativă (bobine cu fluxuri în opoziție). Se cere schema echivalentă serie a acestui circuit, adică schema în care rezistența lui echivalentă R_e e în serie cu inductivitatea echivalentă L_e (fig. 35.6, b).

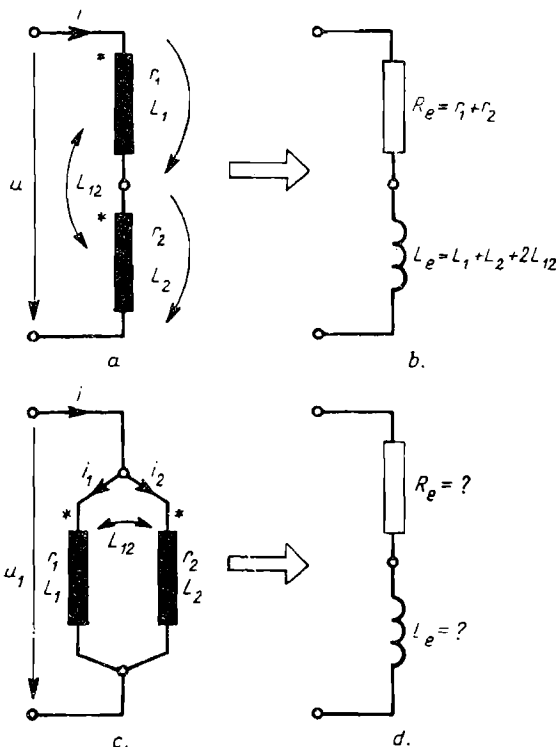


Fig. 35.6

Presupunem că se aplică tensiunea $\underline{U}$, de pulsație ω , și că sistemul absoarbe curentul $\underline{I} = \underline{I}_1 = \underline{I}_2$. Căderile de tensiune la bornele fiecărei bobine în parte se pot exprima utilizînd teorema lui Joubert sub forma (34.130):

$$\underline{U}_1 = (r_1 + j\omega L_1) \underline{I} + j\omega L_{12} \underline{I};$$

$$\underline{U}_2 = (r_2 + j\omega L_2) \underline{I} + j\omega L_{21} \underline{I},$$

adică:

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = [r_1 + r_2 + j\omega (L_1 + L_2 + 2L_{12})] \underline{I} = \underline{Z}_e \underline{I}.$$

Paranteza dreaptă care înmulțește curentul e chiar impedanța echivalentă complexă. Rezultă rezistența echivalentă și reactanța echivalentă:

$$R_e = r_1 + r_2, \quad X_e = \omega (L_1 + L_2 - 2L_{12}), \quad (35.22)$$

respectiv inductivitatea echivalentă (35.3):

$$\boxed{\frac{X_e}{\omega} = L_e = L_1 + L_2 \pm 2|L_{12}|} \quad (35.23)$$

unde semnul (+) corespunde bobinelor cu fluxuri aditive, iar semnul (—) corespunde bobinelor cu fluxuri în opoziție.

Ca exercițiu propunem stabilirea schemei echivalente (din figura 35.6, d) pentru circuitul paralel, cu laturi cuplate, din figura 35.6, c.

35.4. Circuite rezonante

Un *sistem oscilant*, mecanic sau electric, e un sistem care, în lipsa unei „forțe” exterioare (în cazul unui circuit electric, în lipsa unei tensiuni aplicate), poate prezenta oscilații proprii slab amortizate, adică un regim liber oscilatoriu amortizat (v. par. 32.3). În cazul general, aceste oscilații sînt suprapuneri de oscilații cvasisinusoideale, cu diferite frecvențe proprii $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$.

De exemplu, circuitul serie r, L, C , studiat în paragraful 32.3, avea o singură frecvență proprie, corespunzătoare pulsației (32.27):

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{R^2 C}{8L}\right). \quad (35.24)$$

Să presupunem că unui astfel de sistem oscilant i se aplică o „forță” exterioară periodică, de frecvență unghiulară ω . În regim permanent, oscilațiile forțate ale sistemului vor avea amplitudini și faze inițiale dependente de frecvența „forței” exterioare. Dacă această frecvență variază lent, se observă următoarele: pentru anumite valori ale frecvenței exterioare, amplitudinile oscilațiilor trec prin valori maxime sau minime cu atît mai nete, cu cît amortizarea sistemului e mai mică; pentru aceleași valori ale frecvenței (sau foarte apropiate de acestea), oscilațiile forțate ajung în cvadratură (deplasările) sau în fază (vitezele) cu „forța” exterioară; valorile frecvenței la care se observă extremum-ul amplitudinilor sau valorile critice ale defazajelor sînt foarte apropiate de frecvențele proprii ale sistemului. Acest fenomen se numește *rezonanță*.

În cazul circuitelor electrice în regim permanent sinusoidal sub tensiune aplicată dată, fenomenul de rezonanță consistă în trecerea amplitudinii curentului absorbit din exterior prin valori maxime (rezonanța propriu-zisă) sau minime (antirezonanța), cum și în anularea defazajului și a puterii reactive absorbite — atunci cînd frecvența are valori apropiate de acelea ale frecvențelor proprii.

Caracterizarea *exactă* a stării de rezonanță se poate face în mai multe moduri — care toate sînt echivalente, în practică, pentru circuitele slab amortizate (de înaltă calitate). Astfel, pentru pulsația de rezonanță ω_r ,¹ se folosește una din următoarele trei definiții:

- ω_{r1} — pulsația tensiunii aplicate, la care circuitul absoarbe o putere reactivă nulă, respectiv la care are defazaj nul;
- ω_{r2} — pulsația tensiunii aplicate, la care impedanța scalară e minimă sau maximă, respectiv curentul e maxim sau minim la tensiune dată;
- $\omega_{r3} = \omega_p$ — pulsația oscilațiilor proprii.

În acest curs vom considera pulsația ω_{r1} ca *pulsație de rezonanță*. Pentru circuite foarte slab amortizate (cu rezistențe foarte mici față de reactanțele

¹ Prin împărțirea pulsației de rezonanță cu 2π , aceleași definiții conduc la frecvența de rezonanță $f_r = \omega_r/2\pi$.

bobinelor și ale condensatoarelor la frecvența de rezonanță), cele trei valori de mai sus tind către o valoare limită unică, numită *pulsăția ideală de rezonanță* :

$$\omega_0 = \lim_{r_k \rightarrow 0} \omega_{r1} = \lim_{r_k \rightarrow 0} \omega_{r2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_p$$

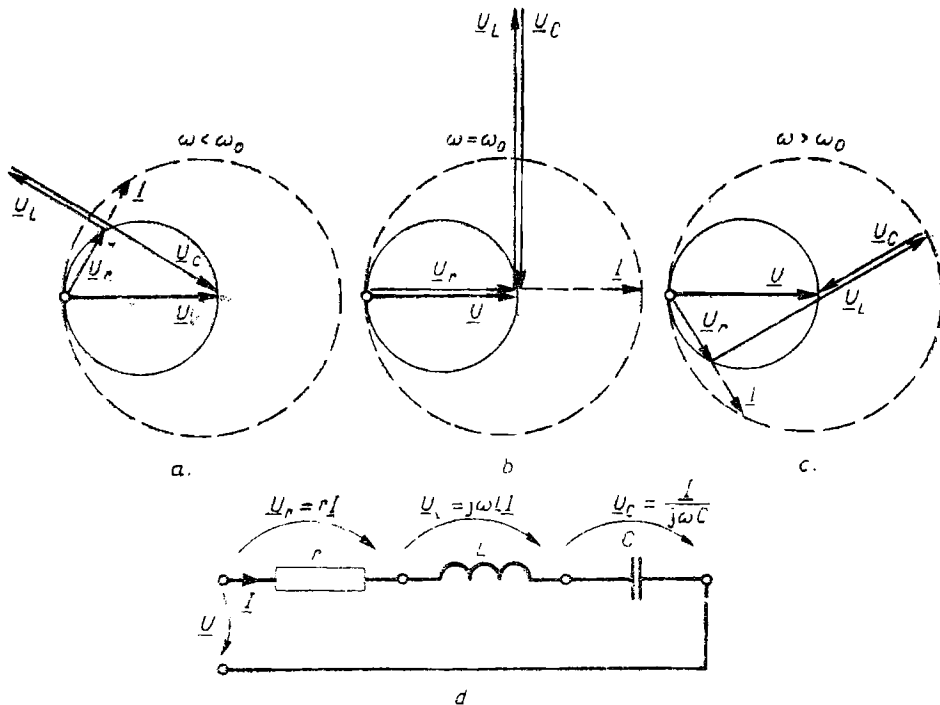
(limita fiind considerată la valori tinzând către zero ale rezistențelor r_k ale laturilor $k = 1, 2, \dots, L$).

Pentru un circuit care conține un singur condensator de capacitate C și o singură bobină de inductivitate L , pulsăția ideală de rezonanță rezultă din (35.24) cu $R \rightarrow 0$ și este :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ cu } \boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}} \quad (35.24')$$

Acastă formulă se numește *formula lui Thomson*. În cele ce urmează, vom studia cele mai simple circuite rezonante și unele aplicații ale lor.

35.4.1. Circuitul cu rezonanță de tensiune (rezonanță serie). Considerăm circuitul serie r, L, C (fig. 35.7, *d*), studiat pînă acum, ca exemplu, cu diferite metode. Dacă $r < 2\sqrt{L/C}$, regimul său liber e oscilatoriu amortizat (v. rel. 32.26), cu pulsăția proprie (35.24).



Curentul se poate calcula și cu ajutorul impedanței echivalente complexe, care e suma impedanțelor elementelor conectate în serie :

$$\underline{Z} = r + j\omega L - \frac{1}{j\omega C} = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = Ze^{j\varphi} \quad (35.25)$$

Curentul complex sub tensiunea la borne $\underline{U} = U$, luată ca origine de fază, este :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U}{Z} e^{-j\varphi} = I e^{j\varphi},$$

Cu valoarea efectivă

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = I(\omega). \quad (35.26)$$

Dacă pulsația variază în intervalul $(0, \infty)$, curentul crește, pornind de la valoarea $I(0) = 0$ și are un maxim pentru pulsația ω_{r2} , la care impedanța e minimă, adică reactanța e nulă

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0, \quad (35.27)$$

adică

$$\omega_{r2} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \neq \omega_p. \quad (35.28)$$

Maximul curentului este :

$$I(\omega_{r2}) = I_0 = \frac{U}{r} \quad (35.29)$$

La rezonanță, impedanța circuitului e egală cu rezistența lui și e foarte mică. Pentru $\omega > \omega_{r2} = \omega_0$, curentul scade, tinzând asimptotic către zero (fig. 35.8, a). Defazajul circuitului rezultă din relația (35.25) :

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{r} = \varphi(\omega). \quad (35.30)$$

La pulsații mici, circuitul e capacitiv ($\varphi < 0$), și anume $\varphi(0) = -\frac{\pi}{2}$.

O dată cu creșterea pulsației, defazajul (negativ) scade în valoare absolută și

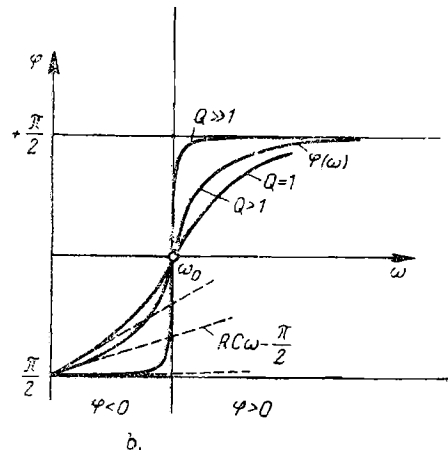
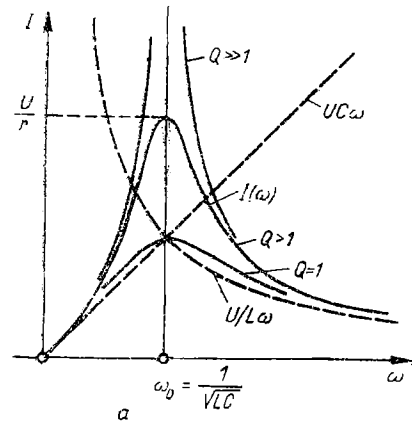


Fig. 35.8

se anulează la pulsația care anulează pe $\operatorname{tg} \varphi$, adică la pulsația care anulează reactanța (35.27). Pulsația de rezonanță ω_{r1} e deci tot ω_0

$$\omega_{r1} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \neq \omega_p. \quad (35.31)$$

Pentru $\omega > \omega_{r1} = \omega_0$, circuitul e inductiv ($\varphi > 0$) și defazajul tinde către $\frac{\pi}{2}$ când $\omega \rightarrow \infty$ (fig. 35.8, b).

În figura 35.7 sînt construite diagramele vectoriale pentru $\omega < \omega_0$ (fig. a), $\omega = \omega_0$ (fig. b), $\omega > \omega_0$ (fig. c). Din însăși construcția geometrică a diagramei rezultă că vîrfurile fazorului căderii de tensiune din rezistență $\underline{U}_r = r \underline{I}$, și deci și al fazorului curentului $\underline{I}$ descriu cîte un cerc. Se mai observă că în acest circuit tensiunile la bornele condensatorului $\underline{U}_C$ și ale bobinei $\underline{U}_L$ pot atinge la rezonanță valori efective mari, și anume, mai mari decît ale tensiunii aplicate la borne. De aceea, circuitul se numește *circuit cu rezonanță de tensiune* și se utilizează pentru amplificarea tensiunilor slabe, avînd frecvența egală cu frecvența lui de rezonanță (35.28). Se numește *factor de calitate*, Q , al circuitului, raportul dintre căderea de tensiune din bobină și cea aplicată la rezonanță

$$Q = \left(\frac{U_L}{U} \right)_{\omega=\omega_0} = \left(\frac{L\omega I}{U} \right)_{\omega=\omega_0} = \frac{L\omega_0}{r} = \frac{1}{C\omega_0 r} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (35.32)$$

Factorul de calitate atinge valori foarte mari — de ordinul sutelor în circuitele oscilante obișnuite — și de aceea diagramele din figura 35.7 sînt depărtate de situația reală din astfel de circuite. Curbele de rezonanță din figura 35.8 se pot exprima unitar, înlocuind în (35.26) și (35.30) parametrii circuitului în funcție de Q și ω_0 . Se obțin relațiile :

$$I = \frac{U}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}; \quad \varphi = \arctg \left[Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]. \quad (35.33)$$

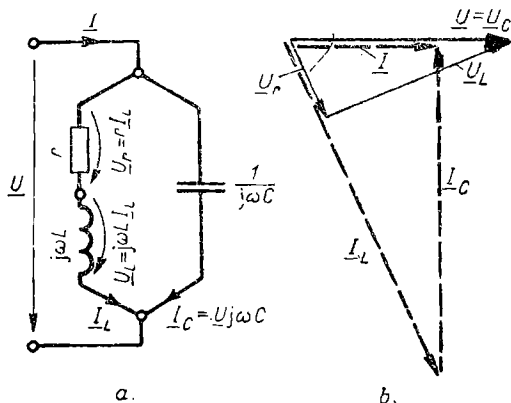


Fig. 35.9

Pentru $r \rightarrow 0$, $Q \rightarrow \infty$ și curentul $I = U / (L\omega - 1/C\omega)$ tinde către infinit la frecvența de rezonanță, dacă tensiunea la bornele menținută constantă. Circuitul serie de înaltă calitate ($Q \gg 1$) constituie un scurtcircuit pentru curenții de frecvență corespunzătoare, $\omega = \omega_0$.

35.4.2. Circuitul cu rezonanță de curent (rezonanță paralel). Considerăm o bobină de rezistență r și inductivitate L în paralel, cu un condensator de capacitate C . Rezistența laturii cu condensatorul o considerăm neglijabilă (fig. 35.9, a).

Admitanța circuitului se calculează cu teoremele impedanțelor echivalente :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = j\omega C + \frac{1}{r + j\omega L} = \frac{1 - \omega^2 LC + jr\omega C}{r + j\omega L}. \quad (35.34)$$

Curentul complex sub tensiunea la borne $\underline{U} = U$ este :

$$\underline{I} = \underline{Y} \underline{U} = Y U e^{-j}$$

cu valoare efectivă :

$$I = Y U = U \frac{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + r^2 \omega^2 C^2}}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} = I(\omega). \quad (35.35)$$

Dacă pulsația variază în intervalul $(0, \infty)$, curentul scade, pornind de la valoarea $I(0) = U/r$, și are un minim la pulsația ω_{r2} , care se determină exact, anulînd derivata expresiei (35.35) (fig. 35.10, a). După un calcul relativ lung se obține :

$$\omega_{r2} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\sqrt{1 - \frac{2r^2 C}{L}} - \frac{r^2 C}{L}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{r^4 C^2}{4L^2}\right). \quad (35.36)$$

O valoare aproximativă a pulsației pentru care curentul e minim se poate obține observînd că dacă amortizarea e slabă atunci $r^2 \ll \omega^2 L^2$ — la frecvențe mai apropiate de rezonanță sau mai mari — și r^2 poate fi neglijat pe lângă $\omega^2 L^2$. Cu această aproximație expresia (35.35) devine :

$$I \approx U \sqrt{\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2 + \frac{r^2 C^2}{L^2}} \quad (35.37)$$

și e minimă pentru :

$$\omega_{r2} \approx \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0. \quad (35.38)$$

Această valoare aproximativă e foarte apropiată (cu mai puțin de 1%) de valoarea exactă (35.36) pentru circuite cu $Q = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}} > 4$. Cu relația (35.38), valoarea aproximativă a curentului la rezonanță este

$$I(\omega_{r2}) = I(\omega_0) = U \frac{rC}{L}, \quad (35.39)$$

iar impedanța la rezonanță este :

$$Z(\omega_0) = \frac{L}{rC} = r Q^2 \gg r. \quad (35.40)$$

Defazajul circuitului rezultă din relația (35.34) :

$$\varphi = \arctg \frac{B}{G} = \arctg \frac{\omega L \left(1 - \omega^2 LC - r^2 \frac{C}{L}\right)}{r} \quad (35.41)$$

$$\varphi \approx \arctg \frac{\omega L}{r} (1 - \omega^2 LC).$$

Defazajul e nul pentru $\omega = 0$, iar la pulsații mici e inductiv, trecând printr-un maxim, pentru a se anula la pulsația de rezonanță :

$$\omega_{r1} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{r^2 C}{L}} \quad \omega_0 \left(1 - \frac{r^2 C}{2L}\right), \quad (35.42)$$

practic egală cu ω_0 la amortizări mici. Pentru $\omega > \omega_{r1}$, circuitul e capacitiv ($\varphi < 0$) și defazajul tinde către $-\pi/2$ când $\omega \rightarrow \infty$ (fig. 35.10, b).

În figura 35.9, b este construită diagrama vectorială pentru $\omega = \omega_{r2} \approx \omega_0$. În acest circuit, curenții din cele două ramuri I_C și I_L pot atinge la rezonanță valori efective mari, și anume mai mari decât ale curentului absorbit din exterior. De aceea, circuitul numește *circuit cu rezonanță de curent* și se utilizează pentru amplificarea curenților slabi, avînd frecvența egală cu frecvența lui de rezonanță. *Factorul de calitate* este egal în acest caz cu raportul de amplificare al curentului :

$$\begin{aligned} \left(\frac{I_C}{I}\right)_{\omega \approx \omega_0} &= \left(\frac{UC\omega}{I}\right)_{\omega \approx \omega_0} \approx \frac{L\omega_0}{r} = \\ &= \frac{1}{rC\omega_0} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q. \end{aligned} \quad (35.43)$$

Curbele de rezonanță (35.35) și (35.41) se pot exprima cu ajutorul factorului de calitate și al pulsației ideale de rezonanță ω_0 :

$$I = \frac{U}{r} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} Q^2}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} Q^2}},$$

$$\varphi = \arctg \left[\frac{\omega}{\omega_0} Q \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - \frac{1}{Q^2}\right) \right]. \quad (35.44)$$

Pentru $r \rightarrow 0$, $Q \rightarrow \infty$, $Z(\omega_0) \rightarrow \infty$ și curentul $I = U \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$

se anulează la frecvența de rezonanță. Circuitul paralel de înaltă calitate ($Q \gg 1$) blochează trecerea curenților de frecvență corespunzătoare.

Circuitul paralel un circuit rezonant, la care cele trei condiții menționate la începutul acestui paragraf, ca fiind caracteristice rezonanței, duc la valori distincte pentru pulsația de rezonanță. Astfel, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ fiind pulsația ideală de rezonanță, pulsația de

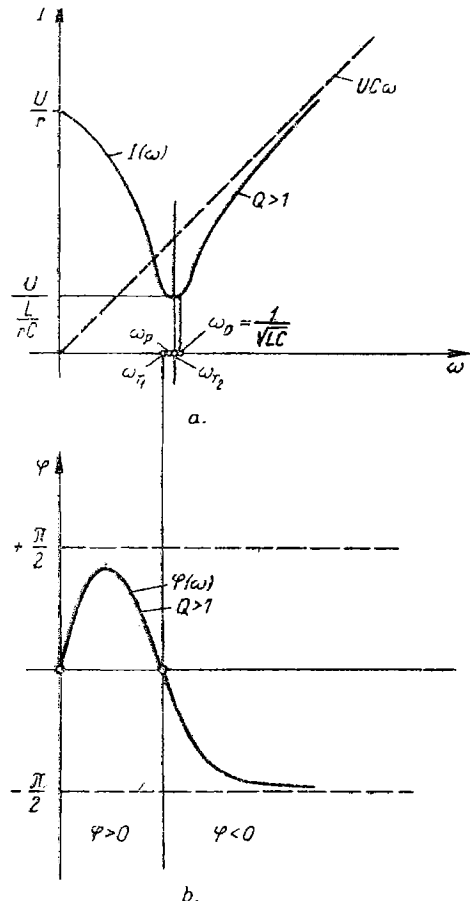


Fig. 35.10

anulare a defazajului e ω_{r1} , dat de (35.42), pulsația de maxim al impedanței de e ω_{r2} , dat de (35.36), și amândouă sînt diferite de pulsația proprie $\omega_{r3} = \omega_p$, dată de (35.24). Pentru circuitele oscilante, utilizate în aplicații pentru proprietățile lor rezonante (radiotehnică, telecomunicații), factorii de calitate sînt foarte mari și toate aceste pulsații practic coincid :

$$\omega_{r1} \approx \omega_{r2} \approx \omega_{r3} \approx \omega_p = 1/\sqrt{LC}. \quad (35.45)$$

La Q dezvoltarea în expresiilor de mai sus arată

$$\omega_{r1} \approx \omega_p$$

ω_{r2} fiind foarte apropiată de

35.5. Circuite cu proprietăți speciale

35.5.1. **Circuite generatoare de curent constant (montaje Boucherot).** Considerăm un circuit mixt cu structura din figura 35.11, a. Presupunind constantă tensiunea aplicată circuitului, determinăm condiția pentru ca, indiferent de valoarea impedanței Z_3 , curentul I_3 să aibă aceeași valoare.

Impedanța echivalentă calculează teoremele (35.11) și (35.19)

$$Z = Z_1 \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{U}{I_1}. \quad (36.46)$$

Curentul I_3 e curentul uneia dintre ramurile unui divizor de curent și e dat de (35.21) :

$$I_3 = I_1 \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} = \frac{U Z_2}{Z_1 Z_2 + Z_3 (Z_1 + Z_2)}. \quad (35.47)$$

Pentru ca I_3 să fie independent de valoarea lui Z_3 , este necesară satisfacerea condiției complexe :

$$Z_1 + Z_3 = 0, \quad (35.48)$$

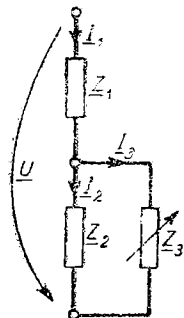
adică relațiilor reale

$$\begin{aligned} R_1 + R_3 &= 0, \\ X_1 + X_3 &= 0. \end{aligned} \quad (35.49)$$

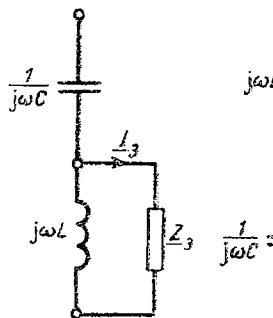
Rezistențele fiind pozitiv definite, trebuie să fie nule amândouă :

$$R_1 = R_3 = 0. \quad (35.50)$$

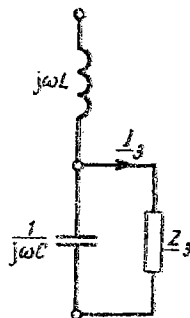
Deci Z_1 trebuie să fie o bobină ideală și Z_3 un condensator ideal (sau invers), ai căror parametri să satisfacă condiția de rezonanță (35.27) :



a



b



c

Fig. 35.11.

$$j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = 0 \rightarrow L\omega = \frac{1}{\omega C}. \quad (35.51)$$

Cele două posibilități sînt reprezentate în figura 35.11, b și c. Dacă condițiile (35.50) și (35.51) sînt îndeplinite, curentul I_3 este :

$$I_3 = \frac{U}{Z_1} = \pm U j\omega C = \mp U j\omega L, \quad (35.52)$$

semnul de sus corespunzînd figurii 35.11, b semnul de jos figurii 35.11, c.

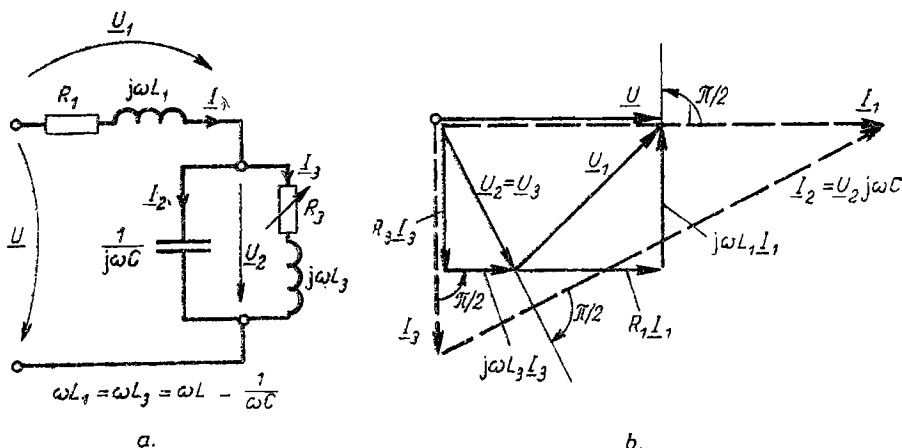


Fig. 35.12.

Circuitele din această categorie sînt alimentate cu tensiuni constante și furnizează curenți constanți, oricare ar fi impedanța de sarcină Z_3 . În practică, totdeauna $R_1 \neq 0$ și $R_2 \neq 0$, chiar dacă sînt foarte mici. De aceea, curențul e numai aproximativ constant (pentru valori Z_3 nu prea mari).

35.5.2. Circuit defazor. Se consideră circuitul mixt din figura 35.12, în care bobinele au inductivități egale:

$$L_1 = L_3 = L; \quad C_2 = C \quad (35.53)$$

și căutăm ce condiție trebuie să fie satisfăcută între parametrii circuitului, pentru ca să existe o diferență de fază de $\pi/2$ între I_3 și U , oricare ar fi rezistențele R_3 și R_1 . Tensiunea la borne este:

$$\begin{aligned} U &= \left(Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} \right) I_1 = \left(Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} \right) \left(\frac{Z_3 + Z_2}{Z_2} \right) I_3 = \\ &= I_3 \left(Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2} \right). \end{aligned} \quad (35.54)$$

Explicitînd impedanțele cu relația (35.53), se obține:

$$U = I_3 [(1 - LC\omega^2)(R_1 + R_3) + j(2L\omega + R_1 R_3 C\omega - CL^2\omega^3)]. \quad (35.55)$$

Pentru ca defazajul între U și I_3 să fie $\frac{\pi}{2}$, partea reală a relației (35.55) trebuie să fie nulă, adică:

$$1 - LC\omega^2 = 0. \quad (35.56)$$

În figura 35.12, b e construită diagrama vectorială a circuitului defazor.

35.5.3. Circuite complet aperiodice. Se numesc *circuite complet aperiodice* circuitele a căror impedanță echivalentă complexă nu depinde de frecvență, deși au în structura lor elemente de circuit reactive. În cazul circuitului din figura 35.13, a, impedanța echivalentă complexă este:

$$Z_1 = \frac{r + j\omega L}{r + j\omega L} + \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C}} = \frac{jr \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) + 2 \frac{L}{C}}{r^2 + jr \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) + \frac{L}{C}}.$$

Se vede că impedanța e independentă de frecvență, dacă numitorul și numărătorul fracției sint egali și se simplifică. ceea ce are loc pentru :

$$\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (35.57)$$

În acest

$$Z_1 = r, \quad R_1, \quad X_1 = 0. \quad (35.58)$$

În cazul circuitului din figura 35.13, b, impedanța echivalentă complexă este :

$$Z_2 = \frac{(r + j\omega L) \left(r + \frac{1}{j\omega C} \right)}{j \left(\frac{1}{\omega C} \right)} = r \frac{+ j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) + \frac{L}{Cr}}{j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}.$$

Și în acest

dacă e satisfăcută condiția (35.57), și se obține :

$$Z_2 = r, \quad R_2 = r, \quad X_2 = 0. \quad (35.59)$$

35.6. Linia monofazătă scurtă de curent alternativ

Transmisiunea la distanță a energiei electrice dă posibilitatea utilizării surselor de energie depărtate de centrele de utilizare. În acest scop se utilizează *linii electrice* (fig. 35.14, a).

Dacă linia care leagă generatorul de receptor e scurtă (v. și cap. 53 și 54), ea poate fi înlocuită cu o schemă echivalentă R, L serie (fig. 35.14, b). Când este necesar să se țină seama și de impedanța interioară Z_1 a generatorului, se includ în parametrii liniei rezistența, respectiv reactanța bobinajului generatorului. În acest caz, totul se reduce la examinarea funcționării

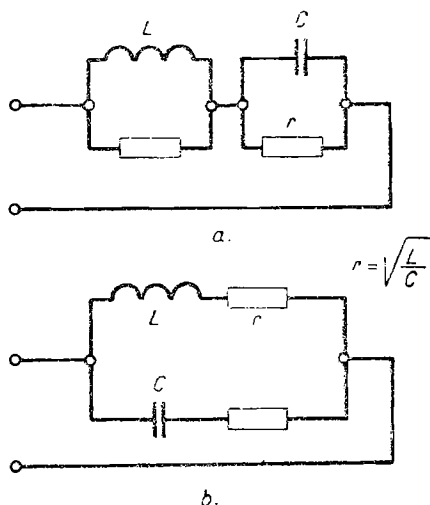


Fig. 35.13.

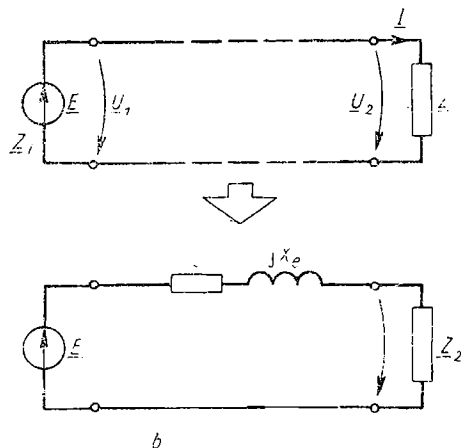


Fig. 35.14.

unui circuit serie, cu rezistența R_e și reactanța X_e , în serie cu un receptor de impedanță Z_2 (fig. 35.14, b). În practică se cunosc tensiunea la bornele receptorului $\underline{U}_2$ (tensiunea secundară) și impedanța de sarcină Z_2 , respectiv curentul $\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{Z_2} = \underline{I}$

Adesea, receptorul e caracterizat de puterea activă P_2 , tensiunea U_2 și factorul de putere $\cos \varphi_2$ (de ex. inductiv). Atunci curentul este $\underline{I}_2 = P_2 / U_2 \cos \varphi_2$, iar $Z_2 = \underline{U}_2 / \underline{I}_2 = \underline{U}_2^2 \cos \varphi_2 / P_2$.

Problema principală constă în examinarea relației între tensiunea generatorului $\underline{E}$ și tensiunea secundară $\underline{U}_2$, pentru a determina căderile de tensiune.

Diferența valorilor efective ale tensiunilor :

$$\delta U = E - U_2 \geq 0 \quad (35.60)$$

se numește *variație de tensiune*. Diferența tensiunilor complexe :

$$\Delta \underline{U} = \underline{E} - \underline{U}_2 \quad (35.61)$$

se numește *cădere geometrică de tensiune*. Schema echivalentă avînd toate elementele în serie, se poate scrie relația :

$$\underline{E} = (Z_2 + R_e + jX_e) \underline{I} = \underline{U}_2 + (R_e + jX_e) \underline{I} = \underline{U}_2 + \Delta \underline{U}, \quad (35.62)$$

din care, prin calcul în complex, rezultă $\underline{E}$ și $\Delta \underline{U}$.

Calculul se poate face și grafic. Diagrama vectorială a liniei este reprezentată în figura 35.15, considerînd tensiunea $\underline{U}_2$ origine de fază.

Din figura 35.15 se poate stabili relația :

$$E = OA = \sqrt{OC^2 + AC^2} = \sqrt{(U_2 + \Delta_1 U)^2 + (\Delta_2 U)^2}, \quad (35.63)$$

în care

$$BC = \Delta_1 U = R_e I \cos \varphi_2 \quad X_e I \sin \varphi_2 \quad (35.64)$$

se numește *cădere longitudinală de tensiune*, iar

$$AC = \Delta_2 U = R_e I \sin \varphi_2 + X_e I \cos \varphi_2 \quad (35.65)$$

se numește *cădere transversală de tensiune*.

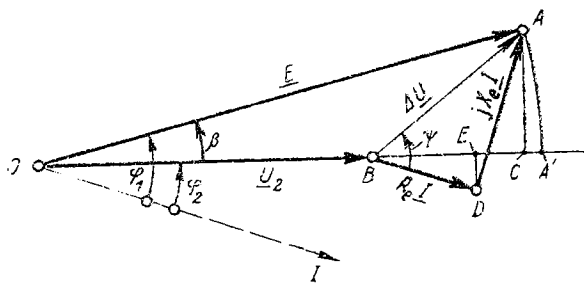


Fig. 35.15.

Se observă că variația de tensiune este dată de relația :

$$\begin{aligned} \delta U &= E - U_2 = BA' = \\ &= \sqrt{(U_2 + \Delta_1 U)^2 + (\Delta_2 U)^2} - \\ &\quad - U_2 \approx \Delta_1 U, \quad (35.66) \end{aligned}$$

deoarece, practic, $(\Delta_2 U)^2 \ll (U_2 + \Delta_1 U)^2$, căderile de tensiune în linie fiind mici față de tensiunea E , iar defazajul β dintre $\underline{E}$ și $\underline{U}$ de asemenea mic.

Valoarea efectivă a căderii geometrice de tensiune (fig. 35.15) este :

$$\Delta U = |\Delta \underline{U}| = BA = \sqrt{(\Delta_1 U)^2 + (\Delta_2 U)^2} \quad \delta U. \quad (35.67)$$

În mod practic interesează variația de tensiune, deoarece receptoarele sînt dimensionate pentru o anumită valoare efectivă a tensiunii U_2 . În rețelele de distribuție urbane de joasă tensiune se admite o variație de tensiune de 3—4% U_2 .

Dacă $\varphi_2 < 0$ (receptor capacitiv), tensiunea U_2 poate depăși tensiunea E ; după cum rezultă din (35.66) și (35.64), această situație se realizează dacă:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 < -\frac{R_e}{X_e} \quad (35.68)$$

În acest caz, variația de tensiune reprezintă o creștere de tensiune și nu o pierdere de tensiune ca în cazul din figura 35.15.

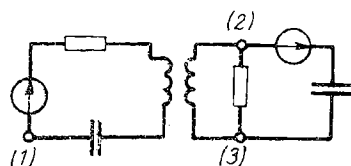
36. || TEOREMELE LUI KIRCHHOFF PENTRU REȚELELE DE CURENT ALTERNATIV

Ca și rețelele de curent continuu (v. par. 13.2, vol. I), rețelele de curent alternativ pot fi studiate cu ajutorul unor ecuații asociate nodurilor, respectiv ochiurilor, care rezultă din aplicarea unor teoreme, numite teoremele lui Kirchhoff — datorită analogiei formale pe care o prezintă cu teoremele similare din curent continuu. Pentru rețelele liniare, alcătuite exclusiv din elemente de circuit dipolare (cum am studiat mereu pînă acum), teoremele lui Kirchhoff constituie o bază teoretică completă, furnizînd un sistem de ecuații liniare în număr egal cu al necunoscutelor. Deoarece aplicarea acestor teoreme necesită adesea un volum mare de calcule, s-au elaborat și alte metode mai sistematice, mai rapide, sau mai adaptate unor probleme particulare (v. cap. 38). Este însă important să se rețină că orice problemă care se studiază cu aceste metode poate fi rezolvată și numai cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff.

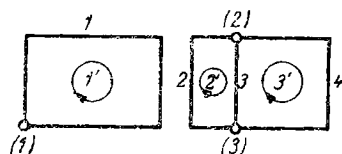
36.1. Teoremele lui Kirchhoff în valori instantanee

36.1.1. Elemente de topologia rețelelor (v. și par. 13.2.1, vol. I). Se numește *latură* orice porțiune mărginită și neramificată de rețea și *nod*, punctul de întîlnire a două sau mai multe laturi. În aplicații e util să se considere noduri numai punctele de întîlnire a trei sau mai multe laturi, cu excepția cazului unei laturi închise în ea însăși (v. ochiul din stînga al rețelei din fig. 36.1, a), care e mărginită de un nod comun ambelor ei capete și ales arbitrar [(1) din fig. 36.1]. Se numește *ochi* (bucă, contur, ciclu) o succesiune de laturi ale rețelei, alcătuiind o curbă închisă. O rețea se numește *conexă*, dacă oricare două noduri ale ei pot fi unite printr-o curbă, care trece numai prin laturi ale rețelei.

În curent alternativ interesează și rețelele neconexe (fig. 36.1, a), ale căror părți (subrețele) conexe, izolate unele de altele, pot interacționa prin inducție electromagnetică (cuplaj inductiv sau magnetic). Se numește *schemă topologică a rețelei* o schemă simplificată, în care structura laturilor nu mai e specificată, și acestea sînt figurate prin linii (fig. 36.1, b și 36.2). Pe schema topologică a unei rețele se pot studia toate proprietățile rețelei referitoare la relațiile dintre laturi, noduri și ochiuri. Laturile și ochiurile se consideră orientate, sensu-



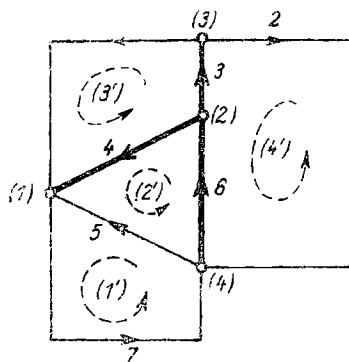
a.



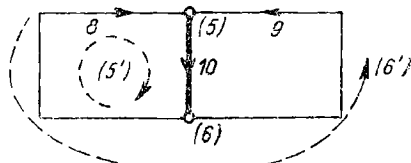
b.

$$S=2, L=4, N=3, O=3$$

Fig. 36.1



$$\begin{aligned} L &= 10 \\ N &= 6 \\ O &= 6 \\ S &= 2 \end{aligned}$$



b.

Fig. 36.2

rile de referință ale laturilor fiind indicate cu săgeți plasate pe laturi (uneori, alături), iar sensurile de referință ale ochiurilor fiind indicate cu arce de curbă deschisă dotate cu o săgeată și desenate înăuntrul sau în exteriorul ochiurilor (fig. 36.2).

Un ochi se numește *independent* față de un sistem dat de ochiuri, dacă existența lui nu poate fi dedusă din cunoașterea laturilor ochiurilor sistemului dat, ceea ce revine practic la faptul că orice integrală de contur scrisă pentru acest ochi nu poate fi exprimată ca o combinație liniară a unor integrale scrise pentru ochiurile sistemului dat. Se numește *sistem fundamental de ochiuri* independent un sistem de O ochiuri astfel alese încît fiecare dintre ele e independent față de celelalte, iar oricare ochi al rețelei, neapartenînd sistemului, nu e independent față de acesta. Ochipurile unui sistem fundamental furnizează numărul maxim de ecuații independente obținute, exprimînd integrale de contur. Pentru o rețea dată se pot găsi mai multe sisteme fundamentale de ochiuri, dar toate au *aceiași* număr O de ochiuri, număr ce constituie o caracteristică a rețelei.

Notăm cu L numărul de laturi, cu N numărul de noduri, cu S numărul de *subrețele conexe* și izolate ale rețelei. Se numește *arbore* al unei subrețele conexe o porțiune conexă a ei, care conține toate nodurile acesteia și nu conține nici un ochi. În figura 36.2 sînt desenate îngroșat laturile unor arbori ale subrețelor a și b. Un arbore are $N_s - 1$ laturi, dacă N_s e numărul de noduri ale subrețelei conexe considerate. În adevăr, cînd construim succesiv arborele din laturile lui, prima latură are două noduri (capetele ei), iar celelalte aduc fiecare cîte un nod (deoarece dacă nu ar avea capătul al doilea liber s-ar forma un ochi, ceea ce e exclus prin definiția arborelui). Se observă acum că dacă, pornind de la un arbore, se adaugă succesiv cîte o latură pentru a construi rețeaua definitivă, orice nouă latură astfel adăugată nu aduce nici un nod în plus (prin definiție arborele le cuprinde pe toate), dar aduce subrețelei cîte un ochi independent de celelalte și numai cîte unul. Numărul de laturi astfel adăugate e deci egal cu numărul O , al ochiurilor independente ale subrețelei

considerate. Numărul de laturi L_s al acestei subrețele conexe este egal cu numărul de laturi ale arborelui $N_s - 1$, plus numărul O_s al ochiurilor ei independente :

$$L_s = O_s + N_s - 1.$$

Scriind câte o astfel de ecuație pentru fiecare subrețea conexă și însumind cele S ecuații scrise, se obține pentru întreaga rețea relația :

$$L = O + N - S.$$

Sub forma :

$$\boxed{O = L - N + S}^1 \quad (36.1)$$

această relație permite determinarea numărului de ochiuri independente ale unei rețele date. Practic (deși nu e necesar), acestea se aleg astfel încît fiecare să aibă cite o latură care să nu aparțină celorlalte (în acest fel sîntem siguri de independența lor, iar dacă am ales O astfel de ochiuri independente, știm că le-am ales pe toate).

În cele ce urmează vom presupune că : toate laturile rețelei sînt numerotate într-o ordine dată, cu indicii curenți :

$$k, l, m, r, \quad t = 1, 2, \quad L, \quad (36.2)$$

toate nodurile rețelei sînt numerotate într-o ordine dată, cu indicii curenți.

$$b, \quad d = \quad (36.3)$$

toate ochiurile independente ale unui sistem fundamental, ales arbitrar, sînt numerotate într-o ordine dată :

$$p, q = 1, \quad O. \quad (36.4)$$

36.1.2. Prima teoremă a lui Kirchhoff. Unei suprafețe închise Σ_b care înconjură un nod oarecare (b) foarte aproape de nod, i se poate aplica teorema continuității (31.10), $i_\Sigma = 0$, curentul total $i_{\Sigma_b} = \iint_{\Sigma_b} \mathbf{J} d\mathbf{A}$, fiind în acest caz

suma algebrică a curenților laturilor care se întîlnesc în nod. Se obține astfel — ca și în curent continuu — prima teoremă a lui Kirchhoff :

Suma algebrică a valorilor instantanee ale curenților din laturile care se reunesc într-un nod este nulă :

$$\boxed{\sum_{k \in (b)} i_k = 0}^2 \quad (36.5)$$

În această sumă „algebrică”, curenților care ies din nod li se afectează semnul (+), iar celor care intră în nod, semnul (—); indicele k al laturii ia acele valori

¹ O relație de acest tip a fost stabilită prima dată de Euler pentru poliedre și de aceea (36.1) se mai numește *teorema lui Euler*.

² Semnul $\in$ e semnul de *apartenență*, folosit aici pentru a indica : latura k aparține mulțimii laturilor legate la nodul (b).

din șirul (36.2), care corespund laturilor legate la nodul (b) considerat. De exemplu, în cazul nodului din figura 36.3, prima teoremă a lui Kirchhoff se scrie :

$$i_1 - i_6 + i_7 + i_2 - i_{11} = 0.$$

Relația (36.5) a fost stabilită utilizând legea conservării sarcinii și aproximația regimului evasistaționar. În ea nu apar parametrii circuitelor. De aceea, această

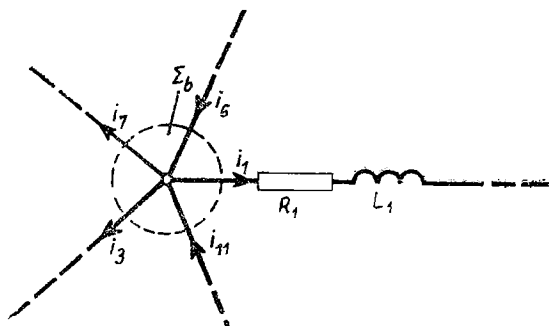


Fig. 36.3

relație e valabilă în regim evasistaționar pentru orice fel de circuite : liniare, parametrice, neliniare.

36.1.3. A doua teoremă a lui Kirchhoff. În lungul unei curbe închise Γ_p , compusă din succesiunea liniilor tensiunilor la borne u_{b_m} ale diferitelor laturi m ale unui ochi (p) (fig. 36.4), se poate calcula tensiunea electromotoare indusă

$$e_{\Gamma_p} = \oint_{\Gamma_p} \mathbf{E} d\mathbf{s}, \text{ egală, în acest caz,}$$

cu suma algebrică a tensiunilor la borne ale laturilor ochiului. Această tensiune electromotoare indusă e însă nulă, deoarece fluxul magnetic prin suprafața S_{Γ_p} sprijinită pe curba Γ_p e neglijabil, ca urmare a modului de alegere a liniilor tensiunilor la borne — care ocolesc regiunile de flux intens, localizate în bobine (v. și par. 31.2.2). Se obține astfel cea mai generală formă a celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff: *Suma algebrică a valorilor instantanee ale tensiunilor la bornele laturilor care alcătuiesc un ochi este nulă :*

$$\sum_{m \in (p)} u_{b_m} = 0. \quad (36.6)$$

În această sumă „algebrică”, tensiunilor la borne, al căror sens de referință e același cu sensul de integrare (sensul

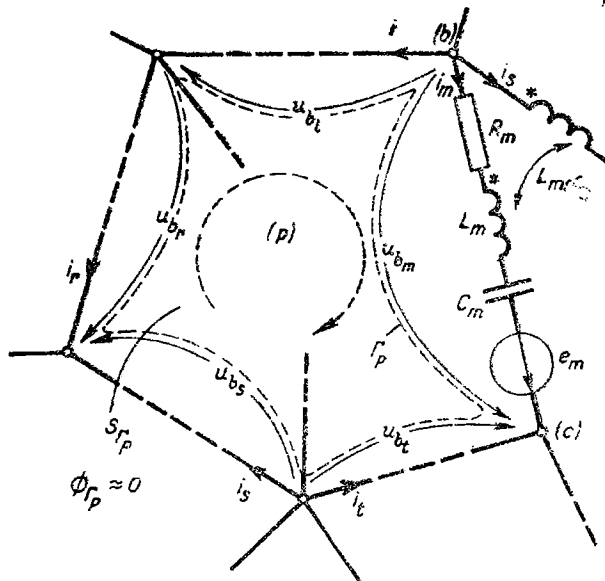


Fig. 36.4

¹ Semnul $\in$ e semnul de apartenență, folosit aici pentru a indica : latura m aparține mulțimii laturilor ochiului (p).

de referință al ochiului, numit și sens de scriere al ecuației), li se afectează semnul (+), iar celor al căror sens de referință e opus, semnul (—). Indicele m al laturii ia acele valori din șirul (36.2), care corespund laturilor ce aparțin ochiului (p) considerat.

De exemplu, în cazul ochiului din figura 36.4, relația (36.6) se scrie :

$$u_{b_m} - u_{b_t} + u_{b_s} - u_{b_r} - u_{b_l} = 0.$$

O altă formă generală a celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff se obține înlocuind tensiunile la borne cu valorile scoase din ecuațiile laturilor scrise sub forma relației (34.119), utilizată la deducerea teoremei lui Joubert :

$$u_{b_m} = u_{R_m} + u_{C_m} - \frac{d\Phi_m}{dt} = e_m. \quad (36.7)$$

În această relație, u_{b_m} tensiunea luată după regula de la receptoare pentru toate laturile rețelei, u_{R_m} e căderea de tensiune rezistivă din laturi, u_{C_m} e tensiunea condensatorului conectat în serie în latura m , este t.e.m. a generatorului din latură cu sensul de referință același cu al curentului i_m , iar Φ_m e fluxul magnetic total care înlanțuie latura (mai puțin fluxul care induce t.e.m. a generatorului).

Înlocuind relația (36.7) în relația (36.6) și separînd într-un membru t.e.m. ale generatoarelor, se obține o altă formă generală a primei teoreme a lui Kirchhoff :

Suma algebrică a valorilor instantanee ale tensiunilor electromotoare ale generatoarelor din laturile unui ochi e egală cu suma algebrică a căderilor de tensiune instantanee din acele laturi :

$$\sum_{m \in (p)} e_m = \sum_{m \in (p)} \left[u_{R_m} - u_{C_m} + \frac{d\Phi_m}{dt} \right]. \quad (36.8)$$

Accastă relație și relația (36.6) au fost stabilite utilizînd numai legi generale, și în ea nu apar explicit parametrii circuitului; de aceea ea este valabilă pentru orice fel de circuite : liniare, parametrice și neliniare.

Observație : Ecuația (36.8) poate fi dedusă și calculînd tensiunea electromotoare în lungul unei curbe care trece numai prin laturile ochiului (nu pe la borne, cum trecea curba Γ_p utilizată aici).

În cazul circuitelor liniare, căderile, de tensiune se pot exprima în funcție de curenți, introducînd parametrii circuitului în relațiile (31.22), (31.28), (31.15) :

$$u_{R_m} = R_m i_m; \quad u_{C_m} = \frac{q_m}{C_m} = \frac{1}{C_m} \int i_m dt; \quad \Phi_m = \sum_{s=1}^L L_{ms} i_s, \quad (36.9)$$

în care $R_m > 0$ este rezistența conductorului laturii, $C_m > 0$ este capacitatea condensatorului, $L_{mm} = L_m > 0$ este inductivitatea proprie a laturii, $L_{ms} \geq 0$ este inductivitatea mutuală dintre latura s și latura m ($L_{ms} = L_{sm}$), cu sensul corespunzător sensului de scriere al ecuației prin latura m și sensului curentului i_s din latura s , care induce. Dacă numai unul dintre aceste sensuri nu coincide cu cel

indicat de borna polarizată corespunzătoare valorii date a inductivității mutuale, semnul acestei valori trebuie schimbat.

Cu relația (36.9) se obține *a doua teoremă a lui Kirchhoff pentru circuite liniare*:

$$\sum_{m \in (p)} e_m = \sum_{m \in (p)} \left[R_m i_m + \frac{1}{C_m} \int i_m dt + \sum_{s=1}^L L_{ms} \frac{di_s}{dt} \right], \quad (36.10)$$

sau, explicitînd căderea de tensiune de inducție proprie ($s = m$),

$$\sum_{m \in (p)} e_m = \sum_{m \in (p)} \left[R_m i_m + \frac{1}{C_m} \int i_m dt + L_m \frac{di_m}{dt} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq m}}^L L_{ms} \frac{di_s}{dt} \right]. \quad (36.10')$$

36.1.4. Observații privitoare la aplicarea teoremelor lui Kirchhoff. a) Cu ajutorul acestor teoreme se obțin $N - S$ ecuații independente de noduri (deoarece în fiecare din cele S subrețele conexe, ultimul nod — în care intră numai curenți ale căror valori au mai intrat în ecuațiile altor noduri cu semn schimbat — conduce la o ecuație care e egală cu suma cu semn schimbat a celorlalte ecuații de noduri, și deci nu e independentă de ele); $O = L - N + S$ ecuații independente de ochiuri. Rezultă în total $O + N - S = L$ ecuații integro-diferențiale. În rețele liniare, acest sistem de ecuații are L funcțiuni necunoscute: curenții $i(t)$ ai laturilor și problema are o soluție unică (în regim tranzitoriu, după precizarea condițiilor inițiale).

b) În ecuațiile obținute din cea de-a doua teoremă a lui Kirchhoff toți termenii au semnul (+), respectiv (—), după cum sensul de referință al mărimii respective coincide sau nu cu sensul de scriere al ecuației. Din cauza convenției suplimentare, pe care o implică semnul unei inductivități mutuale (v. par. 34.4.3), termenii de forma $L_{ms} \frac{di_s}{dt}$ au semnul

hotărît de corespondența dintre sensul de scriere din ochiul cu latura m și sensul curențului din latura s , de o parte, și sensurile indicate de bornele polarizate, de altă parte — cum s-a precizat mai sus.

c) Aplicarea teoremelor se face (ca în curent continuu) alegînd sensuri de referință arbitrare pe laturi, alegînd ochiurile independente și sensurile de referință arbitrare pentru ele, scriînd ecuațiile și rezolvînd sistemul astfel obținut.

d) Teorema a doua a lui Kirchhoff se poate scrie și pentru un ochi care nu se închide numai prin laturi, ci și — pe o anumită porțiune — prin dielectric, direct între două borne. În acest caz, tensiunea dintre aceste borne nu mai poate fi explicitată în funcție de curenți și rămîne în ecuația (36.6) neînlocuită cu relația (36.7). Ecuația finală (36.8), respectiv relațiile (36.10), va cuprinde în membrul drept, alături de căderile de tensiune din laturile ochiului, și tensiunea dintre bornele prin care se închide acest ochi.

e) Cea mai bună verificare a scrierii și rezolvării corecte a ecuațiilor o constituie verificarea bilanțului puterilor (v. cap. 37).

Aplicație: Ecuațiile transformatorului. Considerăm un ansamblu de două bobine cuplate, constituind un transformator electric (fără miez de fier, pentru ca inductivitățile să fie constante — v. fig. 36.5, a). Schema echivalentă e desenată în figura 36.5, b; în această schemă, r_1 și r_2 sînt rezistențele conductoarelor înfășurărilor, L_1 și L_2 sînt inductivitățile acestor

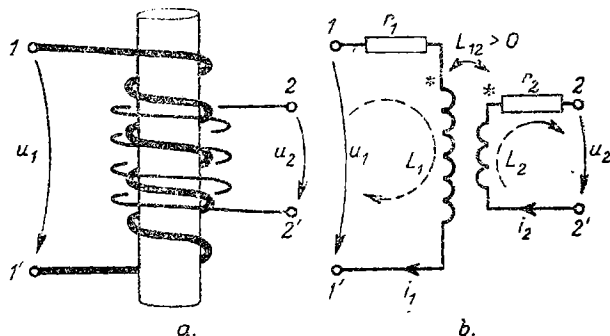


Fig. 36.5

înfășurări, iar L_{12} , inductivitatea mutuală. Bornele polarizate au fost astfel alese, încît, în raport cu ele, $L_{12} > 0$ (în cazul cînd curenții ar intra prin aceste borne, ar da fluxuri în același sens prin miez — cum rezultă din figura 36.5, a). Alegem sensurile de referință ale tensiunilor la borne și ale curenților după regula de la receptoare la prima bobină și după regula de la generatoare la a doua — transformatorul constituind o celulă intermediară într-un lanț de transmisiune a energiei electromagnetice. Alegem sensurile de referință pe cele două ochiuri închise cu liniile tensiunilor la borne. Ecuațiile de ochiuri (36.9) sînt, în acest caz (cu $e_1 = e_2 = 0$, deoarece nu avem generatoare):

$$\left. \begin{aligned} 0 &= r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - L_{12} \frac{di_2}{dt} - u_1 \\ 0 &= r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - L_{21} \frac{di_1}{dt} - u_2 \end{aligned} \right\} (L_{12} = L_{21})$$

(semnul minus din fața lui L_{12} rezultă din regula indicată la punctul b de mai sus), sau :

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - L_{12} \frac{di_2}{dt} \\ -u_2 &= r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - L_{21} \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (36.11)$$

pentru verificare înmulțim prima ecuație cu i_1 , a doua cu i_2 și adunăm ecuațiile: se obține relația :

$$u_1 i_1 - u_2 i_2 = r_1 i_1^2 - r_2 i_2^2 + \frac{d}{dt} \left[\overbrace{\frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + (-L_{12}) i_1 i_2}^{W^{(m)}} \right]. \quad (36.12)$$

Diferența dintre puterea $u_1 i_1$ primită pe la borne de prima bobină (deoarece am folosit convenția de la receptoare) și puterea $u_2 i_2$ cedată pe la borne (deoarece am folosit convenția de la generatoare) de a doua bobină este disipată în parte în rezistențele înfășurărilor ($r_1 i_1^2 + r_2 i_2^2$) și acumulată în parte în cîmpul magnetic al bobinelor, a cărei energie e $W^{(m)}$ (v. rel. 31.17). Semnul ($-$) din fața inductivității mutuale L_{12} rezultă din faptul că sensul curentului i_2 iese din borna polarizată respectivă, în loc să intre ca i_1 valoarea inductivității mutuale în raport cu sensurile curenților este ($-L_{12}$).

36.2. Forma complexă a teoremelor lui Kirchhoff

Pentru circuite liniare în regim permanent sinusoidal de pulsație ω se pot reprezenta în complex simplificat relațiile (36.5), (36.6) și (36.10), folosind notațiile :

$$\begin{aligned} \underline{u}_k &= I_k \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma_k) \iff \underline{I}_k = I_k e^{j\gamma_k} \\ \underline{u}_{b_m} &= U_{b_m} \sqrt{2} \sin(\omega t + \beta_m) \iff \underline{U}_{b_m} = U_{b_m} e^{j\beta_m} \\ \underline{e}_m &= E_m \sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha_m) \iff \underline{E}_m = E_m e^{j\alpha_m} \end{aligned} \quad (36.13)$$

și regulile de transpunere a operațiilor elementare (34.81...84).

36.2.1. Forma complexă a primei teoreme a lui Kirchhoff. Reprezentînd în complex, cu notațiile (36.13), ecuația (36.5), se obține expresia :

$$\left[\sum_{k \in (b)} \underline{I}_k = 0 \right], \quad (36.14)$$

care se enunță: *Suma algebrică a imaginilor în complex ale curenților din laturile care se reunesc într-un nod este nulă.* Convențiile privitoare la semn sînt aceleași ca la valori instantanee. Deoarece modulul unei sume nu este egal cu suma modulelor termenilor, o relație de forma (36.14) nu se poate scrie pentru valorile efective (reale)

$$\sum_{k \in (b)} I_k \neq 0$$

36.2.2. *Forma complexă a teoremei a doua a lui Kirchhoff.* Reprezentînd în complex, cu notațiile (36.13), ecuația (36.6), se obține enunțul cel mai general al teoremei

$$\sum_{m \in (p)} U_m = 0. \quad (36.15)$$

Suma algebrică a imaginilor în complex ale tensiunilor la bornele laturilor care alcătuiesc un ochi este nulă. Convențiile privitoare la semn sînt aceleași ca la valori instantanee. Și în acest caz, relația nu e valabilă între valori efective:

$$\sum_{m \in (p)} U_m \neq 0.$$

Reprezentînd în complex ecuația (36.10), cu notațiile (36.13), se obține relația

$$\sum_{m \in (p)} E_m = \sum_{m \in (p)} \left[R_m I_m + \frac{1}{j\omega C_m} I_m + \sum_{s=1}^L j\omega L_{ms} I_s \right]. \quad (36.16)$$

Dar

$$\sum_{s=1}^L j\omega L_{ms} I_s = j\omega L_{m,m} I_m + \sum_{\substack{s=1 \\ (s \neq m)}}^L j\omega L_{ms} I_s$$

și relația (36.16) se scrie:

$$\sum_{m \in (p)} E_m = \sum_{m \in (p)} \left[\left(R_m + j\omega L_m + \frac{1}{j\omega C_m} \right) I_m + \sum_{\substack{s=1 \\ (s \neq m)}}^L j\omega L_{ms} I_s \right]. \quad (36.17)$$

Suma algebrică a imaginilor în complex ale tensiunilor electromotoare ale generaatoarelor e egală cu suma algebrică a căderilor de tensiune complexe din acele laturi. Căderile de tensiune pot fi rezistive ($R_m I_m$), inductive ($j\omega L_m I_m$), capacitive ($\frac{1}{j\omega C_m} I_m$) sau induse mutual ($j\omega L_{ms} I_s$) de alți curenți. Convențiile privitoare la semn sînt aceleași ca la valori instantanee.

Teorema a doua a lui Kirchhoff se poate scrie strîns, introducînd impedanța proprie a laturii:

$$Z_m = Z_{mm} = R_m + j\omega L_m + \frac{1}{j\omega C_m} \quad (36.18)$$

și impedanța mutuală dintre latura s și latura m

$$Z_{ms} = j\omega L_{ms}. \quad (36.19)$$

Cu aceste notații relația (36.18) se scrie :

$$\sum_{m \in (p)} \underline{E}_m = \sum_{m \in (p)} \left(\underline{Z}_m \underline{I}_m + \sum_{\substack{s=1 \\ (s \neq m)}}^L \underline{Z}_{ms} \underline{I}_s \right) \quad (36.20)$$

sau mai strâns :

$$\sum_{m \in (p)} \underline{E}_m = \sum_{m \in (p)} \sum_{s=1}^L \underline{Z}_{ms} \underline{I}_s. \quad (36.21)$$

Observații: a) Prima sumă relativă la ochiul (p) se face asupra tuturor indiciilor m ai laturilor care aparțin ochiului (p). A doua sumă, în s , se face asupra tuturor laturilor rețelei (inclusiv $s = m$). Dacă o latură s nu e cuplată inductiv cu vreuna din laturile ochiului (p), curentul respectiv nu apare în ecuația acestui ochi, deoarece $\underline{Z}_{ms} = 0$.

b) Dacă se scrie explicit această relație, se observă că fiecare dintre impedanțele mutuale ale laturilor ochiului (p) cu laturi exterioare ochiului (p) apare o singură dată, în timp ce o impedanță mutuală $\underline{Z}_{ms}$ între laturi m și s , care aparțin ambele ochiului (p), apare de două ori: o dată în termenul $\underline{Z}_{ms} \underline{I}_s$ și a doua oară în termenul $\underline{Z}_{sm} \underline{I}_m$.

c) Comparînd relația (36.20) cu teorema a doua a lui Kirchhoff din curent continuu $\Sigma E_m = \Sigma R_m I_m$, se constată că singura deosebire de ordin formal între aceste relații decurge din existența, în curent alternativ, a impedanțelor mutuale $\underline{Z}_{ms}$.

36.2.3. Rezolvarea rețelelor, în complex, cu teoremele lui Kirchhoff. Metoda generală de rezolvare a rețelelor liniare de curent alternativ sinusoidal, cu reprezentare în complex, consistă în utilizarea sistemului de L ecuații Kirchhoff independente :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in (b)} \underline{I}_k &= 0 & b &= 1, 2, \dots, N - S = L - O \\ \sum_{m \in (p)} \left[\sum_{s=1}^L \underline{Z}_{ms} \underline{I}_s \right] &= \sum_{m \in (p)} \underline{E}_m & p &= 1, 2, \dots, O \end{aligned} \quad (36.22)$$

În rețelele disipative (cum sînt rețelele electrice obișnuite, în care totdeauna $R_m > 0$), acest sistem are o soluție unică, adică există un singur sistem de curenți complecși $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \dots, \underline{I}_L$ care îl satisfac (la t.e.m. date).

În adevăr, din teoria sistemelor de ecuații algebrice de gradul I, se știe că soluția unui sistem neomogen de L ecuații cu L necunoscute e unică, dacă sistemul omogen corespunzător nu are decît soluția identic nulă; în caz contrar, o soluție a sistemului omogen poate fi suprapusă cu o soluție a sistemului neomogen și s-ar obține o a doua soluție a sistemului neomogen. În cazul sistemului (36.22), sistemul omogen e acela obținut cu $\underline{E}_m = 0$ ($m = 1, 2, \dots, L$) și corespunde cazului fizic al unei rețele fără surse. Dar o rețea liniară disipativă fără surse nu poate avea curenți de regim permanent, din cauza dezvoltării ireversibile de energie în rezistențele laturilor (prin efect Joule-Lenz), care cere un aport mediu constant de energie din exterior.

În rețele nedisipative (pur reactive, fără rezistențe), soluția sistemului (36.22) poate să nu fie unică. Acest rezultat se explică prin faptul că în astfel de rețele regimul liber nu e amortizat, regimul tranzitoriu nu se stinge niciodată și regimul permanent consistă în suprapunerea regimului forțat (hotărât de sursele sinusoidale date) cu regimul liber, periodic, determinat de condițiile inițiale și de frecvențele proprii ale rețelei. În acest caz, sistemul de curenți care circulă la un moment dat prin laturile rețelei, la t.e.m. date depinde de condițiile inițiale: de exemplu, de ordinea închiderii întreruptoarelor de alimentare.

La aplicarea ecuațiilor (36.22) se urmează aceleași etape ca și în cazul teoremelor scrise cu valori instantanee (par. 36.14), cu observația că înainte de a scrie ecuațiile e necesar să se calculeze imaginile în complex ale tensiunilor electromotoare date — pornind de la o singură formă normală (în sinus sau în cosinus) a valorilor lor instantanee. După rezolvarea ecuațiilor în complex, trecerea inversă la valorile instantanee ale curenților se face cu aceeași formă normală.

Verificarea calculului se face fie scriind ecuații suplimentare pe ochiuri neutilizate inițial, ecuații care trebuie să fie identic satisfăcute cu soluțiile complexe obținute, fie — mai complet — verificând bilanțul puterilor complexe (v. par. 37 și aplicația 37.3.3.).

Dacă în problema dată se cere o tensiune u , cu imaginea U , între două noduri oarecare (b) și (d) se scrie ecuația a doua a lui Kirchhoff pe un ochi constituit din laturile ale rețelei și închis prin linia acestei tensiuni (v. aplicația 36.3.3.).

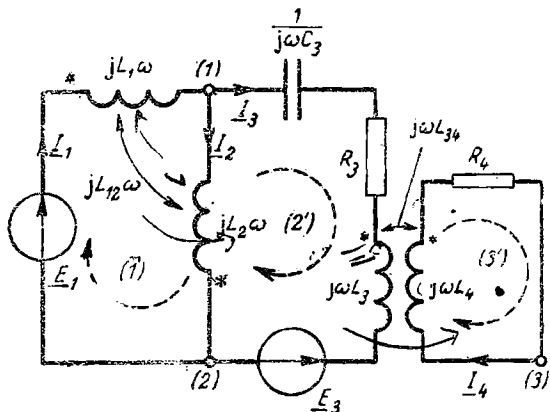


Fig. 36.6

subrețele conexe și $O = L - N + S = 3$ ochiuri independente. Vom avea $N - S = 1$ ecuații de noduri (de ex. pentru nodul (1) și $O = 3$ ecuații de ochiuri pentru ochiurile (1'), (2'), (3') alese.

Alegem sensurile de referință pentru curenții de laturi I_1, I_2, I_3, I_4 și sensurile de scriere pe ochiuri. Ecuațiile sînt

$$\begin{cases} (1) & I_2 + I_3 - I_1 = 0 \\ (1') & E_1 = j\omega L_1 I_1 - j\omega L_{12} I_2 + j\omega L_{21} I_2 - j\omega L_{21} I_1 \\ (2') & -E_3 = \left(R_3 + j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_3} \right) I_3 - j\omega L_{34} I_4 - j\omega L_{21} I_1 \\ (3') & 0 = (R_4 + j\omega L_4) I_4 - j\omega L_{43} I_3. \end{cases} \quad (36.23)$$

La rezolvarea acestui sistem de patru ecuații cu patru necunoscute e preferabil să eliminăm curențul $I_1 = I_2 + I_3$ (conform cu (1)) din ecuațiile de ochiuri (1'), (2'), (3'), pentru a obține un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute — la care se poate aplica regula lui Cramer, fără a fi nevoie să se opereze cu determinanți de ordin mai mare decît trei.

36.3. Aplicații

36.3.1. Scrierea ecuațiilor literale pentru rețeaua din figura 36.6. Rețeaua are $L=4$ laturi, $N=3$ noduri, $S=2$

36.3.2. Impedanța echivalentă a transformatorului în sarcină (fig. 36.7). În acest caz,

$$N = 2, L = 2, S = 2, \text{ și } O = L - N + S = 2$$

ecuații independente de ochiuri.

Scriem ecuațiile cu ochiurile închise pe liniile tensiunilor la borne:

$$\begin{cases} 0 = (R_1 + j\omega L_1)I_1 - j\omega L_{12}I_2 - U_1 \\ 0 = (R_2 + j\omega L_2)I_2 - j\omega L_{21}I_1 + U_2 \end{cases} \quad (36.24)$$

Aceste ecuații sînt imaginile în complex ale ecuațiilor (36.11). Ele se scriu sub forma:

$$\begin{cases} U_1 = Z_1 I_1 - Z_{12} I_2 \\ -U_2 = Z_2 I_2 - Z_{21} I_1 \end{cases} \quad (36.25)$$

în care $Z_{12} = Z_{21} = j\omega L_{12}$ e impedanța mutuală, $Z_1 = R_1 + j\omega L_1$ e impedanța proprie a primarului, iar $Z_2 = R_2 + j\omega L_2$ e impedanța proprie a secundarului.

Dacă valoarea algebrică a inductivității mutuale L_{12} ar fi fost definită în raport cu sensurile de referință luate pentru curenți, semnul din fața lui Z_{12} ar fi fost (+), dar aceea valoare a inductivității mutuale ar fi fost negativă ($L_{12} < 0$) pentru înfășurări realizate ca în figura 36.5, a (cu tensiuni u_1 și u_2 practic în fază).

Dacă la bornele secundare ale transformatorului e conectată o sarcină de impedanță echivalentă Z_s ,

$$U_2 = Z_s I_2 \quad (36.26)$$

și ecuațiile transformatorului devin:

$$\begin{cases} U_1 = Z_1 I_1 - Z_{12} I_2 \\ 0 = (Z_2 + Z_s) I_2 - Z_{21} I_1 \end{cases} \quad (36.27)$$

Calculăm impedanța echivalentă de intrare a transformatorului:

$$Z_{e1} = \frac{U_1}{I_1} \quad (36.28)$$

Din a doua ecuație (36.27) se obține:

$$I_2 = \frac{Z_{12}}{Z_2 + Z_s} I_1 \quad (36.29)$$

și introducînd această valoare în prima ecuație (30.27), se obține:

$$Z_{e1} = Z_1 - \frac{Z_{12}^2}{Z_2 + Z_s} = Z_1 + \frac{\omega^2 L_{12}^2}{Z_2 + Z_s} \quad (36.30)$$

36.3.3. Rezolvarea numerică a unei rețele. Datorită caracterului complex al ecuațiilor, rezolvarea lor literală conduce la calcule extrem de laborioase. De aceea, în aplicații se preferă scrierea de la început a ecuațiilor sub formă numerică și rezolvarea lor sub această formă. Ca exemplu, studiem rețeaua din figura 36.8, a, în care parametrii de circuit și t.e.m. ale generatoarelor sînt:

$$\left. \begin{aligned} R_1 = R_2 = 20 \Omega; L_1 = 0,0318 \text{ H}; L_2 = L_4 = 0,0636 \text{ H}; \\ L_{12} = +0,0318 \text{ H}; C_3 = 159 \mu\text{F}; \\ e_1 = 10 \sqrt{2} \sin \omega t; e_2 = 50 \sqrt{2} \cos(\omega t - \pi); f = \frac{\omega}{2\pi} = 50 \text{ Hz.} \end{aligned} \right\} \quad (36.31)$$

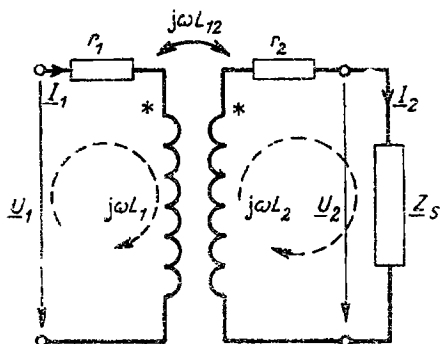


Fig. 36.7

Calculăm reactanțele bobinelor și condensatoarelor :

$$\omega L_1 = \omega L_{12} = 10 \Omega; \quad \omega L_2 = \omega L_1 = 20 \Omega; \quad \frac{1}{\omega C_3} = -20 \Omega \quad (36.32)$$

și imaginile în complex ale t.e.m. :

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= 10 \sqrt{2} \sin \omega t \rightleftharpoons \underline{E}_1 = 10e^{j0} = 10 \\ e_2 &= 50 \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \rightleftharpoons \underline{E}_2 = 50e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j50. \end{aligned} \right\} \quad (36.33)$$

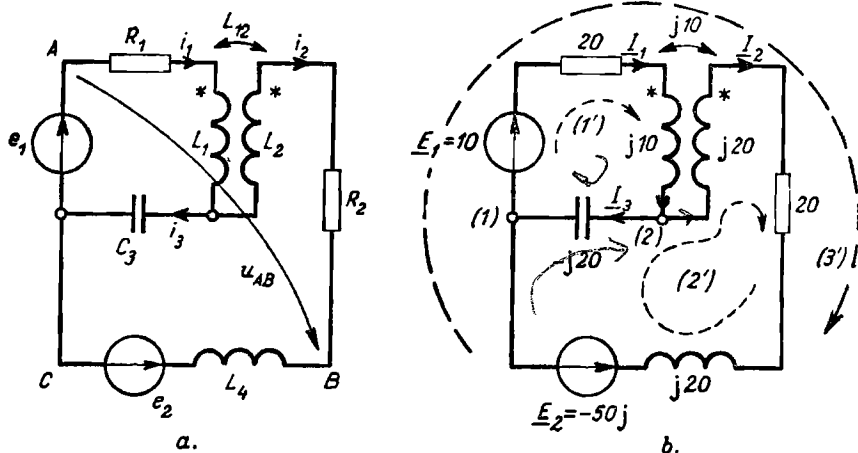


Fig. 36.8

Pentru scrierea directă a ecuațiilor numerice e util să notăm schema cu valorile complexe ale impedanțelor și t.e.m. (fig. 36-8, b). Alegem sensurile de referință ale curenților I_1 , I_2 , I_3 și ochiurile independente (1') și (2'), știind că $O = L - N + S = 3 - 2 + 1 = 2$. Substituind direct pe $I_3 = I_1 - I_2$ (scos din ecuația nodului (1)) ecuațiile de ochiuri în complex sînt :

$$\begin{aligned} 10 &= (20 + j10)I_1 - j10I_2 - j20(I_1 - I_2) \\ -(-50j) &= -(-j20)(I_1 - I_2) + (20 + j20 + j20)I_2 - j10I_1 \\ \left. \begin{aligned} 10 &= (20 - j10)I_1 + j10I_2 \\ j50 &= j10I_1 + (20 + j20)I_2 \end{aligned} \right\} \quad (36.34) \end{aligned}$$

cu soluțiile :

$$I_1 = 1; \quad I_2 = 1 + j = \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad I_3 = I_1 - I_2 = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}. \quad (36.35)$$

Valorile instantanee ale curenților sînt (cu 34.78) :

$$\begin{aligned} i_1 &= \text{Im} \{ \sqrt{2} e^{j\omega t} \} = \sqrt{2} \sin(\omega t) \\ i_2 &= \text{Im} \{ \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \sqrt{2} e^{j\omega t} \} = 2 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right) \\ i_3 &= \text{Im} \{ e^{-j\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} e^{j\omega t} \} = \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (36.36)$$

Observații: a) Pentru a verifica rezultatele, scriem ecuația ochiului exterior (3'):

$$\begin{aligned} 10 - (-50j) &= (20 + j 10)I_1 - j 10I_2 + (20 + j 40)I_2 - j 10I_1 \\ 10 + 50j &= 20I_1 + (20 + j 30)I_2 = 20(1) + (20 + j 30)(1 + j) \end{aligned} \quad (36.37)$$

care cu relația (36.35) e satisfăcută identic.

b) O verificare mai completă se face cu bilanțul puterilor complexe (v. 37.3).

c) După determinarea curenților putem afla oricare dintre căderile de tensiune din circuit. Să presupunem că se cere tensiunea u_{AB} (fig. 36.8. a). Scriem atunci teorema a doua a lui Kirchhoff pe ochiul ABC , închis prin laturi și prin linia acestei tensiuni la borne:

$$\underline{E}_1 - \underline{E}_2 = \underline{U}_{AB} + j\omega L_4 I_2, \quad (36.38)$$

de unde:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{E}_1 - \underline{E}_2 - j\omega L_4 I_2 = 10 - (-j 50) - j 20(1 + j) = 30 \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}},$$

iar

$$u_{AB} = \text{Im} \left\{ 30 \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \sqrt{2} e^{j\omega t} \right\} = 60 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right). \quad (36.39)$$

37. || CONSERVAREA PUTERILOR ÎN REȚELELE DE CURENT ALTERNATIV

Teoremele conservării puterilor se exprimă prin relații care sînt consecințe analitice ale teoremelor lui Kirchhoff fără alte ipoteze. Aceste relații se interpretează pe baza legii transformării de energie în conductoare (rel. 31.19 și 31.20), a teoremei energiei electrice (rel. 31.16), a teoremei energiei magnetice (rel. 31.17), a teoremei transferului de putere la borne (rel. 31.21).

37.1. Teorema conservării puterilor instantanee

37.1.1. Forma generală a teoremei. Fie o rețea electrică, constituită exclusiv din elemente dipolare de circuit, și ale cărei laturi nu sînt cuplate magnetic cu exteriorul. Rețeaua nu este însă izolată și presupunem, pentru generalitate, că fiecare nod (c) = 1, 2, ..., N constituie cîte o bornă de acces, în el fiind injectat din exterior¹ curentul instantaneu $i_c^{(ex)}$. Conform teoremei transferului de putere la borne (rel. 31.21), rețeaua primește din exterior puterea instantanee:

$$p_b = \sum_{c=1}^N v_c i_c^{(ex)} \quad (37.1)$$

¹ Faptul că un nod (a) nu e conectat în exterior, se ia în considerare punînd $i_a^{(ex)} = 0$.

unde v_c sînt potențialele nodurilor ei față de un punct arbitrar¹ (de obicei, ultimul nod — v. fig. 37.1).

Din teorema întâia a lui Kirchhoff, scrisă pentru nodul (c), rezultă :

$$i_c^{(ex)} = \sum_{m \in (c)} i_m, \quad (37.2)$$

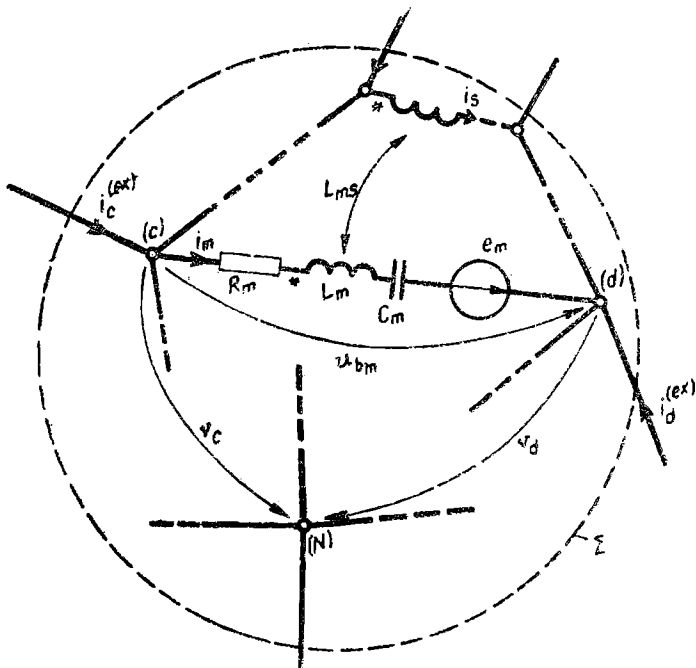


Fig. 37.1

suma algebrică din membrul al doilea fiind luată numai asupra laturilor interioare ale rețelei conectate la nod. Înlocuind relația (37.2) în relația (37.1) și ordonînd suma dublă după indicii $m = 1, 2, \dots, L$ ai curenților laturilor, se obține o sumă simplă în m , al cărei fiecare termen conține curentul i_m , dat factor comun pe lângă toate potențialele nodurilor din care „iese” acest curent. Deoarece o latură are numai două capete, există numai două astfel de noduri, de exemplu, (c) și (d), și anume unul (c), din care curentul iese (în care caz potențialul v_c înmulțește curentul i_m), și unul (d), în care curentul intră (în care caz potențialul v_d înmulțește curentul $-i_m$). Rezultă deci egalitatea :

$$P_i = \sum_{c=1}^N \sum_{m \in (c)} v_c i_m = \sum_{m=1}^L i_m (v_c - v_d). \quad (37.3)$$

¹ Aceste potențiale se calculează (ca și tensiunile la borne u_b) pe curbe, ale căror puncte sînt depărtate de regiunile de flux magnetic intens din bobine și generatoare — ceea ce e totdeauna posibil, dacă rețeaua nu e cuplată inductiv cu exteriorul. De asemenea, curba închisă, determinată de linia tensiunii la borne a unei laturi și liniile de calcul al potențialelor capetelor laturii, nu trebuie să înlănțuie fluxuri magnetice.

Diferența de potențiale în această ordine e însă chiar tensiunea la bornele laturii, luată după regula de la receptoare (v. fig. 37.1) :

$$u_{b_m} = v_c - v_d. \quad (37.4)$$

Astfel se obține forma generală a teoremei conservării puterilor instantanee :

$$P_b = \sum_{c=1}^N v_c i_c^{(ex)} = \sum_{m=1}^L u_{b_m} i_m \quad (37.5)$$

Puterea primită pe la bornele de acces de o rețea necuplată inductiv cu exteriorul e egală cu suma puterilor instantanee, primite de laturi pe la borne.

37.1.2. Conservarea puterilor instantanee în rețele liniare. În acest caz, tensiunea la borne se exprimă cu relațiile (36.7) și (36.9) sub forma :

$$u_{b_m} = u_{R_m} + u_{C_m} + \frac{d\Phi_m}{dt} = R_m i_m + \frac{q_m}{C_m} + \sum_{s=1}^L L_{ms} \frac{di_s}{dt} - e_m. \quad (37.6)$$

Înlocuim această expresie în relația (37.5) și formăm derivate în raport cu timpul, ținând seama că R_m , C_m , L_{ms} sînt constante, iar $i_m = \frac{dq_m}{dt}$. Se obține relația :

$$\sum_{c=1}^N v_c i_c^{(ex)} + \sum_{m=1}^L e_m i_m = \sum_{m=1}^L R_m i_m^2 + \frac{d}{dt} \left[\sum_{m=1}^L \frac{q_m^2}{2C_m} \right] + \sum_{m=1}^L \sum_{s=1}^L L_{ms} i_m \frac{di_s}{dt}. \quad (37.7)$$

Suma dublă se poate descompune în doi termeni egali, iar în al doilea dintre aceștia se pot permuta indicii muți între ei (notarea indicilor și ordinea de sumare nu prezintă importanță la calculul unei sume multiple) și se poate înlocui $L_{sm} = L_{ms}$:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^L \sum_{s=1}^L L_{ms} i_m \frac{di_s}{dt} &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^L \sum_{s=1}^L L_{ms} i_m \frac{di_s}{dt} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^L \sum_{m=1}^L L_{sm} i_s \frac{di_m}{dt} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^L \sum_{s=1}^L L_{ms} \left(i_m \frac{di_s}{dt} + i_s \frac{di_m}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left[\sum_{m=1}^L \sum_{s=1}^L \frac{L_{ms} i_m i_s}{2} \right]. \end{aligned} \quad (37.8)$$

Cu aceasta, relația (37.7) ia forma :

$$\sum_{c=1}^N v_c i_c^{(ex)} + \sum_{m=1}^L e_m i_m = \sum_{m=1}^L R_m i_m^2 + \frac{d}{dt} \left[\sum_{m=1}^L \frac{q_m^2}{2C_m} + \sum_{s=1}^L \sum_{m=1}^L \frac{L_{ms} i_m i_s}{2} \right]. \quad (37.9)$$

Interpretarea termenilor acestei relații rezultă imediat cu relațiile (37.1), (31.20), (31.19), (31.16) și (31.17) și se poate scrie :

$$P_b + P_g = P_R + \frac{d}{dt} [W^{(m)} + W^{(e)}]. \quad (37.10)$$

Relația (37.9) cu interpretarea relației (37.10) reprezintă expresia *teoremei conservării puterilor instantanee în rețele liniare*:

Suma dintre puterea primită instantaneu pe la bornele rețelei p_b (v.37.1) și puterea debitată instantaneu de generatoare

$$P_g = \sum_{m=1}^L e_m i_m \quad (37.11)$$

este egală cu suma dintre puterea disipată instantaneu prin efect Joule-Lenz

$$P_R = \sum_{m=1}^L R_m i_m^2 \quad (37.12)$$

și viteza de variație a energiei electromagnetice instantanee, acumulată în câmpul magnetic al bobinelor

$$W^{(m)} = \sum_{m=1}^L \sum_{s=1}^L \frac{L_{ms} i_m i_s}{2} = \sum_{m=1}^L \frac{L_m i_m^2}{2} + \sum_{m < s} L_{ms} i_m i_s^1 \quad (37.13)$$

și în câmpul electric al condensatoarelor rețelei

$$W^{(e)} = \sum_{m=1}^L \frac{q_m^2}{2C_m} = \sum_{m=1}^L \frac{C_m u_{Cm}^2}{2}. \quad (37.14)$$

Această teoremă generalizează bilanțul puterilor instantanee (33.114) al unei laturi de circuit.

37.1.3. *Conservarea puterilor instantanee la o rețea izolată.* În cazul unei rețele fără borne de acces, și deci izolată electric de exterior, puterea $p_b = 0$ și cele două expresii (37.5) și (37.10) ale teoremei capătă formele:

$$\boxed{\sum_{m=1}^L u_{b_m} i_m = 0} \quad (37.15)$$

$$P_g = P_R + \frac{d}{dt} [W^{(m)} + W^{(e)}]. \quad (37.16)$$

37.2. Teoremele conservării puterilor complexe, active și reactive

37.2.1. *Puterea complexă, puterea activă și puterea reactivă.* În regim permanent sinusoidal, curenții și tensiunile sînt de forma:

$$i_m = I_m \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma_m) \iff \underline{I}_m = I_m e^{j\gamma_m} \quad (37.17)$$

$$i_c^{(ex)} = I_c^{(ex)} \sqrt{2} \sin(\omega t + \delta_c) \iff \underline{I}_c = I_c e^{j\delta_c} \quad (37.18)$$

$$v_c = V_c \sqrt{2} \sin(\omega t + \varepsilon_c) \iff \underline{V}_c = V_c e^{j\varepsilon_c} \quad (37.19)$$

$$u_{b_m} = U_{b_m} \sqrt{2} \sin(\omega t + \beta_m) \iff \underline{U}_{b_m} = U_{b_m} e^{j\beta_m} \quad (37.20)$$

$$e_m = E_m \sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha_m) \iff \underline{E}_m = E_m e^{j\alpha_m} \quad (37.21)$$

¹ Notăția $m < s$ sub semnul de sumă dublă precizează că sumarea se va face asupra tuturor perechilor de valori permise pentru indicii distincți, $m = 1, 2, \dots, L-1$ și $s = 2, 3, \dots, L$, astfel că nici o pereche nu se repetă.

Așa cum am mai arătat, puterile instantanee, care sînt produse de mărimi sinusoidale, nu sînt ele însele sinusoidale și nu se pot reprezenta în complex. De aceea, nici formele instantanee ale teoremei conservării puterilor (37.5), (37.9), (37.10), (37.15) (37.16) — care exprimă însumarea, amplificarea și derivarea unor mărimi nesinusoidale — nu pot fi reprezentate în complex, așa cum au putut fi reprezentate teoremele lui Kirchhoff.

Pornind însă de la forma complexă a teoremelor lui Kirchhoff, operînd cu puteri complexe (de tipul celor definite în par. 34.33) și urmărind pas cu pas demonstrația din paragraful precedent, se poate demonstra o teoremă a conservării puterilor complexe.

Se numește *putere complexă primită pe la borne* de o rețea fără cuplaje inductive cu exteriorul, mărimea definită de expresia :

$$\underline{S}_b = \sum_{c=1}^N \underline{V}_c \underline{I}_c^{(ex)*} = \sum_{c=1}^N V_c I_c^{(ex)} e^{j(\varepsilon_c - \delta_c)} = P_b + jQ_b. \quad (37.22)$$

Definiția aceasta generalizează noțiunea de putere complexă, definită în paragraful 34.33 pentru un dipol. Partea reală a acestei mărimi e egală cu *puterea activă primită pe la borne*, definită conform cu relația (33.103), de valoare medie, pe un număr întreg de perioade a puterii instantanee primită pe la borne (37.1) :

$$P_b = \tilde{p}_b = \frac{1}{T} \int_0^T p_b dt = \sum_{c=1}^N \overline{v_c i_c^{(ex)}}. \quad (37.23)$$

Folosind teorema valorii medii a unui produs (33.29'), rezultă :

$$P_b = \sum_{c=1}^N V_c I_c^{(ex)} \cos(\varepsilon_c - \delta_c) = \operatorname{Re} \{ \underline{S}_b \}. \quad (37.23')$$

În analogie cu relația (33.110), se numește *putere reactivă primită pe la borne* mărimea definită de expresia :

$$Q_b = \sum_{c=1}^N V_c I_c^{(ex)} \sin(\varepsilon_c - \delta_c) = \operatorname{Im} \{ \underline{S}_b \}, \quad (37.24)$$

egală cu partea imaginară a puterii complexe (37.22).

Se numește *putere aparentă la borne* mărimea pozitivă definită de modulul puterii complexe :

$$S_b = | \underline{S}_b | = \left| \sum_{c=1}^N \underline{V}_c \underline{I}_c^{(ex)*} \right| = \sqrt{P_b^2 + Q_b^2} > 0. \quad (37.25)$$

Această mărime este definită prin analogie cu puterea aparentă a unui dipol, (33.106), care era egală cu modulul puterii complexe respective, (34.97), și nu prezintă utilitate practică decît în cazul particular în care toate produsele din suma (37.22) sînt egale (de ex., în regim trifazat echilibrat — v. cap. 38).

37.2.2. Conservarea puterilor complexe. Considerăm imaginea în complex a relației (37.2) și luăm conjugata complexă a expresiei obținute (termen cu termen):

$$\underline{I}_c^{(ex)*} = \sum_{m \in (c)} I_m^* . \quad (37.26)$$

Introducînd această expresie în relația (37.22), transformăm suma dublă astfel obținută în același mod cum am trecut de la relația (37.1) cu relația (37.2) la relația (37.5), folosind reprezentarea în complex a relației (37.4):

$$\underline{U}_{bm} = \underline{V}_c - \underline{V}_d \quad (37.27)$$

Se obține forma generală a teoremei conservării puterilor complexe:

$$\underline{S}_b = \sum_{c=1}^N \underline{V}_c \underline{I}_c^{(ex)*} = \sum_{m=1}^L \underline{U}_{bm} \underline{I}_m \quad (37.28)$$

Puterea complexă primită pe la bornele de acces de o rețea necuplată inductiv cu exteriorul e egală cu suma puterilor complexe primite de laturi pe la borne.

Ținînd seama de reprezentarea în complex a relației (37.6),

$$\underline{U}_{bm} = R_m \underline{I}_m + \frac{\underline{I}_m}{j \omega C_m} + \sum_{s=1}^L j \omega L_{ms} \underline{I}_s - \underline{E}_m . \quad (37.29)$$

și înlocuind tensiunea la borne în relația (37.27), se obține egalitatea:

$$\sum_{c=1}^N \underline{V}_c \underline{I}_c^{(ex)*} + \sum_{m=1}^L \underline{E}_m \underline{I}_m^* = \sum_{m=1}^L R_m \underline{I}_m^2 + j \left[\sum_{m=1}^L \sum_{s=1}^L \omega L_{ms} \underline{I}_m^* \underline{I}_s - \sum_{m=1}^L \frac{\underline{I}_m^2}{\omega C_m} \right] , \quad (37.30)$$

în care

$$I_m^2 = |\underline{I}_m|^2 = \underline{I}_m \underline{I}_m^* .$$

Primul termen din paranteza dreaptă se transformă separînd din suma dublă termenii de indici egali ($m = s$) și observînd că termenii rămași (cu $m \neq s$) pot fi grupați doi cîte doi termenii cu aceeași pereche de indici, iar $L_{mm} = L_m$ și $L_{ms} = L_{sm}$. Se obține:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^L \sum_{s=1}^L \omega L_{ms} \underline{I}_s \underline{I}_m^* &= \sum_{m=1}^L \omega L_m \underline{I}_m^2 + \sum_{m < s} \omega L_{ms} (\underline{I}_s \underline{I}_m^* + \underline{I}_m \underline{I}_s^*) = \\ &= \sum_{m=1}^L \omega L_m \underline{I}_m^2 + \sum_{m < s} 2 \omega L_{ms} \underline{I}_m \underline{I}_s \cos(\gamma_m - \gamma_s) , \end{aligned} \quad (37.31)$$

deoarece

$$\underline{I}_s \underline{I}_m^* + \underline{I}_m \underline{I}_s^* = \underline{I}_s \underline{I}_m (e^{j(\gamma_s - \gamma_m)} + e^{-j(\gamma_s - \gamma_m)}) = 2 \underline{I}_s \underline{I}_m \cos(\gamma_s - \gamma_m) \quad (37.32)$$

Înlocuind relația (37.31) în relația (37.30) și observînd că:

$$X_m = \omega L_m - \frac{1}{\omega C_m} ; \quad X_{ms} = \omega L_{ms} \quad (37.33)$$

sînt reactanța proprie a laturii m și reactanța mutuală dintre latura m și latura s (în raport cu sensurile de referință pentru care a fost definit $L_{ms} \geq 0$), rezultă forma explicită a teoremei conservării puterilor complexe:

$$\sum_{c=1}^N V_c I_c^{(ex)*} + \sum_{m=1}^L E_m I_m^* = \sum_{m=1}^L R_m I_m^2 + j \left[\sum_{m=1}^L X_m I_m^2 + \sum_{m < s} 2X_{ms} I_m I_s \cos(\gamma_m - \gamma_s) \right] \quad (37.34)$$

care se scrie scurt:

$$\underline{S}_b + \underline{S}_g = P_R + jQ_X \quad (37.35)$$

Suma dintre puterea complexă primită pe la borne $\underline{S}_b$ (v. 37.22) și puterea complexă debitată de generatoarele din rețea

$$S_g = \sum_{m=1}^L E_m I_m^* \quad (37.36)$$

are ca parte reală puterea activă P_R , disipată în rezistențele laturilor, iar ca parte imaginară, puterea reactivă Q_X primită de bobinele și condensatoarele rețelei.

37.2.3. Teorema conservării puterilor active. Puterile active sînt valori medii ale puterilor instantanee, egale cu partea reală a puterilor complexe corespunzătoare. De aceea, separînd partea reală a relației (37.28), se obține forma generală a teoremei conservării puterilor active:

$$P_b = \sum_{c=1}^N V_c I_c^{(ex)} \cos(\varepsilon_c - \delta_c) = \sum_{m=1}^L U_{b_m} I_m \cos(\beta_m - \gamma_m). \quad (37.37)$$

Puterea activă primită pe la bornele de acces de o rețea necuplată inductiv cu exteriorul e egală cu suma puterilor active, primite de laturi pe la borne.

Această formă generală poate fi explicitată, înlocuind tensiunea la borne, în funcție de parametrii și curenții laturilor.

Rezultatul se scrie direct, luînd partea reală a relației (37.34):

$$\sum_{c=1}^N V_c I_c^{(ex)} \cos(\varepsilon_c - \delta_c) + \sum_{m=1}^L E_m I_m \cos(\alpha_m - \gamma_m) = \sum_{m=1}^L R_m I_m^2 \geq 0, \quad (37.38)$$

care se scrie strîns:

$$P_b + P_g = P_R \geq 0. \quad (37.39)$$

Suma dintre puterea activă primită pe la borne P_b (v. 37.23) și puterea activă debitată de generatoare

$$P_g = \sum_{m=1}^L E_m I_m \cos(\alpha_m - \gamma_m) \geq 0 \quad (37.40)$$

e egală cu puterea activă disipată în laturile rețelei:

$$P_R = \sum_{m=1}^L R_m I_m^2 \geq 0. \quad (37.41)$$

Relația (37.39) se mai poate obține și luînd valoarea medie pe o perioadă a expresiei (37.10).

În adevăr, puterile active sînt valori medii ale puterilor instantanee, valoarea medie a produsului a două mărimi sinusoidale e egală cu produsul dintre valorile lor efective și cosinusul defazajului lor (v. rel. 33.29'), iar valoarea medie a derivatei unei funcțiuni periodice $f(t)$ e nulă :

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{df}{dt} dt = \frac{1}{T} (f(T) - f(0)) = 0, \quad (37.42)$$

deoarece în virtutea periodicității $f(T) = f(0)$.

Relația (37.39) oglindește faptul că, în regim permanent, energia medie a cîmpului electromagnetic e constantă, iar cîmpul nu participă în medie la bilanșul puterilor, ci numai îl mijlocește : transmite energia de la borne și de la generatoare la conductoarele rețelei, în care energia se disipă prin efect Joule-Lenz.

37.2.4. Teorema conservării puterilor reactive. Separînd partea imaginară a relației (37.28), se obține forma generală a teoremei conservării puterilor reactive :

$$Q_b = \sum_{c=1}^N V_c I_c^{(cx)} \sin(\varepsilon_c - \delta_c) = \sum_{m=1}^N U_{b_m} I_m \sin(\beta_m - \gamma_m) \quad (37.43)$$

Puterea reactivă primită pe la bornele de acces de o rețea necuplată inductiv cu exteriorul e egală cu suma puterilor reactive primite de laturi pe la borne.

Această formă generală poate fi explicitată, înlocuind tensiunea la borne în funcție de parametri și curenții laturilor. Rezultatul se scrie direct, luînd partea imaginară a relației (37.34) :

$$\begin{aligned} \sum_{c=1}^N V_c I_c^{(cx)} \sin(\varepsilon_c - \delta_c) + \sum_{m=1}^L E_m I_m \sin(\alpha_m - \gamma_m) = \\ = \sum_{m=1}^L X_m I_m^2 + \sum_{m < s} 2 X_{ms} I_m I_s \cos(\gamma_m - \gamma_s), \end{aligned} \quad (37.44)$$

care se scrie strîns :

$$Q_b + Q_g = Q_X. \quad (37.45)$$

Suma dintre puterea reactivă primită pe la borne Q_b (v. 37.24) și puterea reactivă produsă de generatoare :

$$Q_g = \sum_{m=1}^L E_m I_m \sin(\alpha_m - \gamma_m) \quad (37.46)$$

e egală cu puterea reactivă primită de bobinele și condensatoarele rețelei :

$$Q_X = \sum_{m=1}^L X_m I_m^2 + \sum_{m < s} 2 X_{ms} I_m I_s \cos(\gamma_m - \gamma_s). \quad (37.47)$$

Expresia (37.47) a puterii reactive primite de bobinele și condensatoarele rețelei se transformă, înlocuind reatanțele proprii și mutuale cu (37.33) :

$$Q_X = \sum_{m=1}^L \omega L_m I_m^2 - \sum_{m=1}^L \frac{I_m^2}{\omega C_m} + \sum_{m < s} 2 \omega L_{ms} I_m I_s \cos(\gamma_m - \gamma_s). \quad (37.48)$$

Se observă că în afară de puterile reactive corespunzătoare inductivităților proprii ale laturilor (v. și rel. 34.26):

$$Q_{Lm} = \omega L_m I_m^2 \geq 0 \quad (37.49)$$

și capacităților (v. și rel. 34.29):

$$Q_{Cm} = -\frac{L_m^2}{\omega C_m} \leq 0 \quad (37.50)$$

expresia de mai sus conține pentru fiecare inductivitate mutuală L_{ms} o putere reactivă:

$$Q_{Lms} = 2\omega L_{ms} I_m I_s \cos(\gamma_m - \gamma_s) \geq 0. \quad (37.51)$$

Puterea reactivă (37.48) primită de bobinele și condensatoarele unei rețele mai poate fi exprimată în funcție de energia magnetică medie și energia electrică medie. În adevăr, luând media pe o perioadă a energiei magnetice (37.13), și ținând seama că media pătratului unei mărimi sinusoidale e egală cu pătratul valorii ei efective, iar media produsului a două mărimi sinusoidale e egală cu produsul valorilor lor efective prin cosinusul defazajului lor, se obține:

$$\tilde{W}^{(m)} = \sum_{m=1}^L \frac{L_m}{2} \tilde{i}_m^2 + \sum_{m < s} L_{ms} \tilde{i}_m \tilde{i}_s = \sum_{m=1}^L \frac{L_m I_m^2}{2} + \sum_{m < s} L_{ms} I_m I_s \cos(\gamma_m - \gamma_s). \quad (37.52)$$

De asemenea, luând media pe o perioadă a energiei electrice, (37.14) se obține:

$$\tilde{W}^{(e)} = \sum_{m=1}^L \frac{C_m \tilde{u}_m^2}{2} = \sum_{m=1}^L \frac{C_m U_m^2}{2} = \sum_{m=1}^L \frac{I_m^2}{2\omega^2 C_m} \quad (37.53)$$

știind că tensiunea condensatorului e egală cu produsul dintre curent și impedanța acestuia:

$$U_{Cm} = I_m \frac{1}{\omega C_m}$$

Cu relațiile (37.52) și (37.53) se obține din relația (37.48) cea mai generală expresie a puterii reactive primite de un receptor pasiv:

$$Q_X = 2\omega [\tilde{W}^{(m)} - \tilde{W}^{(e)}] \quad (37.54)$$

adică exact expresia (33.123), găsită pentru o latură de circuit. Am numit această expresie „cea mai generală”, deoarece se poate defini și pentru un câmp electromagnetic sinusoidal oarecare și nu numai pentru o rețea cu parametri concentrați.

Folosind această expresie, teorema conservării puterilor complexe, relația (37.35), se scrie:

$$\underline{S}_b + \underline{S}_g = P_R + j 2\omega [\tilde{W}^{(m)} - \tilde{W}^{(e)}]. \quad (37.55)$$

Analogia parțială a expresiilor (37.10) și (37.55) nu trebuie să inducă în eroare în ceea ce privește legătura dintre ele: ecuația în complex (37.55) nu este imaginea ecuației instantanee (37.10), termenii acesteia din urmă nefiind mărimi sinusoidale. De aceea, diferența de semn la parantezele din membrul drept nu are nimic paradoxal.

37.2.5. Conservarea puterilor în rețele izolate. În cazul rețelelor izolate, nu există conductoare de legătură cu exteriorul și teoremele de conservare

a puterilor se obțin din cele enunțate pentru rețele neizolate, punind $I_c^{(ex)} = 0$. Se obțin astfel :

Teorema conservării puterilor complexe (v. rel. 37.28) :

$$\sum_{m=1}^L \underline{U}_m \underline{I}_m^* = 0 \quad (37.56)$$

sau, explicit, (v. rel. 37.34) :

$$\sum_{m=1}^L \underline{E}_m \underline{I}_m^* = \sum R_m I_m^2 + j \left[\sum_{m=1}^L X_m I_m^2 + \sum_{m < s} 2 X_m I_m I_s \cos (\gamma_m - \gamma_s) \right]. \quad (37.57)$$

Teorema conservării puterilor active (v. rel. 37.37) :

$$\sum_{m=1}^L U_m I_m \cos (\beta_m - \gamma_m) = 0 \quad (37.58)$$

sau, explicit, (v. rel. 37.38) :

$$\sum_{m=1}^L E_m I_m \cos (\alpha_m - \gamma_m) = \sum_{m=1}^L R_m I_m^2. \quad (37.59)$$

Teorema conservării puterilor reactive (v. rel. 37.43) :

$$\sum_{m=1}^L U_m I_m \sin (\beta_m - \gamma_m) = 0 \quad (37.60)$$

sau, explicit, (v. rel. 37.44) :

$$\sum_{m=1}^L E_m I_m \sin (\alpha_m - \gamma_m) = \sum_{m=1}^L X_m I_m^2 + \sum_{m < s} 2 X_m I_m I_s \cos (\gamma_m - \gamma_s). \quad (37.61)$$

37.2.6. Conservarea puterilor în rețele pasive. În rețele pasive, $E_m = 0$ ($m = 1, 2, \dots, L$) și teoremele de conservare capătă formele particulare următoare :

Teorema conservării puterilor complexe (v. rel. 37.34) :

$$\sum_{c=1}^N \underline{V}_c \underline{I}_c^{(ex)*} = \sum_{m=1}^L R_m I_m^2 + j \left[\sum_{m=1}^L X_m I_m^2 + \sum_{m < s} 2 X_m I_m I_s \cos (\gamma_m - \gamma_s) \right]. \quad (37.62)$$

Teorema conservării puterilor active (v. rel. 37.38) :

$$\sum_{c=1}^N V_c I_c^{(ex)} \cos (\epsilon_c - \delta_c) = \sum_{m=1}^L R_m I_m^2. \quad (37.63)$$

Teorema conservării puterilor reactive (v. rel. 37.44) :

$$\sum_{c=1}^N V_c I_c^{(ex)} \sin (\epsilon_c - \delta_c) = \sum_{m=1}^L X_m I_m^2 + \sum_{m < s} 2 X_m I_m I_s \cos (\gamma_m - \gamma_s) \quad (37.64)$$

37.2.7. **Observații privitoare la teoremele de conservare a puterilor.** a) Teorema conservării puterilor se utilizează nu numai pentru determinarea regimului de puteri al unei rețele date, ci și pentru calculul însuși al rețelei (v. metoda separării puterilor, par. 37.3.2) și mai ales pentru verificarea calculului făcut cu alte metode, prin verificarea bilanșului puterilor (v. par. 37.3.1).

b) Calculul puterilor active, respectiv reactive, primite pe la borne sau date de generatoare, se face mai ușor, luând partea reală, respectiv imaginară, a puterilor complexe (37.22) sau (37.34), decît utilizînd expresiile (37.23') sau (37.38), respectiv (37.24) sau (37.44).

c) În toate expresiile teoremelor de conservare a puterilor dezvoltate în paragrafele precedente s-au considerat toate tensiunile la borne u_{b_m} (sau $\underline{U}_{b_m}$) cu sensul de referință după regula de la receptoare, toate t.e.m. ale generatoarelor e_m (sau $\underline{E}_m$), cu sensul de referință același cu al curentului i_m (sau $\underline{I}_m$) și toate inductivitățile mutuale (sau impedanțele mutuale) L_{ms} (sau $\underline{Z}_{ms} = j\omega L_{ms}$) raportate la sensurile de referință ale curenților i_m și i_s . Orice schimbare a vreunui dintre aceste sensuri de referință atrage o schimbare de semn a termenului din expresia mărimii care conține mărimea afectată.

d) Bilanșul de puteri se face numai pe întreaga rețea. Sumele care intervin trebuie efectuate asupra tuturor laturilor, respectiv nodurilor.

e) În sumele care intervin în expresiile teoremelor de conservare, fiecare termen are o semnificație fizică bine precizată, reprezentînd puterea primită sau produsă de un anumit element al rețelei. De exemplu, $\underline{E}_m \underline{I}_m^*$ e puterea complexă produsă de generatorul din latura m , $R_m i_m^2$ e puterea instantanee disipată în rezistența laturii m , $2\omega L_{ms} I_m I_s \cos(\gamma_m - \gamma_s)$ e puterea reactivă primită de perechea de bobine din laturile m și s și asociată inductivității lor mutuale.

Numai termenii sumei care exprimă puterile la borne — instantanee $p_b = \sum_{c=1}^N v_c i_c^{(ex)}$, complexă $\underline{S}_b$

(v. 37.22), activă P_b (v. 37.23') sau reactivă Q_b (v. 37.24) — nu au, fiecare în parte, semnificație fizică. În adevăr, valoarea numerică a fiecăruia dintre acești termeni depinde de valoarea potențialului, adică de alegerea arbitrară a punctului de potențial nul. Un asemenea termen nu reprezintă deci o putere care se transmite pe la o anumită bornă: oricare dintre acești termeni poate fi făcut nul, alegînd borna respectivă ca origine a potențialelor. Puterea la borne, adică suma tuturor acestor termeni, nu depinde însă de alegerea originii potențialului: schimbarea acestei origini adaugă la toate potențialele o constantă, care iese în factor pe lîngă suma — nulă — a tuturor curenților injectați din exterior.

$$\sum v_c i_c^{(ex)} = \sum (v_c + v_0) i_c^{(ex)} = \sum v_c i_c^{(ex)} + v_0 \underbrace{\sum i_c^{(ex)}}_0 = \sum v_c i_c^{(ex)}. \quad (37.65)$$

Aici, $\sum_{c=1}^N i_c^{(ex)} = i_\Sigma = 0$, conform teoremei continuității, aplicată unei suprafețe închise Σ ,

care conține întreaga rețea și e înțepată numai de conductoarele de legături la borne (v. fig. 37.1). Această putere la borne (fluxul vectorului Poynting) se transmite strict localizat prin punctele din dielectric ale suprafeței Σ . Nu există nici un criteriu fizic care să permită să se asocieze univoc fiecărei borne cîte o parte din această putere.

f) Măsurarea puterilor active transmise pe la borne se face cu aparate numite wattmetre, fiecare wattmetru avînd o indicație proporțională cu media produsului dintre tensiunea aplicată lui și curentul trecut prin el. Un wattmetru poate măsura deci un termen de forma $v_c i_c^{(ex)} = V_c I_c^{(ex)} \cos(\epsilon_c - \delta_c)$. Puterea activă totală (37.23') se poate măsura deci cu N wattmetre, dacă punctul de referință al potențialelor e lăsat oarecare — și numai cu $N-1$ wattmetre, dacă se ia ca referință nodul N (în acest caz, suma rămînuînd cu $N-1$ termeni).

g) Puterile aparente (egale cu modulele puterilor complexe) nu au proprietatea de conservare. Pentru puterile aparente nu se poate formula o relație de tipul relației (37.56), adică:

$$\sum_{m=1}^L U_{b_m} I_m \neq 0, \quad (37.66)$$

pentru o rețea izolată.

37.3. Aplicații la teoremele de conservare a puterilor

37.3.1. Verificarea bilanțului puterilor la rezolvarea rețelelor. După ce s-a efectuat calculul curenților unei rețele, o foarte bună verificare consistă în verificarea egalităților care exprimă conservarea puterilor.

Exemplu: Considerăm rețeaua din figura 36.8, pentru care, în paragraful 36.3.3, s-au determinat curenții cu ajutorul forme complexe a teoremelor lui Kirchhoff. Dacă se cunosc expresiile în complex ale curenților, cea mai rapidă verificare consistă în aplicarea relației (37.57):

$$\begin{aligned} \underline{E}_1 \underline{I}_1^* + \underline{E}_2 \underline{I}_2^* = R_1 \underline{I}_1^2 + R_2 \underline{I}_2^2 + j[\omega L_1 \underline{I}_1^2 + \omega L_2 \underline{I}_2^2 - \frac{1}{\omega C_3} \underline{I}_3^2 + \omega L_4 \underline{I}_2^2 + \\ + 2\omega(-L_{12}) \underline{I}_1 \underline{I}_2 \cos(\gamma_1 - \gamma_2)]. \end{aligned} \quad (37.67)$$

Am scris $-L_{12}$, deoarece L_{12} e definit în raport cu sensurile indicate de bornele polarizate cu care curenții $\underline{I}_1$ coincide, dar $\underline{I}_2$ nu coincide. Înlocuind valorile numerice și observând că bilanțul puterilor complexe devine:

$$\begin{aligned} 10.1 + (-j50)(1-j) = 20.1^2 + 20(\sqrt{2})^2 + j \left[10.1^2 + 20(\sqrt{2})^2 - 20.1^2 + 20(\sqrt{2})^2 + \right. \\ \left. + 2(-10) \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \\ 60 + j50 = 60 + j50. \end{aligned} \quad (37.68)$$

Bilanțul puterilor active ($P_g = P_R = 60$ W) și al celor reactive ($Q_g = Q_X = 50$ var) este verificat.

37.3.2. Metoda separării puterilor. Egalitățile care exprimă conservarea puterilor active, respectiv reactive, pot fi utilizate pentru rezolvarea rețelelor — scriindu-le pentru diferite porțiuni de rețea, considerate ca rețele neizolate, sau pentru întregă rețea izolată, în numărul necesar corespunzător numărului necunoscutelor. Se obține astfel un sistem de ecuații, a cărui rezolvare permite determinarea valorilor efective și a defazajelor necunoscute. Această metodă de rezolvare se mai numește *metoda separării puterilor* și este indicată în special pentru rețele lipsite de inductivități mutuale și atunci când laturile receptoare nu sînt caracterizate prin impedanțele lor complexe, ci prin puterea activă nominală, factorul de putere și tensiunea nominală. Metoda se utilizează și în studiul rețelelor trifazate echilibrate (v. par. 39).

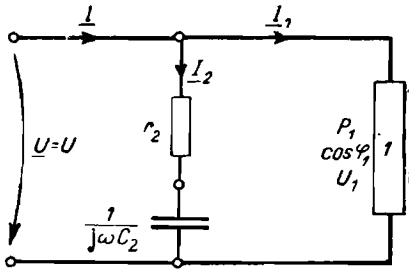


Fig. 37.2.

Exemplu: Considerăm un receptor liniar inductiv I , care absoarbe puterea activă $P_1 = 2,4$ kW, sub tensiunea la borne $U_1 = 120$ V, cu factorul de putere $\cos \varphi_1 = 0,5$ (fig. 37.2), și în paralel cu el un circuit serie (r, C), cu $r_2 = 3 \Omega$ și $\frac{1}{\omega C_2} = 3 \Omega$.

Calculăm curenții total absorbit I (valoarea efectivă) și defazajul φ al acestui curent față de tensiunea aplicată la borne $U = U_1 = 120$ V.

Receptorul consumă putere activă și putere reactivă (inductivă):

$$P_1 = 2400 \text{ W}; \quad Q_1 = P_1 \tan \varphi_1 = \sqrt{3} P_1 = \sqrt{3} \cdot 2400 \text{ var} > 0.$$

Latura (r, C) consumă puterea activă P_2 și puterea reactivă Q_2 , determinabile prin aplicarea bilanțului puterilor pentru această latură:

$$\begin{aligned} P_2 = r_2 \underline{I}_2^2 = U_2 \underline{I}_2 \cos \varphi_2 = U \underline{I}_2 \cos \varphi_2 \\ Q_2 = -\frac{1}{\omega C_2} \underline{I}_2^2 = U_2 \underline{I}_2 \sin \varphi_2 = U \underline{I}_2 \sin \varphi_2, \end{aligned} \quad (37.69)$$

de unde rezultă :

$$\left(r_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C_2^2} \right) I_2^2 = U^2$$

adică :

$$I_2 = \frac{U}{\sqrt{r_2^2 + 1/\omega^2 C_2^2}} = \frac{120}{\sqrt{9 + 9}} = 20\sqrt{2} \text{ A.}$$

Deci :

$$P_2 = r_2 I_2^2 = 3(20\sqrt{2})^2 = 2400 \text{ W}$$

$$Q_2 = -I_2^2 / \omega C_2 = -3(20\sqrt{2})^2 = -2400 \text{ var} < 0.$$

Conservarea puterilor active și reactive pentru întregul circuit se scrie :

$$\begin{aligned} P &= U I \cos \varphi = P_1 + P_2 = 4800 \text{ W} \\ Q &= U I \sin \varphi = Q_1 + Q_2 = 1752 \text{ var} > 0. \end{aligned} \quad (37.70)$$

Înlocuind valorile numerice date pentru mărimile din membrul drept și ținând seama că $U = 120 \text{ V}$, se obțin componentele activă și reactivă ale curentului :

$$I \cos \varphi = 40; \quad I \sin \varphi = 14,6 > 0,$$

adică :

$$I = \sqrt{40^2 + 14,6^2} \approx 13,5 \text{ A}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{14,6}{40} \approx 0,365; \quad \varphi \approx 20^\circ.$$

37.3.3. Ameliorarea factorului de putere (v. și par. 33.4.5). Un receptor M , cu $P = 100 \text{ kW}$, funcționează de la $\cos \varphi = 0,6$ (inductiv), sub o tensiune $U = 500 \text{ V}$, 50 Hz . Se cere să se determine capacitatea echivalentă C_e a bateriei de condensatoare, care trebuie conectată în paralel cu receptorul, pentru ca factorul de putere al ansamblului să devină $\cos \varphi_b = 0,9$ (v. fig. 37.3). Puterea reactivă absorbită de bateria de condensatoare este negativă și are expresia (v. rel. 34.29) :

$$Q_C = -\omega C_e U^2. \quad (37.71)$$

Puterea reactivă absorbită de receptorul inductiv este pozitivă și are expresia (v. rel. 33.111) :

$$Q = P \operatorname{tg} \varphi. \quad (37.72)$$

Deoarece puterile reactive se conservă, puterea reactivă primită pe la borne va fi suma expresiilor de mai sus :

$$Q_b = Q_C + Q = P \operatorname{tg} \varphi - U^2 \omega C_e, \quad (37.73)$$

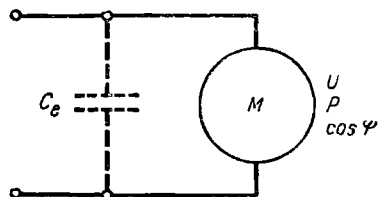


Fig. 37.3.

cu $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \approx 1,33$. Puterea Q poate fi făcută oricât de mică în valoare absolută, alegînd în mod adecvat capacitatea C_e . Factorul de putere la borne $\cos \varphi_b$ este, în acest caz, impus și permite să se determine raportul :

$$\operatorname{tg} \varphi_b = \frac{P_b}{Q_b} = \frac{P}{Q_b} = \frac{\sin \varphi_b}{\cos \varphi_b} \approx 0,488, \quad (37.74)$$

în care am pus $P_b = P$, deoarece bateria de condensatoare nu absoarbe putere activă.

Din relațiile (37.74) și (37.73) rezultă :

$$Q_b = P \operatorname{tg} \varphi - U^2 \omega C_e = P \operatorname{tg} \varphi_b,$$

$$C_e = \frac{P}{\omega U^2} (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi_b). \quad (37.75)$$

Înlocuind valorile numerice, se obține $C_e = 1850 \mu F$.

37.4. Transferul maxim de putere pe la borne

Considerăm un generator de tensiune electromotoare dată E_g și avînd impedanța interioară $Z_g = R_g + jX_g = Z_g e^{j\varphi_g}$ de asemenea dată (fig. 37.4). Se pune problema de a determina impedanța de sarcină Z_s , care trebuie conectată la bornele generatorului, pentru ca acesta să transfere sarcinii o putere activă maximă.

Realizarea condițiilor care asigură acest transfer maxim de putere se mai numește *adaptarea sarcinii la generator* (din acest punct de vedere ¹).

În analiza condițiilor de adaptare interesează în practică două situații : cazul general, cînd se poate varia atît modulul cît și argumentul impedanței de sarcină, și cazul particular, cînd se poate varia numai modulul impedanței de sarcină.

37.4.1. Transferul maxim de putere la sarcină oarecare. Exprimăm puterea P transferată impedanței de sarcină $Z_s = R_s + jX_s = Z_s e^{j\varphi_s}$, în funcție de mărimile E_g , Z_g și Z_s :

$$P = R_s I^2 = R_s \frac{E_g^2}{|Z_s + Z_g|^2} = E_g^2 \frac{R_s}{(R_s + R_g)^2 + (X_s + X_g)^2}. \quad (37.76)$$

Deoarece E_g , R_g și X_g sînt date, variabilele independente în raport cu care se caută

maximum sînt R_s și X_s , iar condițiile de maxim se pot obține anulînd derivatele parțiale ale funcțiunii $P = f(R_s, X_s)$. Le vom obține mai simplu prin raționamentul următor : Dacă R_s e menținut constant și X_s variază, maximum lui P se obține pentru minimumul numitorului, adică pentru minimumul expresiei $(X_s + X_g)^2 \geq 0$, care se obține la anularea acestei expresii, adică pentru valoarea :

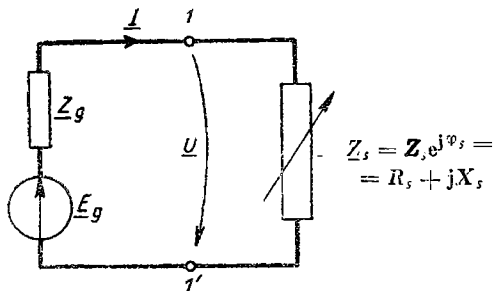


Fig. 37.4.

$$X_s = -X_g \quad (37.77)$$

¹ Există și alte criterii de adaptare — de exemplu din punctul de vedere al anulării undeii reflectate la joncțiunea a două linii lungi (v. cap. 54) — care conduc în cazul general la alte condiții decît cele stabilite aici.

a reactanței de sarcină. În acest caz, puterea transferată sarcinii are expresia :

$$P \Big|_{X_s + X_g = 0} = E_g^2 \frac{R}{(R_s + R_g)^2} = E_g^2 \frac{1}{R_s + \frac{R_g^2}{R_s} + 2R_g}. \quad (37.78)$$

Cînd R_s variază, această expresie e maximă cînd numitorul e minim, adică pentru $R_s + R_g^2/R_s$ minim. Suma a doi termeni al căror produs $(R_s \cdot R_g^2/R_s = R_g^2)$ e constant e minimă cînd termenii sînt egali, adică pentru valoarea :

$$\boxed{R_s = R_g} \quad (37.79)$$

a rezistenței de sarcină. Relațiile (37.78) și (37.79) reprezintă condițiile căutate. Deoarece $Z_s = R_s + j X_s$ și $Z_g = R_g + j X_g$, aceste condiții sînt echivalente cu relațiile :

$$\boxed{Z_s = Z_g^*} \quad (37.80)$$

sau

$$Z_s = Z_g \quad \text{și} \quad \varphi_s = -\varphi_g. \quad (37.81)$$

Puterea activă transmisă pe la borne de un generator liniar dat unui dipol receptor este maximă atunci cînd impedanța complexă echivalentă a receptorului e conjugată complexă a impedanței interioare complexe a generatorului (teorema transferului maxim de putere).

Trebuie observat că în condițiile de adaptare (37.80), puterea activă transmisă la borne este (cu 37.78 și 37.79) :

$$P_{max} = \frac{E_g^2}{4 R_g}, \quad (37.83)$$

în timp ce puterea activă produsă de generator este :

$$P_g \Big|_{P=P_{max}} = (R_g + R_s) I^2 = 2 P_{max} = \frac{E_g^2}{2 R_g}. \quad (37.84)$$

Randamentul electric al transferului de putere fiind :

$$\eta = \frac{P}{P_g} = \frac{R_s I^2}{(R_s + R_g) I^2} = \frac{R_s}{R_s + R_g} \quad (37.85)$$

are în condițiile maximului de putere la borne valoarea :

$$\eta \Big|_{P=P_{max}} = \eta \Big|_{R=R_g} = 0,5.$$

Accastă valoare e mult prea scăzută pentru necesitățile transmisiunii de energie. De aceea, în electroenergetică, unde se cer randamente cît mai mari, se lucrează cu $R_g \ll R_s$, departe de condiția de adaptare (37.80). În electrocomunicații, unde aspectul energetic e secundar, interesează adesea să se

„scoată“ maximul de putere activă dintr-un generator dat și, în acest caz, se caută satisfacerea condiției de adaptare.

Expresia (37.83) arată că puterea maximă pe care o poate debita un generator tinde către infinit, dacă impedanța interioară tinde către zero. În aceleași condiții, tensiunea la borne $U = \underline{E}_g - \underline{Z}_g \underline{I}$ tinde către $\underline{E}$. De aceea, un generator capabil să mențină o tensiune invariabilă la borne se mai numește generator de putere infinită.

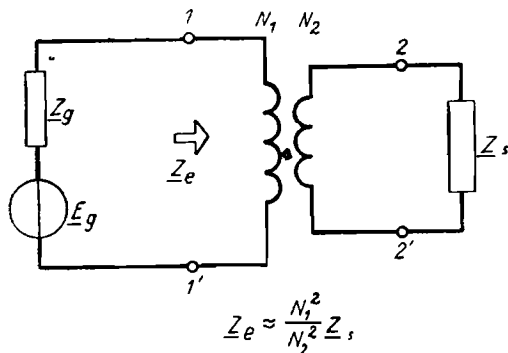


Fig. 37.5.

37.4.2. Transferul maxim de putere la sarcină cu defazaj invariabil. Practic este greu să se modifice după voie impedanța complexă a unui receptor dat, pentru a obține adaptarea. Se poate însă intercala între generator și sarcină un transformator (fig. 37.5), astfel că impedanța echivalentă prezentată generatorului nu mai este $\underline{Z}_s$, ci

$$\underline{Z}_{e1} = \underline{Z}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_s} \quad (37.86)$$

(v. rel. 36.30), unde $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$ e impedanța proprie a înfășurării primare cu N_1 spire, $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$ e impedanța proprie a înfășurării secundare cu N_2 spire, iar $M = |L_{12}|$ e inductivitatea mutuală a înfășurărilor (în modul). Se numește transformator ideal un transformator care are: a) rezistențele înfășurărilor neglijabile, $R_1 \approx 0$, $R_2 \approx 0$; b) dispersiunea magnetică neglijabilă, astfel că $M^2 = L_1 L_2$ (v. rel. 27.6, vol. I) și $\sqrt{L_1/L_2} = N_1/N_2$ (raportul de transformare); c) reactanța secundară foarte mare față de impedanța de sarcină $\omega L_2 \gg Z_s = |\underline{Z}_s|$.

Ținând seama de aceste condiții, impedanța de intrare a transformatorului ideal devine:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{e1} &\approx j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_2 + \underline{Z}_s} = \frac{j\omega L_1 \underline{Z}_s + \omega^2 (M^2 - L_1^2)}{j\omega L_2 + \underline{Z}_s} \approx \frac{j\omega L_1 \underline{Z}_s}{j\omega L_2 + \underline{Z}_s} \approx \\ &\approx \frac{j\omega L_1 \underline{Z}_s}{j\omega L_2} = \frac{L_1}{L_2} \underline{Z}_s, \end{aligned}$$

sau

$$\underline{Z}_{e1} \approx \frac{N_1^2}{N_2^2} \underline{Z}_s. \quad (37.87)$$

Cu ajutorul unui transformator ideal se poate deci obține o multiplicare a modului impedanței de sarcină cu un factor egal cu pătratul raportului de transformare. Pe această cale se poate deci modifica numai modulul impedanței de sarcină a unui generator. De aceea interesează condițiile de adaptare la defazaj invariabil ale acestei impedanțe.

Puterea (37.76) se poate scrie, punând în evidență variabila $Z_s = |\underline{Z}_s|$

$$P = R_g \frac{E_g^2}{|\underline{Z}_s + \underline{Z}_g|^2} = E_g^2 \frac{Z_s \cos \varphi_s}{Z_s^2 + Z_g^2 + 2 Z_s Z_g \cos(\varphi_s - \varphi_g)} \quad (37.88)$$

sau

$$P = E_g^2 \frac{\cos \varphi_s}{Z_s + \frac{Z_g^2}{Z_s} + 2Z_g \cos(\varphi_s - \varphi_g)}. \quad (37.89)$$

La Z_s variabil, această expresie e maximă cînd numitorul e minim, adică atunci cînd $Z_s + Z_g^2/Z_s$ e minim, ceea ce are loc pentru :

$$\boxed{Z_s = Z_g}. \quad (37.90)$$

Accasta e condiția de adaptare a sarcinii cu defazaj constant.

38. || METODE ȘI TEOREME PENTRU REZOLVAREA CIRCUITELOR DE CURENT ALTERNATIV

În afară de teoremele lui Kirchhoff pot fi utilizate la rezolvarea rețelilor de curent alternativ numeroase alte metode, care sînt consecințe ale acestor teoreme.

Dacă se utilizează metoda reprezentării în complex, se observă *analogia care există între relațiile care exprimă legea lui Ohm și teoremele lui Kirchhoff în curent continuu, respectiv în curent alternativ*. De aceea se vor putea transpune în curent alternativ metodele și teoremele utilizate pentru rezolvarea circuitelor de curent continuu (v. și par. 13, vol. I), pe baza analogiei :

$$\begin{array}{cccccc} E & I & R & V & U & G \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \underline{E} & \underline{I} & \underline{Z} & \underline{V} & \underline{U} & \underline{Y} \end{array} \quad (38.1)$$

Așa cum am mai precizat, *analogia completă este posibilă numai în cazul în care nu există cuplaje inductive (adică impedanțe mutuale) între laturile rețelei*. Din orice teoremă demonstrată în complex, în curent alternativ se obține deci o teoremă valabilă în curent continuu, anulînd impedanțele mutuale și înlocuind mărimile complexe din curent alternativ cu mărimile din curent continuu care le corespund prin relația (38.1).

38.1. Metoda suprapunerii efectelor

38.1.1. Teorema superpoziției. Conform acestei teoreme, *curentul electric din orice latură a unei rețele de curent alternativ, în care există mai multe generatoare, este suma algebrică a curenților produși de fiecare t.e.m. în parte, dacă ar acționa singură în rețea (celelalte surse fiind presupuse cu t.e.m. nule, dar cu impedanțe interioare neschimbate)*.

Din caracterul liniar al ecuațiilor teoremelor lui Kirchhoff rezultă că fiecare curent este o funcție liniară și omogenă de t.e.m. exterioare din rețea. În adevăr, rezolvînd ecuațiile date de cele două teoreme ale lui Kirchhoff prin regula lui Cramer, curentul din latura s va rezulta sub forma :

$$\underline{I}_s = \sum_{m=1}^L \underline{Y}_{sm} \underline{E}_m, \quad (38.2)$$

în care coeficienții $\underline{Y}_{sm}$ sînt mărimi complexe, numite admitanțe de transfer între laturile s și m (care îndeplinesc relația de reciprocitate $\underline{Y}_{sm} = \underline{Y}_{ms}$, cum se va arăta în par. 38.3.5.). Relația (38.2) se poate exprima și astfel :

$$\underline{I}_s = \sum_{m=1}^L \underline{I}_{sm}, \quad (38.3)$$

în care $\underline{I}_{sm} = \underline{Y}_{sm} \underline{E}_m$ este curentul produs de t.e.m. $\underline{E}_m$ în latura s , celelalte t.e.m. fiind nule.

Metoda suprapunerii efectelor este o metodă generală de rezolvare, care consistă în determinarea curenților pe baza teoremei superpoziției, folosind relația (38.3).

38.1.2. Aplicație. Calculăm curentul $\underline{I}_3$ din figura 38.1, a cu ajutorul teoremei superpoziției. Vom avea :

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} + \underline{I}_{32}, \quad (38.4)$$

unde $\underline{I}_{31}$ e curentul produs în latura 3 în condițiile în care numai t.e.m. $\underline{E}_1 \neq 0$ (v. fig. 38.1, b), iar $\underline{I}_{32}$ e curentul produs în latura 3 în condițiile în care numai t.e.m. $\underline{E}_2 \neq 0$ (v. fig. 38.1, c).

Astfel, cu $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$, $\underline{Z}_2 = R_2$, $\underline{Z}_3 = \frac{1}{j\omega C_3}$, avem :

$$\underline{I}_{31} = \underline{I}_{11} \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}} \cdot \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{\underline{E}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_1}$$

$$\underline{I}_{32} = \underline{I}_{22} \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} = \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}} \cdot \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} = \frac{\underline{E}_2 \underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_1},$$

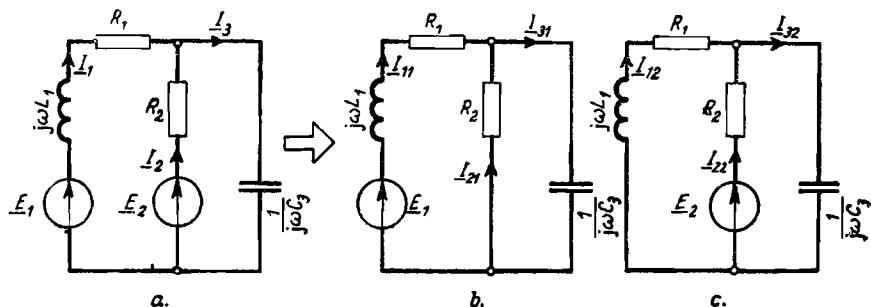


Fig. 38.1.

adică :

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} + \underline{I}_{32} = \frac{\underline{E}_1 \underline{Z}_2 + \underline{E}_2 \underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_1}. \quad (38.5)$$

Înlocuind valorile impedanțelor, se obține :

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{E}_1 R_2 + \underline{E}_2 (R_1 + j \omega L_1)}{R_1 R_2 + \frac{L_1}{C_3} + j \left(\omega L_1 R_2 - \frac{R_1 + R_2}{\omega C_3} \right)}.$$

Se verifică ușor că dacă $\underline{Y}_1 = 1/\underline{Z}_1$, $\underline{Y}_2 = 1/\underline{Z}_2$, $\underline{Y}_3 = 1/\underline{Z}_3$ sînt admitanțele celor trei ramuri, expresia generală a curentului $\underline{I}_3$ se mai poate scrie :

$$\underline{I}_3 = \underline{Y}_3 \frac{\underline{E}_1 \underline{Y}_1 + \underline{E}_2 \underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}. \quad (38.5')$$

Dacă efectuînd calculele numerice, se obține $\underline{I}_3 = I_3 e^{j\gamma_3}$, valoarea instantanee a curentului este $i_3 = I_3 \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma_3)$.

38.2. Metode de transfigurare

Se numește *transfigurare* operația prin care o porțiune de rețea se consideră înlocuită cu o alta, de structură în general mai simplă, astfel încît schimbarea să nu aducă nici o modificare în repartitia curenților și tensiunilor din restul rețelei. Noua porțiune de rețea cu care se consideră înlocuită porțiunea de rețea dată se mai numește echivalentă acesteia. Două rețele sau două circuite care se pot înlocui reciproc prin transfigurare se numesc *rețele echivalente* sau *circuite echivalente*, iar reprezentările lor în desen, *scheme echivalente*. În cele ce urmează, vom considera transfigurări și scheme echivalente valabile în regim permanent sinusoidal. De la începutul studiului circuitelor de curent alternativ am considerat numeroase astfel de scheme echivalente — alcătuite din elemente ideale de circuit — pentru diferite circuite reale.

Metodele de transfigurare folosesc operații de transfigurare succesive, pentru a reduce rețele cu structură mai complicată la rețele cu structură mai simplă, ceea ce permite determinarea unor curenți sau tensiuni din rețea, fără să se rezolve un sistem de ecuații liniare cu multe ecuații și multe necunoscute, așa cum ar cere aplicarea teoremelor lui Kirchhoff. Totodată, prin transfigurare, se pot analiza proprietățile unor circuite pe baza proprietăților schemelor lor echivalente. Există numeroase teoreme care permit efectuarea de transfigurări și, în primul rînd, teoremele impedanțelor echivalente (v. par. 35.2), cu ajutorul cărora se înlocuiește un sistem de dipoli în serie sau în paralel cu un singur dipol. În acest capitol vom prezenta diferite alte asemenea teoreme.

Se numește *multipol* (sau *n-pol*) o rețea neizolată cu *n* borne de acces și ale cărei laturi interioare nu prezintă cuplaje inductive cu exteriorul. Un multipol interacționează deci cu exteriorul exclusiv prin intermediul celor *n* curenți $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \dots, \underline{I}_n$, absorbiți prin borne și al celor *n* potențiale $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \dots, \underline{V}_n$ (definite pînă la o constantă arbitrară) ale bornelor (v. fig. 38.2, a).

Condiția necesară și suficientă de transfigurare a unui multipol este invarianța curenților absorbiți din exterior atunci când se aplică aceleași diferențe de potențial între borne. În figura 38.2, *b* e prezentată schema topologică echivalentă tip stea a unui multipol, iar în figura 38.2, *c*, schema topologică echivalentă tip poligon complet a aceluiași multipol.

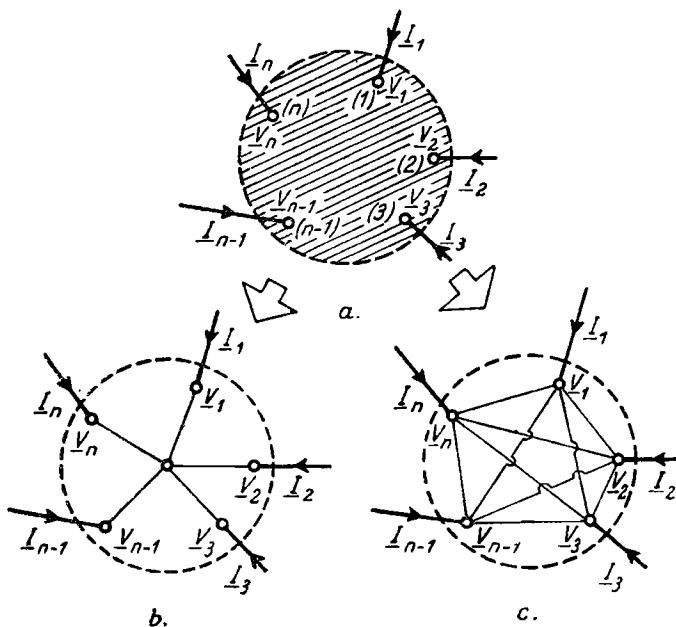


Fig. 38.2.

38.2.1. Teorema generatorului de tensiune echivalent (Thevenin-Helmholtz): O rețea liniară și activă, cu două borne *A*, *B* de ieșire și fără cuplaje inductive cu exteriorul (v. fig. 38.3, *a*) este echivalentă cu un generator ideal de tensiune, avînd t.e.m. $\underline{E}_g$ egală cu tensiunea la bornele rețelei la mersul în gol ($\underline{U}_{AB0}$), conectat în serie cu o impedanță $\underline{Z}_g$, egală cu impedanța echivalentă a rețelei pasivizate ($\underline{Z}_{AB0}$):

$$\underline{E}_g = \underline{U}_{AB0} \quad \underline{Z}_g = \underline{Z}_{AB0}. \quad (38.6)$$

Curentul $\underline{I}_{AB}$ debitat în exterior de rețea pe o sarcină de impedanță $\underline{Z}$ are deci expresia (dedusă din fig. 38.3, *b*):

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{E}_g}{\underline{Z} + \underline{Z}_g}, \quad (38.7)$$

care cu relația (38.6) devine (teorema lui Thevenin):

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB0}}{\underline{Z} + \underline{Z}_{AB0}}. \quad (38.8)$$

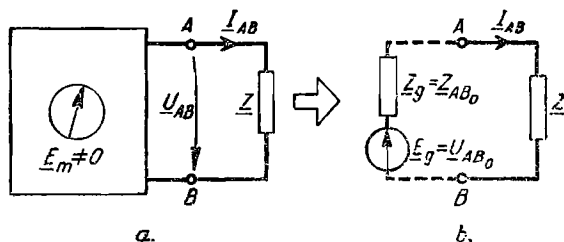


Fig. 38.3.

În relațiile de mai sus, $\underline{U}_{AB_0}$ e tensiunea $\underline{U}_{AB}$, care se stabilește la bornele rețelei, cînd $\underline{I}_{AB} = 0$ (mersul în gol), iar $\underline{Z}_{AB_0}$ e impedanța echivalentă a dipolului constituit de rețea (fără latura exterioară AB) după pasivizare.

Teorema generatorului de tensiune echivalent se demonstrează stabilind valabilitatea expresiei (38.8) a curentului pentru rețeaua dată, deoarece

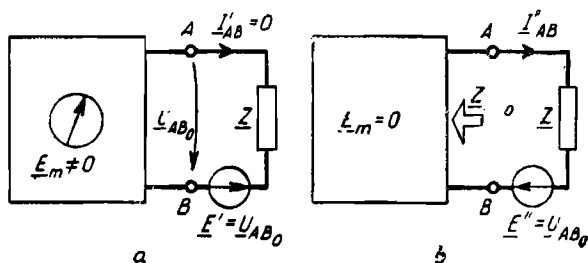


Fig. 38.4.

curenții (38.7) și (38.8) pot fi egali pentru orice impedanță de sarcină $\underline{Z}$ numai dacă sînt satisfăcute egalitățile (38.6). Demonstrația se bazează pe liniaritatea rețelei, adică pe teorema superpoziției. Rețeaua din figura 38.3, *a* se poate obține prin suprapunerea sistemelor de tensiuni electromotoare ale rețelelor din figura 38.4, *a* (rețeaua activă dată debitînd pe latura exterioară, în care s-a introdus un generator ideal de t.e.m. $\underline{E}'$ cu sens opus curentului $\underline{I}_{AB}$) și din figura 38.4, *b* (rețeaua dată pasivizată, pe care debitează latura exterioară, în care s-a introdus un generator ideal de t.e.m. $\underline{E}'$ cu același sens ca al curentului $\underline{I}_{AB}$). Rezultă atunci:

$$\underline{I}_{AB} = \underline{I}'_{AB} + \underline{I}''_{AB} = \underline{I}'_{AB} + \frac{\underline{E}'}{\underline{Z} + \underline{Z}_{AB_0}}, \quad (38.9)$$

ultimul termen fiind calculat prin înlocuirea rețelei pasivizate, cu impedanța ei complexă echivalentă $\underline{Z}_{AB_0}$. Se poate alege acum o astfel de valoare a t.e.m. auxiliare $\underline{E}'$, care să anuleze curentul $\underline{I}'_{AB}$. Deoarece teorema lui Joubert aplicată laturii exterioare se scrie în acest caz:

$$\frac{1}{\underline{Z}} (\underline{U}_{AB} + (-\underline{E}')) = \underline{I}'_{AB} = 0, \quad (38.10)$$

rezultă că trebuie să se aleagă:

$$\underline{E}' = (\underline{U}_{AB})_{\underline{I}'_{AB}=0} = \underline{U}_{AB_0}. \quad (38.11)$$

Cu aceste valori introduse în relația (38.9) se obține relația (38.8).

Observații: *a)* Teorema lui Thevenin (38.8) se utilizează pentru calculul curentului într-o latură oarecare AB , fără inductivități mutuale a unei rețele izolate date. Restul rețelei poate fi atunci înlocuit — din puuctul de vedere al curentului debitat în această latură — cu generatorul de tensiune echivalent în raport cu bornele AB .

b) Calculul tensiunii $\underline{U}_{AB_0}$ se face considerînd că latura AB lipsește, adică rezolvînd o rețea cu o latură mai puțin. Simplificarea e uneori importantă.

c) Calculul impedanței interioare $\underline{Z}_{AB_0}$ se face considerînd că latura AB lipsește și că rețeaua dată e pasivizată, adică toate sursele din laturile ei sînt înlocuite cu laturi pasive de impedanțe egale cu impedanțele interioare ale acestor surse (egale cu zero, dacă sursele erau ideale).

d) Dacă impedanța interioară a rețelei pasivizate e neglijabilă $Z_{AB0} \approx 0$, rețeaua e capabilă să mențină o tensiune constantă la borne $\underline{U}_{AB} \approx \underline{Z} \underline{I}_{AB} \approx \underline{U}_{AB0}$ și să debiteze o putere activă oricât de mare (v. par. 37.4.1); de aceea se mai numește rețea de putere infinită.

Aplicații: 1. Condițiile de echilibru ale punții de curent alternativ. Considerăm o punte Wheatstone, ale cărei laturi nu au inductivități mutuale (fig. 38.5, a). Curentul $\underline{I}_5$ din diagonală de măsură, considerată ca latură AB , se poate scrie cu relația (38.8):

$$\underline{I}_5 = \frac{\underline{U}_{AB0}}{\underline{Z}_5 + \underline{Z}_{AB0}} \quad (38.12)$$

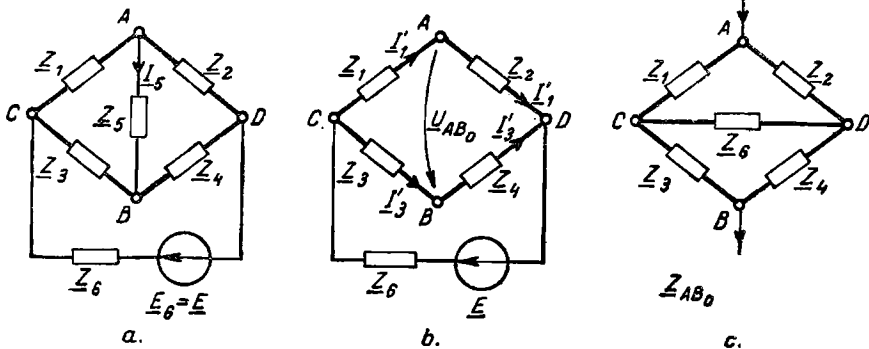


Fig. 38.5.

și se anulează atunci când $\underline{U}_{AB0} = 0$. Tensiunea de mers în gol se calculează pe schema din figura 38.5, b și este:

$$\underline{U}_{AB0} = -\underline{Z}_1 \underline{I}'_1 + \underline{Z}_3 \underline{I}'_3,$$

iar impedanța $\underline{Z}_{AB0}$ se obține cu ajutorul schemei din figura 38.5, c.

Dar

$$\underline{I}'_1 = \underline{I}'_6 \frac{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} = \underline{E} \frac{\underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_4}{\underline{Z}_6 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)}$$

$$\underline{I}'_3 = \underline{I}'_6 \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} = \underline{E} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_6 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)}$$

și rezultă:

$$\underline{U}_{AB0} = \underline{E} \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 - \underline{Z}_1 \underline{Z}_4}{\underline{Z}_6 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)} \quad (38.13)$$

Această expresie se anulează — oricare ar fi $\underline{E}$ și $\underline{Z}_6$ — dacă numărătorul e nul, $\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 - \underline{Z}_1 \underline{Z}_4 = 0$, adică dacă

$$\left[\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4} \right]^1 \quad (38.14)$$

Aceasta e condiția de echilibru în complex a punții de curent alternativ. Ca orice egalitate în complex, ea e echivalentă cu două egalități în real, care rezultă: fie înlocuind $\underline{Z}_k = Z_k e^{j\varphi_k}$ ($k = 1, 2, 3, 4$), în care caz se obțin condițiile:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4} \text{ și } \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_3 - \varphi_4. \quad (38.15)$$

¹ Relația (38.14) se putea obține și din egalitățile:

$$\underline{U}_{AB0} = -\underline{Z}_1 \underline{I}'_1 + \underline{Z}_3 \underline{I}'_3 = \underline{Z}_2 \underline{I}'_1 - \underline{Z}_4 \underline{I}'_3 = 0$$

fie înlocuind $\underline{Z}_k = R_k + jX_k$, în care caz se obțin condițiile :

$$R_1 R_4 - X_1 X_4 = R_2 R_3 - X_2 X_3 \text{ și } R_1 X_4 + R_4 X_1 = R_2 X_3 + R_3 X_2. \quad (38.16)$$

La echilibrarea unei punți de curent alternativ trebuie să se regleze independent doi parametri reali de circuit : de exemplu, R_4 și X_4 . Totodată, pentru ca să se realizeze condițiile (38.16), e posibil ca reactanța X_4 să trebuiască să fie neapărat pozitivă (și deci a unei bobine de inductivitate variabilă) sau neapărat negativă (și deci a unui condensator de capacitate variabilă).

2. *Schema echivalentă a unui generator cuplat cu un transformator.* Fie un generator de t.e.m. $\underline{E}_{g1}$ și impedanță $\underline{Z}_{g1}$, care alimentează o sarcină $\underline{Z}$ prin intermediul unui transformator, cu caracteristicile prezentate în paragraful 36.3.2. (v. fig. 38.6, a).

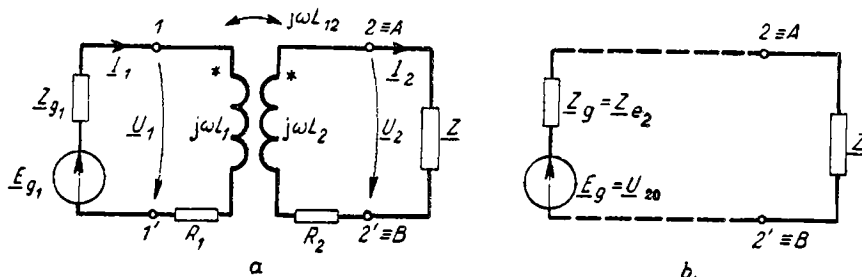


Fig. 38.6.

Considerind bornele de ieșire 2, 2' drept borne A, B, se poate stabili o schemă echivalentă de tipul unui generator de tensiune (v. fig. 38.6, b) pentru grupul generator-transformator, avînd :

$$\underline{E}_g = \underline{U}_{AB_0} = \underline{U}_{20} \text{ (tensiunea secundară de mers în gol)} \quad (38.17)$$

$$\underline{Z}_g = \underline{Z}_{AB_0} = \underline{Z}_{e2} \text{ (impedanța echivalentă de ieșire)}. \quad (38.18)$$

Tensiunea secundară de mers în gol se deduce din ecuațiile (36.25) ale transformatorului, în care punem $\underline{U}_1 = \underline{E}_{g1} - \underline{Z}_{g1} \underline{I}_1$ și $\underline{I}_2 = 0$,

$$\underline{U}_{20} = \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 \Big|_{\underline{I}_2 = 0} = \underline{E}_{g1} \frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{g1} + \underline{Z}_1}. \quad (38.19)$$

Impedanța echivalentă de ieșire e impedanța echivalentă, măsurată pe la bornele de ieșire 2, 2', cînd primarul e pasivizat, adică $\underline{E}_{g1} = 0$. Ea este impedanța echivalentă a transformatorului, calculată în paragraful 36.3.2, dacă se intervertește rolul înfășurărilor 1 și 2. Se observă că acum impedanța de sarcină e $\underline{Z}_{g1}$. Din relația (36.30) rezultă :

$$\underline{Z}_{e2} = \underline{Z}_2 - \frac{\underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{g1}}. \quad (38.20)$$

Punînd $\underline{Z}_{12} = j\omega L_{12}$, $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$, $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$, elementele schemei echivalente sînt :

$$\underline{E}_g = j\omega L_{12} \frac{\underline{E}_{g1}}{R_1 + j\omega L_1}; \quad \underline{Z}_g = R_2 + j\omega L_2 + \frac{\omega^2 L_{12}^2}{R_1 + j\omega L_1 + \underline{Z}_{g1}}. \quad (38.21)$$

Dacă transformatorul e apropiat de un transformator ideal,

$$R_1 \approx 0, \quad R_2 \approx 0, \quad L_1 L_2 = L_{12}^2, \quad L_1 / L_2 \approx N_1^2 / N_2^2 \quad (38.22)$$

și

$$\omega L_1 \gg \underline{Z}_{g1}. \quad (38.22')$$

Elementele schemei echivalente devin :

$$\underline{E}_g \approx \frac{N_2}{N_1} \underline{E}_{g1}; \quad \underline{Z}_g \approx \frac{N_2^2}{N_1^2} \underline{Z}_{g1}. \quad (38.23)$$

Acest rezultat se exprimă spunînd că transformatorul ideal multiplică t.e.m. a generatorului cu raportul lui de transformare N_2/N_1 , iar impedanța generatorului cu pătratul raportului de transformare.

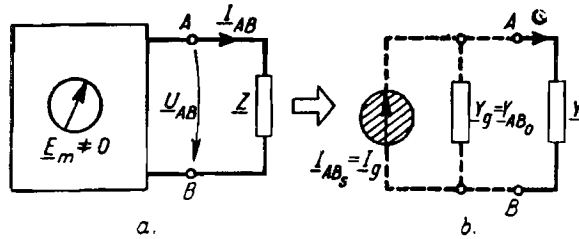


Fig. 38.7.

38.2.2. Teorema generatorului de curent echivalent. O rețea liniară și activă, cu două borne A, B de ieșire și fără cuplaje inductive cu exteriorul (v. fig. 38.7, a) este echivalentă cu un generator ideal de curent, avînd curentul injectat $\underline{I}_g$ egal cu curentul debitat de rețea la mersul în scurtcircuit ($\underline{I}_{AB_s}$) conectat în paralel cu o admitanță $\underline{Y}_g$, egală cu admitanța interioară a rețelei pasivizate ($\underline{Y}_{AB0}$) :

$$\underline{I}_g = \underline{I}_{AB_s}; \quad \underline{Y}_g = \underline{Y}_{AB0}. \quad (38.24)$$

Tensiunea $\underline{U}_{AB}$ produsă de rețea la bornele A, B ale impedanței de sarcină $\underline{Z} = 1/\underline{Y}$ are deci expresia (dedusă din fig. 38.7, b) :

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{I}_g}{\underline{Y} + \underline{Y}_g}, \quad (38.25)$$

care cu relația (38.24) devine (teorema lui Norton) :

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{I}_{AB_s}}{\underline{Y} + \underline{Y}_{AB0}}. \quad (38.26)$$

În relațiile de mai sus, $\underline{I}_{AB_s}$ e curentul $\underline{I}_{AB}$ debitat de rețea la legarea bornelor A, B scurtcircuit ($\underline{U}_{AB} = 0, \underline{Z} = 0$), calculabil cu ajutorul teoremei lui Thevenin (38.8) :

$$\underline{I}_{AB_s} = \underline{I}_{AB} \Big|_{\underline{Z}=0} = \frac{\underline{U}_{AB0}}{\underline{Z}_{AB0}} = \underline{U}_{AB0} \underline{Y}_{AB0}, \quad (38.27)$$

iar

$$\underline{Y}_{AB0} = 1/\underline{Z}_{AB0} \quad (38.28)$$

e admitanța echivalentă a dipolului constituit de rețea (fără latura exterioră AB) după pasivizare.

Teorema generatorului de curent echivalent se demonstrează stabilind valabilitatea relației (38.26), deoarece tensiunile (38.25) și (38.26) pot fi egale, pentru orice admitanță de sarcină $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$, numai dacă sînt satisfăcute egalitățile (38.24). Relația (38.26) rezultă imediat din relația (38.8) și (38.27) :

$$\underline{U}_{AB} = \underline{Z} \underline{I}_{AB} = \frac{\underline{Z} \underline{U}_{AB_0}}{\underline{Z} + \underline{Z}_{AB_0}} = \frac{\frac{\underline{U}_{AB_0}}{\underline{Z}_{AB_0}}}{\frac{1}{\underline{Z}} + \frac{1}{\underline{Z}_{AB_0}}} = \frac{\underline{I}_{AB_s}}{\underline{Y} + \underline{Y}_{AB_0}}. \quad (38.29)$$

La aplicarea acestei teoreme calculăm separat curentul de scurtcircuit $\underline{I}_{AB_s}$, și admitanța interioară $\underline{Y}_{AB_0}$ și deducem astfel elementele schemei echivalente (38.7, b) sau tensiunea $\underline{U}_{AB}$, respectiv curentul $\underline{I}_{AB} = \underline{U}_{AB} \underline{Y}$.

Aplicație : Determinăm schema echivalentă ca generator de curent a dipolului activ din figura 38.8, a. La conectarea bornelor A, B în scurtcircuit, latura (R_2, L_2) e scurtcircuitată și nu e parcursă de curent, așa încît :

$$\underline{I}_{AB_s} = (\underline{I}_1)_{U_{AB} = 0} = \frac{\underline{E}}{R_1}.$$

Admitanța interioară e suma admitanțelor celor două laturi în paralel :

$$\underline{Y}_{AB_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + j\omega L_2} = \frac{R_1 + R_2 + j\omega L_2}{R_1(R_2 + j\omega L_2)}.$$

Se obține schema din figura 38.8, b.

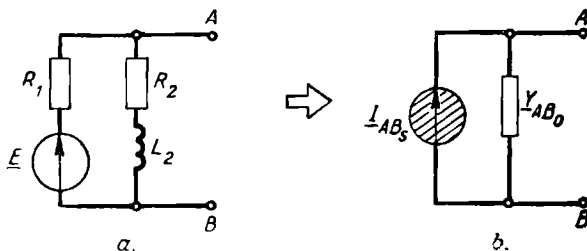


Fig. 38.8.

38.2.3. Teoremele transfigurării stea-triunghi. Cele mai simple rețele cu trei borne de acces sînt constituite din trei laturi conectate în triunghi (fig. 38.9, a), sau în stea (fig. 38.9, b), fără inductivități mutuale. Astfel de rețele se numesc triunghiuri de impedanțe (admitanțe), respectiv stele de impedanțe (admitanțe).

A. Transfigurarea triunghi-stea: Orice triunghi de impedanțe Z_{12} , Z_{23} , Z_{31} admite o schemă echivalentă unică în stea, ale cărei laturi au impedanțele

$$\boxed{Z_1 = \frac{Z_{12} Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}}; \quad Z_2 = \frac{Z_{23} Z_{12}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}; \quad Z_3 = \frac{Z_{31} Z_{23}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}, \quad (38.30)$$

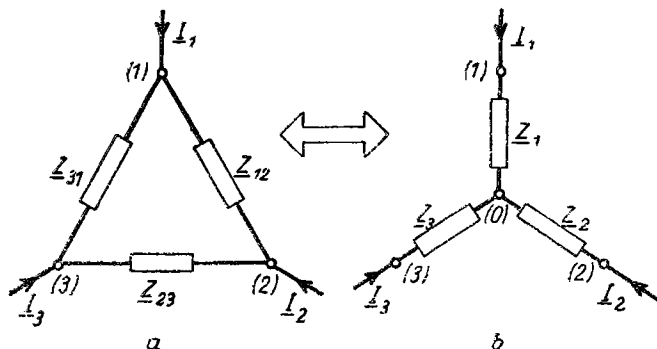


Fig. 38.9.

respectiv admitanțele:

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{Y_{12} Y_{23} + Y_{23} Y_{31} + Y_{31} Y_{12}}{Y_{23}}; \quad Y_2 = \dots; \quad Y_3 = \dots \quad (38.31)$$

Relațiile (38.30) — și (38.31) — se deduc unele din altele, prin permutarea circulară a indicilor 1, 2, 3. Relațiile (38.30) se pot stabili scriind că echivalența are loc în diferite situații particulare. Dacă, de exemplu, borna (1) nu e conectată în exterior, dipolul rămas cu bornele (2) și (3) trebuie să aibă aceeași impedanță echivalentă la triunghi și la stea, adică:

$$\frac{Z_{23}(Z_{12} + Z_{31})}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} = Z_2 + Z_3. \quad (38.32)$$

Repetind raționamentul pentru cazul când borna (2) nu e conectată, respectiv borna (3) nu e conectată, rezultă încă două relații analoge, care se pot scrie direct tot prin permutări circulare:

$$\frac{Z_{31}(Z_{23} + Z_{12})}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} = Z_3 + Z_1 \quad (38.32')$$

$$\frac{Z_{12}(Z_{23} + Z_{31})}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} = Z_1 + Z_2. \quad (38.32'')$$

Făcînd semisuma relațiilor (38.32), (38.32'), (38.32''), se obține:

$$\frac{Z_{12}Z_{23} + Z_{23}Z_{31} + Z_{31}Z_{12}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} = Z_1 + Z_2 + Z_3 \quad (38.33)$$

și scăzînd pe rînd fiecare din aceste relații din (38.33), se obțin relațiile (38.30). Relațiile (38.31) rezultă din (38.30), punînd $Z_{jk} = 1/Y_{jk}$ ($j, k = 1, 2, 3$).

B. Transfigurarea stea-triunghi: Orice stea de admitanțe $\underline{Y}_1 = 1/\underline{Z}_1$, $\underline{Y}_2 = 1/\underline{Z}_2$ și $\underline{Y}_3 = 1/\underline{Z}_3$ admite o schemă echivalentă în triunghi, unică, ale cărei laturi au admitanțele:

$$\underline{Y}_{12} = \frac{\underline{Y}_1 \underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}; \quad \underline{Y}_{23} = \frac{\underline{Y}_2 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}; \quad \underline{Y}_{31} = \frac{\underline{Y}_3 \underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}, \quad (38.34)$$

respectiv impedanțele

$$\underline{Z}_{12} = \frac{1}{\underline{Y}_{12}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}; \quad \underline{Z}_{23} = \dots; \quad \underline{Z}_{31} = \dots \quad (38.35)$$

Relațiile (38.34) și (38.35) se deduc unele din altele prin permutarea circulară a indicilor 1, 2, 3. Relatiile (38.34) se pot stabili scriind că echivalența are loc în diferite situații particulare. Dacă, de exemplu, bornele (2) și (3) sînt conectate împreună în scurtcircuit, dipolul rămas cu bornele (1) și (2) (reunit cu (3)) trebuie să aibă aceeași admitanță echivalentă la triunghi și la stea, adică:

$$\underline{Y}_{12} + \underline{Y}_{31} = \frac{\underline{Y}_1(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}. \quad (38.36)$$

Scriind alte două relații analoge prin permutări circulare, făcînd semisuma tuturor și scăzînd din ea pe fiecare în parte, se obțin relațiile (38.34). Relatiile (38.35) rezultă imediat din relația (38.34), punînd $\underline{Y}_j = 1/\underline{Z}_j$ ($j = 1, 2, 3$).

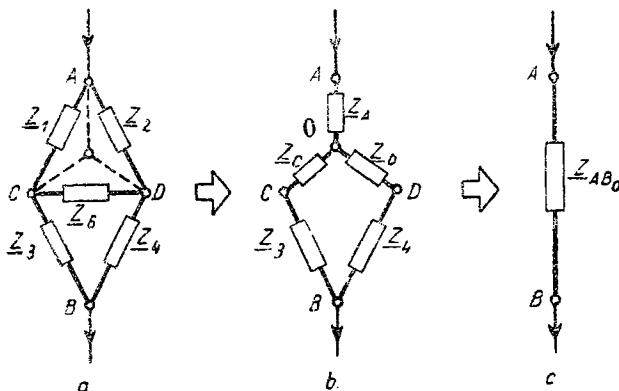


Fig. 38.10.

Aplicații: 1. *Curentul din diagonală de măsură a unei punți.* Considerăm puntea Wheatstone, studiată în aplicația 1 de la paragraful 38.2.1, (fig. 38.5). Pentru a determina curentul I_5 cu relația (38.12), e necesară determinarea impedanței interioare $\underline{Z}_{AB0}$ a punții în raport cu latura AB. Pentru aceasta trebuie determinată impedanța echivalentă a dipolului cu bornele A, B, obținut, pasivizînd puntea și suprimînd latura AB (v. fig. 38.5, c și 38.10, a). Folosind transfigurarea triunghi-stea, se poate stabili o schemă echivalentă cu elemente serie și paralel (fig. 38.10, b), a cărei impedanță echivalentă se calculează fără dificultăți.

Rezultă succesiv : — impedanțele stelei echivalente :

$$Z_A = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_6}; \quad Z_C = \frac{Z_6 Z_1}{Z_1 + Z_2 + Z_6}; \quad Z_D = \frac{Z_6 Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_6}$$

— impedanța echivalentă între O și B :

$$Z_{OB} = \frac{Z_3 Z_4 (Z_1 + Z_2 + Z_6) + Z_6 (Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3) + Z_1 Z_2 Z_6^2 / (Z_1 + Z_2 + Z_6)}{Z_6 (Z_1 + Z_2) + (Z_3 + Z_4) (Z_1 + Z_2 + Z_6)}$$

— impedanța echivalentă totală :

$$Z_{AB_0} = Z_A + Z_{OB} = \frac{Z_1 Z_2 (Z_3 + Z_4) + Z_3 Z_4 (Z_1 + Z_2) + Z_6 [Z_1 Z_2 + Z_3 Z_4 + Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3]}{Z_6 (Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4) + (Z_3 + Z_4) (Z_1 + Z_2)} \quad (38.37)$$

Înlocuind această expresie și (38.13) în (38.12), se obține expresia căutată a curentului în diagonală punții :

$$I_5 = \frac{E}{Z_6 [Z_3 (Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4) + (Z_1 + Z_3) (Z_2 + Z_4)] + Z_6 (Z_1 + Z_2) (Z_3 + Z_4) + Z_1 Z_2 (Z_3 + Z_4) + Z_3 Z_4 (Z_1 + Z_2)} \frac{Z_2 Z_3 - Z_1 Z_4}{Z_6} \quad (38.38)$$

Adesea se folosesc punți, în care impedanța laturii generatorului, Z_6 , e neglijabilă. În acest caz :

$$I_5 = \frac{E}{Z_6 (Z_1 + Z_2) (Z_3 + Z_4) + Z_1 Z_2 (Z_3 + Z_4) + Z_3 Z_4 (Z_1 + Z_2)} \frac{Z_2 Z_3 - Z_1 Z_4}{Z_6} \quad (38.39)$$

2. *Transfigurarea unei stele în triunghi.* Considerăm steaua de impedanțe din figura 38.11, în care $L\omega = 1/C\omega$, adică $j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = 0$.

Triunghiul echivalent are admitanțele (v. 38.34) :

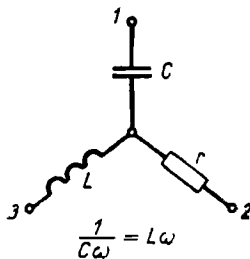


Fig. 38.11.

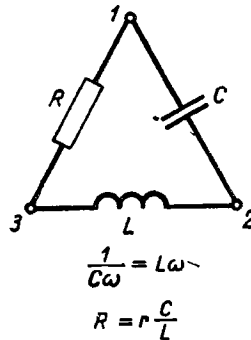


Fig. 38.12.

$$Y_{12} = \frac{j\omega C \cdot \frac{1}{r}}{j\omega C + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{r}} = j\omega C$$

$$Y_{23} = \frac{\frac{1}{r} \cdot j\omega L}{j\omega C + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{r}} = \frac{1}{j\omega L}$$

$$Y_{31} = \frac{j\omega C \cdot \frac{1}{j\omega L}}{j\omega C + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{r}} = \frac{Cr}{L} = \frac{1}{R}$$

Triunghiul echivalent e indicat în figura 38.12.

38.2.4. Teorema lui Vaschy. Dacă în toate laturile care se întâlnesc într-un nod al unei rețele (fig. 38.13, a) se introduc generatoare ideale de tensiune,

avînd t.e.m. egale și îndreptate la fel către nod (fig. 38.13, *b*) curenții din rețea nu se schimbă.

În adevăr, ecuațiile lui Kirchhoff se scriu la fel, înainte și după introducerea surselor ideale menționate, deoarece în orice ochi (*p*), care trece prin nodul considerat, apar două surse de t.e.m. egale și opuse, cu o contribuție nulă la t.e.m. a ochiului.

Teorema lui Vaschy se utilizează pentru a transforma o latură activă în latură pasivă, fără a modifica curenții. E suficient să se aplice teorema la unul din capetele laturii, alegînd t.e.m. $\underline{E}$ a surselor ideale astfel, încît să compenseze exact t.e.m. a sursei din latura considerată.

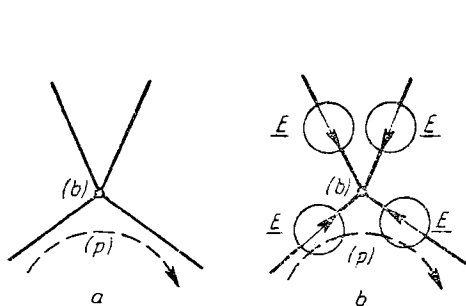


Fig. 38.13.

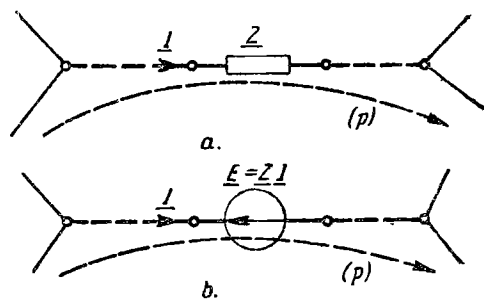


Fig. 38.14.

38.2.5 Teorema compensației. Orice porțiune pasivă de latură necuplată inductiv cu altele, avînd impedanța proprie $\underline{Z}$ și curentul $\underline{I}$ (fig. 38.14, *a*), poate fi înlocuită cu o sursă ideală de t.e.m. $\underline{E} = \underline{Z}\underline{I}$, cu sens opus curentului (fig. 38.14, *b*), fără ca să se schimbe curenții din rețea.

Și în acest caz, teorema se demonstrează observînd că ecuațiile lui Kirchhoff rămîn neschimbate: cele două elemente de circuit substituite unul altuia produc aceeași cădere de tensiune la borne pentru orice ochi (*p*) care trece prin latura considerată.

38.3. Metoda curenților de ochiuri (Maxwell)

Metoda curenților de ochiuri e o metodă sistematică de rezolvare a rețelilor, în care se operează cu noi variabile, astfel încît numărul ecuațiilor și al necunoscutelor să se reducă la numărul O al ochiurilor independente, totdeauna mai mic decît numărul L al laturilor (sau cel mult egal cu el).

38.3.1. Curenții de ochiuri. Noile variabile sînt anumiți curenți închiși, fictivi, atribuiți cîte unul fiecărui ochi fundamental, cu sensul de referință al ochiului. Se numesc curenți de ochiuri sau curenți ciclici (de contur, de buclă) și vor fi notați cu accent, spre a fi deosebiți de curenții laturilor:

$$I'_1, I'_2, \dots, I'_q, \dots, I'_O.$$

Prin definiție, fiecare curent de latură I_s ($s = 1, 2, \dots, L$) e egal cu suma algebrică a curenților de ochiuri care trec prin latura respectivă :

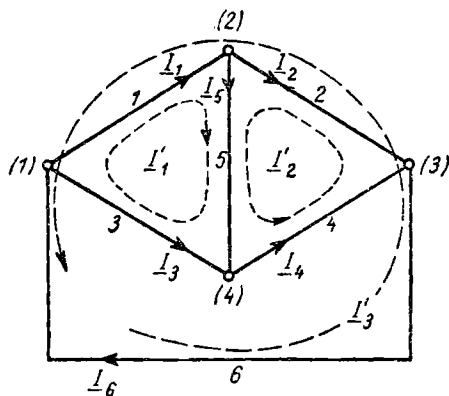


Fig. 38.15.

$$\underline{I}_s = \sum_{q \in q_s} I'_q. \quad (38.40)$$

În această sumă intră cu semnul (+) curenții de ochiuri, al căror sens prin latură coincide cu al curentului laturii, și cu semnul (—) curenții de ochiuri, al căror sens prin latură nu coincide cu al curentului laturii.

Fie, de exemplu, puntea Wheatstone din figura 38.5, a, a cărei schemă topologică e dată în figura 38.15, și care are trei ochiuri fundamentale, alese ca în figură. Relațiile (38.40) pentru această rețea sînt :

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}'_1 - \underline{I}'_3; \quad \underline{I}_2 = -\underline{I}'_2 - \underline{I}'_3; \quad \underline{I}_3 = -\underline{I}'_1; \\ \underline{I}_4 &= \underline{I}'_2; \quad \underline{I}_5 = \underline{I}'_1 + \underline{I}'_2; \quad \underline{I}_6 = -\underline{I}'_3. \end{aligned} \quad (38.40')$$

Din punct de vedere matematic, relațiile (38.40) reprezintă o schimbare liniară de variabilă, care duce de la cele L necunoscute vechi (curenții de laturi) la O necunoscute noi (curenții de ochiuri). Pentru ca o astfel de reducere a numărului de necunoscute să fie posibilă, trebuie ca schimbarea de variabilă (38.40) să fie compatibilă cu sistemul (36.22), al celor L ecuații Kirchhoff. Se verifică fără dificultăți că — înlocuind în cele $N-S$ ecuații de noduri

$$\sum_{k \in (b)} \underline{I}_k = 0 \quad b = 1, 2, \dots, N-S, \quad (38.41)$$

date de prima teoremă a lui Kirchhoff, expresiile (38.40) ale curenților — aceste ecuații sînt satisfăcute identic (adică oricare ar fi valorile noilor variabile, curenții de ochiuri). Aceasta, pentru că fiecare curent de ochi — fiind închis — intră o dată și iese o dată din nodul considerat, aducînd o contribuție nulă la curentul total printr-o suprafață închisă care înconjură nodul :

$$\sum_{k \in (b)} \sum_{q \in (q)} \underline{I}'_q = 0. \quad (38.42)$$

Fie, de exemplu, nodul (2) al rețelei din figura 38.15, pentru care prima ecuație Kirchhoff se scrie :

$$-\underline{I}_1 + \underline{I}_5 + \underline{I}_2 = 0.$$

Înlocuind aici expresiile (38.40), această ecuație devine identitatea :

$$-(\underline{I}'_1 - \underline{I}'_3) + \underline{I}'_1 + \underline{I}'_2 + (-\underline{I}'_2 - \underline{I}'_3) = -\underline{I}'_1 + \underline{I}'_3 + \underline{I}'_1 + \underline{I}'_2 - \underline{I}'_2 - \underline{I}'_3 \equiv 0.$$

¹ Suma se face asupra tuturor curenților ochiurilor (q) cărora latura s le aparține.

Prin trecerea la noile variabile se satisfac identic primele ecuații Kirchhoff, adică $N-S$ ecuații. Cele O noi variabile — curenții de ochiuri — vor fi atunci univoc determinate de cele $L - (N-S) = O$ ecuații rămase: ecuațiile date de a doua teoremă a lui Kirchhoff.

38.3.2. Teorema curenților de ochiuri. Sistemul de O ecuații satisfăcut de curenții de ochiuri e dat de teorema curenților de ochiuri. Pentru a se obține acest sistem, înlocuim în ecuațiile de ochiuri (36.22) ale teoremei a doua Kirchhoff expresiile (38.40). Se obțin relațiile:

$$\sum_{m \in (p)} \left[\sum_{s=1}^L \underline{Z}_{ms} \sum_{q \in (q)} I'_q \right] = \sum_{m \in (p)} \underline{E}_m. \quad (p = 1, 2, \dots, O).$$

Intervertind ordinea de sumare, se obține o sumă multiplă de termeni de forma $\underline{Z}_{ms} \underline{I}'_q$. În această sumă pot fi grupați împreună toți termenii cari conțin în factor același curent de ochi $\underline{I}'_q$, curent care se poate scoate în factor comun în această grupare. Fiecare curent de ochi va apărea deci factor pe lângă o sumă de impedanțe $\underline{Z}_{ms}$, și întreaga expresie va putea fi ordonată după curenții de ochiuri, căpătînd forma:

$$\sum_{q=1}^O \left[\sum_{\substack{m \in (p) \\ s \in (q)}} \underline{Z}_{ms} \right] \underline{I}'_q = \sum_{m \in (p)} \underline{E}_m. \quad (38.43)$$

Se notează cu:

$$\underline{E}'_p = \sum_{m \in (p)} \underline{E}_m \quad (38.44)$$

suma algebrică a tensiunilor electromotoare din laturile ochiului (p) și se numește *tensiune electromotoare de ochi*. Se mai notează cu:

$$\underline{Z}'_{pq} = \sum_{\substack{m \in (p) \\ s \in (q)}} \underline{Z}_{ms} \quad (38.45)$$

coeficientul de natura unei impedanțe al curentului ciclic $\underline{I}'_q$ din ecuația ochiului (p), și se numește *impedanță de cuplaj dintre ochiurile q și p ($q \neq p$)*, respectiv *impedanță proprie a ochiului p ($p = q$)*. Cu relațiile (38.44) și (38.45) se obțin din relația (38.43) ecuațiile curenților de ochiuri:

$$\sum_{q=1}^O \underline{Z}'_{pq} \underline{I}'_q = \underline{E}'_p \quad q=1, 2, \dots, O, \quad (38.46)$$

care, explicit, formează sistemul:

$$\begin{aligned} \underline{Z}'_{11} \underline{I}'_1 + \underline{Z}'_{12} \underline{I}'_2 + \dots + \underline{Z}'_{1O} \underline{I}'_O &= \underline{E}'_1 \\ \underline{Z}'_{21} \underline{I}'_1 + \underline{Z}'_{22} \underline{I}'_2 + \dots + \underline{Z}'_{2O} \underline{I}'_O &= \underline{E}'_2 \end{aligned} \quad (38.47)$$

$$\underline{Z}'_{O1} \underline{I}'_1 + \underline{Z}'_{O2} \underline{I}'_2 + \dots + \underline{Z}'_{OO} \underline{I}'_O = \underline{E}'_O$$

Pentru a scrie dintr-o dată aceste ecuații, e necesar să clarificăm interpretarea coeficientului $\underline{Z}'_{pq}$, interpretare care rezultă din (38.45):

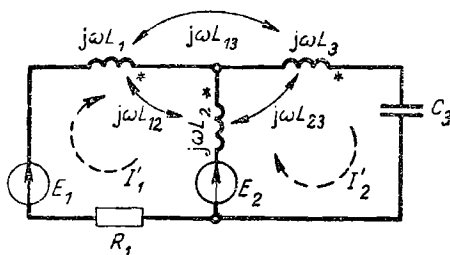


Fig. 38.16.

ductivitate mutuală va intra de două ori. Semnul fiecărei inductivități mutuale depinde de modul cum se asociază sensul ochiului (p) cu bornele polarizate ale celor două bobine din laturile m și s , fiecare neconcordanță însemnând o schimbare de semn. Fie, de exemplu, rețeaua din figura 38.16. Impedanțele proprii ale ochiurilor (1) și (2) sînt :

$$\begin{aligned} Z'_{11} &= R_1 + j\omega L_1 + j\omega L_2 - j\omega L_{12} - j\omega L_{21} = R_1 + j\omega(L_1 + L_2) - j2\omega L_{12} \\ Z'_{22} &= j\omega L_2 + j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_3} + j\omega L_{23} + j\omega L_{32} = j\omega(L_2 + L_3) + \frac{1}{j\omega C_3} + j2\omega L_{23}. \end{aligned} \quad (38.49)$$

Semnul (—) din fața lui $L_{12} = L_{21}$ se datorește faptului că sensul ochiului (1) intră în borna polarizată a bobinei L_2 , dar iese prin borna polarizată a bobinei L_1 . Semnul (+) din fața lui $L_{23} = L_{32}$ se datorește faptului că sensul ochiului (2) iese prin borna polarizată și la bobina L_3 și la bobina L_2 .

— Considerăm apoi coeficienții nediagonali, cu $p \neq q$

$$Z'_{pq} = \sum_{\substack{m \in (p) \\ s \in (q)}} Z_{ms} = \sum_{\substack{m \in (p) \\ m \in (q)}} Z_{mm} + \sum_{\substack{m \in (p) \\ s \in (q) \\ m \neq s}} j\omega L_{ms}. \quad (38.50)$$

Aceasta este *impedanța de cuplaj a ochiurilor* (p) și (q). Este egală cu suma algebrică a impedanțelor proprii ale laturilor comune ochiurilor (p) și (q) — cu semnul (+), dacă ochiurile au același sens prin latura comună, și cu semnul (—), dacă au sensuri opuse — adunată cu suma impedanțelor mutuale dintre o latură s , aparținând ochiului (q) și o latură m , aparținând ochiului (p) $\neq$ (q). Semnul fiecărei inductivități mutuale depinde de modul cum se asociază sensurile ochiurilor (p) și (q), cu bornele polarizate ale celor două bobine din laturile $m \in (p)$ și $s \in (q)$, fiecare neconcordanță însemnând o schimbare de semn.

Fie, de exemplu, rețeaua din figura 38.16. Impedanțele de cuplaj dintre ochiurile (1) și (2) sînt :

$$\begin{aligned} Z'_{12} &= -j\omega L_2 - j\omega L_{23} + j\omega L_{12} + j\omega L_{13} \\ Z'_{21} &= -j\omega L_2 - j\omega L_{23} + j\omega L_{21} + j\omega L_{31} \end{aligned} \quad (38.51)$$

Observații: 1. Din însuși modul cum sînt definite și deoarece $L_{ms} = L_{sm}$, impedanțele de cuplaj dintre ochiuri satisfac relația de reciprocitate :

$$Z'_{p1} = Z'_{q2} \quad (38.52)$$

(v. exemplul (38.51), în care $Z'_{12} = Z'_{21}$).

2. Semnul cu care apare o inductivitate mutuală în coeficienții ecuațiilor curenților de ochiuri (38.47) e hotărît pînă la urmă de modul cum se asociază față de bornele polarizate sensul de scriere al ecuației pe ochiul considerat cu sensul curentului de ochi (ciclic), care induce că-

— Considerăm mai întîi coeficienții diagonali, cu $p = q$,

$$Z'_{pp} = \sum_{\substack{m \in (p) \\ s \in (q)}} Z_{ms} = \sum_{m \in (p)} Z_{mm} + \sum_{\substack{m \in (p) \\ s \in (q) \\ m \neq s}} j\omega L_{ms}. \quad (38.48)$$

Aceasta este *impedanța proprie a ochiului* p . Este egală cu suma impedanțelor proprii Z_{mm} ale laturilor m care aparțin ochiului (p) — adunată cu suma algebrică a impedanțelor mutuale dintre laturile m și s , aparținînd ambele ochiului (p). Deoarece $L_{ms} = L_{sm}$, la scrierea explicită a acestei ultime sume, fiecare in-

derea de tensiune respectivă. Sensurile de referință ale laturilor nu intervin în această regulă; de aceea e preferabil ca ele să nu se indice pe figură atunci când scriem ecuațiile (38.47).

38.3.3. **Aplicarea metodei curenților de ochiuri.** Se procedează în felul următor:

a) Se aleg ochiurile fundamentale, sensurile lor de referință și se numerotează.

b) Se calculează cu (38.44) t.e.m. de ochiuri $\underline{E}_p$.

c) Se calculează impedanțele proprii și mutuale de ochiuri $\underline{Z}_{pp}$ și $\underline{Z}_{pq}$ cu relațiile (38.48) și (38.50).

d) Se scriu ecuațiile curenților de ochiuri (38.47).

e) Se rezolvă în raport cu curenții de ochiuri.

f) Se aleg sensurile de referință pe laturi, se numerotează laturile.

g) Se calculează curenții de laturi cu relația (38.40).

h) Se verifică calculele (de ex. cu bilanțul puterilor).

Ca exemplu, considerăm rețeaua din figura 38.16, pentru care ecuațiile curenților de ochiuri sînt:

$$\left. \begin{aligned} [R_1 + j\omega(L_1 + L_2) - j2\omega L_{12}] \underline{I}'_1 + [-j\omega L_2 - j\omega(L_{23} - L_{12} - L_{13})] \underline{I}'_2 &= \underline{E}_1 - \underline{E}_2 \\ [-j\omega L_2 - j\omega(L_{23} - L_{12} - L_{13})] \underline{I}'_1 + \left[j\omega(L_2 + L_3) + \frac{1}{j\omega C_3} + j2\omega L_{23} \right] \underline{I}'_2 &= \underline{E}_2 \end{aligned} \right\} \quad (38.53)$$

38.3.4. **Admitanțele de transfer dintre ochiuri.** Dacă se rezolvă ecuațiile curenților de ochiuri cu regula lui Cramer, un curent de ochi oarecare — de exemplu $\underline{I}'_q$ — are expresia:

$$\underline{I}'_q = \frac{\begin{vmatrix} \underline{Z}'_{11} \underline{Z}'_{12} \dots \underline{E}'_1 & \underline{Z}'_{10} \\ \underline{Z}'_{21} \underline{Z}'_{22} \dots \underline{E}'_2 & \underline{Z}'_{20} \\ \dots & \dots \\ \underline{Z}'_{p1} \underline{Z}'_{p2} & \underline{E}'_p \dots \underline{Z}'_{p0} \\ \dots & \dots \\ \underline{Z}'_{o1} \underline{Z}'_{o2} \dots \underline{E}'_o & \dots \underline{Z}'_{oo} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \underline{Z}'_{11} \underline{Z}'_{12} \dots \underline{Z}'_{1q} & \underline{Z}'_{10} \\ \underline{Z}'_{21} \underline{Z}'_{22} \dots \underline{Z}'_{2q} & \underline{Z}'_{20} \\ \dots & \dots \\ \underline{Z}'_{pq} \underline{Z}'_{p2} & \underline{Z}'_{pq} \dots \underline{Z}'_{p0} \\ \dots & \dots \\ \underline{Z}'_{o1} \underline{Z}'_{o2} \dots \underline{Z}'_{oq} & \dots \underline{Z}'_{oo} \end{vmatrix}} \quad (38.54)$$

Notînd cu $\underline{\Delta}'$ determinantul sistemului și cu $\underline{\Delta}'_{p1}$ minorul normalizat al elementului $\underline{Z}'_{pq}$ din $\underline{\Delta}'$, dezvoltarea numărătorului după coloana q duce la expresia:

$$\underline{I}'_q = \frac{\underline{\Delta}'_{p1}}{\underline{\Delta}'} \underline{E}'_1 + \frac{\underline{\Delta}'_{p2}}{\underline{\Delta}'} \underline{E}'_2 + \dots + \frac{\underline{\Delta}'_{pq}}{\underline{\Delta}'} \underline{E}'_p + \dots + \frac{\underline{\Delta}'_{oq}}{\underline{\Delta}'} \underline{E}'_o. \quad (38.55)$$

sau

$$\underline{I}'_q = \underline{Y}'_{q1} \underline{E}_1 + \underline{Y}'_{q2} \underline{E}_2 + \dots + \underline{Y}'_{qo} \underline{E}_o = \sum_{p=1}^o \underline{Y}'_{pq} \underline{E}_q. \quad (38.56)$$

În această relație, coeficientul

$$\underline{Y}'_{qp} = \frac{\underline{\Delta}'_{p1}}{\underline{\Delta}'} = (\underline{I}'_q)_{\substack{\underline{E}'_p = 1 \\ \underline{E}'_q = 0 \ (q \neq p)}} \quad (38.57)$$

se numește admitanță de transfer de la ochiul p la ochiul q . Curenții de ochiuri sînt deci funcțiuni liniare și omogene de t.e.m. de ochiuri, ale căror coeficienți sînt admitanțele de transfer între ochiuri, determinate numai de impedanțele laturilor și de structura rețelei.

38.3.5. **Teorema reciprocității.** Deoarece $\underline{Z}'_{pq} = \underline{Z}'_{qp}$, relația (38.52), determinantul $\underline{\Delta}'$ e simetric față de diagonala principală și toți minorii $\underline{\Delta}'_{pq}$ satisfac condiția $\underline{\Delta}'_{p1} = \underline{\Delta}'_{qp}$. Din relația (38.57) rezultă că această condiție e satisfăcută și de admitanțele de transfer între ochiuri

$$\underline{Y}'_{pq} = \underline{Y}'_{qp}. \quad (38.58)$$

Relația (38.56) e valabilă pentru orice sistem de t.e.m., cu aceiași coeficienți. Putem considera că există în rețea numai o singură sursă ideală de t.e.m. $\underline{E}$ conectată în latura $m \in (p)$ și alegem astfel ochiurile fundamentale, ca numai ochiul (p) să treacă prin latura m și numai ochiul (q) să treacă printr-o altă latură s (fig. 38.17, a). În acest caz, toți $\underline{E}'_{q \neq p} = 0$, $\underline{E}'_p = \underline{E}_m = \underline{E}$, iar $\underline{I}_s = \underline{I}'_q$; cu relația (38.56):

$$\underline{I}_s = \underline{I}'_q = \underline{Y}'_{qp} \underline{E}'_p = \underline{Y}'_{qp} \underline{E}, \quad (38.59)$$

iar cu relația (38.2):

$$\underline{I}_s = \underline{Y}_{sm} \underline{E}_m = \underline{Y}_{sm} \underline{E}, \quad (38.60)$$

adică

$$\underline{Y}'_{qp} = \underline{Y}_{sm}. \quad (38.61)$$

Se pot deci totdeauna alege ochiurile astfel ca admitanțele de transfer între laturi (v. par. 38.1.1) să fie egale cu admitanțele de transfer între ochiurile cărora acele laturi le aparțin în exclusivitate. Considerăm acum că sursa ideală de t.e.m. $\underline{E}$ e mutată în latura $s \in (q)$ (fig. 38.17, b). Avem $\underline{E}'_{p \neq 1} = 0$, $\underline{E}'_q = \underline{E}_s = \underline{E}$, iar $\underline{I}_m = \underline{I}'_p$; cu relația (38.56):

$$\underline{I}_m = \underline{I}'_p = \underline{Y}'_{pq} \underline{E}'_q = \underline{Y}'_{pq} \underline{E}, \quad (38.62)$$

iar cu relația (38.2)

$$\underline{I}_m = \underline{Y}_{ms} \underline{E}_s = \underline{Y}_{ms} \underline{E}, \quad (38.63)$$

adică

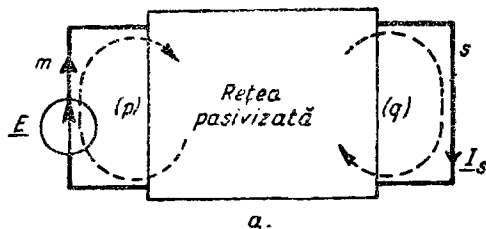
$$\underline{Y}'_{pq} = \underline{Y}_{ms}. \quad (38.64)$$

Comparând relațiile (38.58), (38.61) și (38.64), rezultă:

$$\boxed{\underline{Y}_{ms} = \underline{Y}_{sm}}, \quad (38.65)$$

adică și admitanțele de transfer între laturi satisfac condiția de reciprocitate. De asemenea, cu relația (38.58), (38.59) și (38.62), rezultă că în condițiile de mai sus $\underline{I}_m = \underline{I}_s$:

Curentul produs într-o latură s de o sursă situată într-o latură m (fig. 38.17) e egal cu curentul pe care aceeași sursă, mutată în latura s , l-ar produce în latura m (teorema reciprocității).



$$\underline{I}_s \begin{vmatrix} \underline{E}_m = \underline{E} \\ \underline{E}_r = 0 \ (r \neq m) \end{vmatrix} = \underline{I}_m \begin{vmatrix} \underline{E}_s = \underline{E} \\ \underline{E}_r = 0 \ (r \neq s) \end{vmatrix}$$

Fig. 38.17.

Observație: Teorema reciprocității e o consecință a caracterului *liniar* al rețelei și al caracterului *dipolar* al elementelor care o compun. Există rețele liniare cu elemente de circuit multipolare (nestudiate în acest capitol) care se numesc *nereciproce*, deoarece în ele teorema reciprocității nu e verificată (v. par. 42.2 și 43.7).

38.4. Metoda potențialelor de noduri

Metoda potențialelor de noduri e o metodă sistematică de rezolvare a rețelor, în care se operează cu noi variabile, astfel încît numărul ecuațiilor și al necunoscutelor să se reducă la numărul $N - 1$ al nodurilor independente, totdeauna mai mic decît numărul de laturi. În forma prezentată mai jos, metoda se aplică numai rețelor fără inductivități mutuale (în care numărul de subrețele conexe $S = 1$), pentru care sistemul de ecuații Kirchhoff este :

$$\begin{cases} \sum_{k \in (b)} \underline{I}_k = 0, & b = 1, 2, \dots, N - 1 \\ \sum_{m \in (p)} \underline{Z}_m \underline{I}_m = \sum_{m \in (p)} \underline{E}_m, & p = 1, 2, \dots, 0. \end{cases} \quad (38.66)$$

38.4.1. Forma duală a teoremelor lui Kirchhoff. În rețelele fără inductivități mutuale, ecuațiile lui Kirchhoff se pun și sub o altă formă, în care necunoscutele sînt tensiunile la bornele laturilor (luate după convenția de la receptoare) :

$$\underline{U}_{b_m} = \underline{Z}_m \underline{I}_m - \underline{E}_m \quad (m = 1, 2, \dots, L). \quad (38.67)$$

Curentul $\underline{I}_m$ se exprimă sub forma :

$$\underline{I}_m = \underline{Y}_m \underline{U}_{b_m} + \underline{Y}_m \underline{E}_m = \underline{Y}_m \underline{U}_{b_m} + \underline{I}_{s_m}, \quad (38.68)$$

în care $\underline{Y}_m = 1/\underline{Z}_m$ e admitanța laturii m , iar

$$\underline{I}_{s_m} = \underline{Y}_m \underline{E}_m = (\underline{I}_m)_{\underline{U}_{b_m} = 0} \quad (38.69)$$

e curentul de scurtcircuit al laturii m .

Cu relațiile (38.67) și (38.68), ecuațiile lui Kirchhoff capătă forma :

$$\begin{cases} \sum_{k \in (b)} \underline{Y}_k \underline{U}_{b_k} = \sum_{k \in (b)} (-\underline{I}_{s_k}), & b = 1, 2, \dots, N - 1 \\ \sum_{m \in (p)} \underline{U}_{b_m} = 0 & p = 1, 2, \dots, 0, \end{cases} \quad (38.70)$$

numită *formă duală*, deoarece se deduce formal din relația (38.66), în baza corespondenței :

$$\begin{array}{ccccc} \underline{I} & \underline{Z} & \underline{E} & \text{nod} & \text{ochi} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \underline{U} & \underline{Y} & -\underline{I}_s & \text{ochi} & \text{nod} \end{array} \quad (38.71)$$

38.4.2. **Potențialele de noduri.** Noile variabile utilizate în metoda prezentată în acest capitol sînt tensiunile dintre fiecare nod și un nod (al N -lea) luat ca referință — numite și potențialele nodurilor (și notate cu accent numai pentru a păstra uniformitatea de notație în schimbarea de variabile efectuată) :

$$\underline{V}'_1, \underline{V}'_2, \dots, \underline{V}'_{N-1}.$$

Fie m o latură care iese din nodul (c) și intră în nodul (d). Tensiunea $\underline{U}_{b_m}$, după regula de la receptoare, se exprimă în funcție de potențiale (v. fig. 38.18) prin relația :

$$\underline{U}_{b_m} = \underline{V}'_c - \underline{V}'_d. \quad (38.72)$$

Dacă se substituie tensiunile $\underline{U}_{b_m}$ date de această expresie în a doua ecuație Kirchhoff, scrisă sub forma duală (38.70), se obține o identitate

$$\sum_{m \in (p)} (\underline{V}'_c - \underline{V}'_d) \equiv 0, \quad (38.73)$$

deoarece fiecare potențial de nod intră în această sumă luat pe un ochi de două ori: o dată cu semnul (+), cînd latura iese din acel nod, și o dată cu semnul (—), cînd latura intră în acel nod.

Prin trecerea la noile variabile, se satisfac identic ultimele ecuații Kirchhoff, adică O ecuații. Cele $N - 1$ noi variabile — potențialele de noduri — vor fi atunci univoc determinate de cele $L - O = N - 1$ ecuații rămase: ecuațiile date de prima teoremă a lui Kirchhoff.

38.4.3. **Teorema potențialelor de noduri.** Sistemul de $N - 1$ ecuații satisfăcut de potențialele de noduri e dat de teorema potențialelor de noduri și se obține înlocuind relația (38.72) în primele ecuații Kirchhoff, scrise sub forma duală (38.70). Fie ecuația nodului (c) :

$$\sum_{m \in (c)} \underline{Y}_m \underline{U}_{b_m} = \sum_{m \in (c)} (-\underline{I}_{s_m})$$

Cu relația (38.72) se obține relația :

$$\sum_{m \in (c)} \underline{Y}_m (\underline{V}'_c - \underline{V}'_d) = \sum_{m \in (c)} (-\underline{I}_{s_m}). \quad (38.74)$$

Suma din membrul stîng se poate grupa și ordona după potențialele nodurilor care apar în ea. Fiecare potențial de nod apare drept factor comun pe lîngă o sumă de admitanțe de laturi, și anume: potențialul nodului (c), pentru care e scrisă ecuația, apare factor comun pe lîngă suma admitanțelor laturilor legate la nodul (c), numită *admitanța proprie a nodului (c)* :

$$\underline{Y}_{cc} = \sum_{m \in (c)} \underline{Y}_m; \quad (38.75)$$

iar potențialul unui alt nod (d) $\neq$ (c) apare factor comun pe lângă suma cu semn schimbat a admitanțelor care leagă nodul (d) de nodul (c), numită *admitanța de cuplaj dintre nodurile (d) și (c)*:

$$\underline{Y}'_{cd} = - \sum_{\substack{m \in (c) \\ m \in (d)}} \underline{Y}_m. \quad (38.76)$$

Membrul drept din relația (38.74) este suma curenților de scurtcircuit ai laturilor legate la nodul (c), considerați pozitivi când intră în nod. Această sumă e numită curentul de scurtcircuit injectat în nodul (c),

$$\underline{I}'_c = \sum_{m \in (c)} (-\underline{I}_{s,m}), \quad (38.77)$$

unde semnul ($-$) a determinat schimbarea convenției față de prima teoremă Kirchhoff (în care curenții erau considerați pozitivi când ieșeau din nod).

Cu relațiile (38.75), (38.76) și (38.77) rezultă din relația (38.74) ecuațiile potențialelor de noduri:

$$\sum_{d=1}^{N-1} \underline{Y}'_{cd} \underline{V}'_d = \underline{I}'_c \quad c = 1, 2, \dots, N-1, \quad (38.78)$$

care, explicit, formează sistemul:

$$\left. \begin{aligned} \underline{Y}'_{11} \underline{V}'_1 + \underline{Y}'_{12} \underline{V}'_2 + \dots + \underline{Y}'_{1,N-1} \underline{V}'_{N-1} &= \underline{I}'_{s1} \\ \underline{Y}'_{21} \underline{V}'_1 + \underline{Y}'_{22} \underline{V}'_2 + \dots + \underline{Y}'_{2,N-1} \underline{V}'_{N-1} &= \underline{I}'_{s2} \\ \underline{Y}'_{N-1,1} \underline{V}'_1 + \underline{Y}'_{N-1,2} \underline{V}'_2 + \dots + \underline{Y}'_{N-1,N-1} \underline{V}'_{N-1} &= \underline{I}'_{sN-1} \end{aligned} \right\} \quad (38.79)$$

Observații: 1. Ecuațiile potențialelor de noduri (38.78) arată că, din punctul de vedere al acestor potențiale, totul se petrece ca și cum rețeaua ar fi pasivizată, iar în noduri s-ar injecta din exterior curenții $\underline{I}'_c$ (v. sub 38.4.4, exemplul de calcul și fig. 38.19 și 38.20).

2. Din însăși relația (38.76) de definiție rezultă că admitanțele de cuplaj între noduri satisfac relația de reciprocitate:

$$\underline{Y}'_{cd} = \underline{Y}'_{dc}. \quad (38.80)$$

3. Toate admitanțele de cuplaj (38.76) au semn schimbat față de admitanțele laturilor respective.

4. Dacă vreo latură are impedanța proprie nulă, ea are admitanța infinită și ecuațiile (38.70), respectiv (38.74) și (38.78) își pierd sensul. Nu se scriu deci ecuațiile de noduri (38.78) decât pentru noduri la care sînt legate laturi cu impedanțe nenule. Această scădere a numărului de ecuații de noduri e compensată de faptul că pentru astfel de laturi diferența de potențial la borne este egală cu tensiunea electromotoare cu semn schimbat:

$$\underline{U}_{b_m} = \underline{V}'_c - \underline{V}'_d = -\underline{E}_m, \quad (38.81)$$

așa că se obțin pe această cale ecuații suplimentare care completează sistemul.

5. Sistemul (38.79) are $N-1$ ecuații. Dacă:

$$N-1 < O = L - (N-1), \quad (38.82)$$

metoda potențialelor de noduri e mai avantajoasă decât aceea a curenților de ochiuri, deoarece duce la un sistem cu mai puține ecuații.

6. Mărimile $\underline{E}_m$ intră în relațiile de mai sus cu semn schimbat, dacă nu au sensul de referință același cu al curentului.

38.4.4. Aplicarea metodei potențialelor de noduri. Se procedează în felul următor:

a) Se alege nodul de referință și nodurile pentru care se scriu ecuațiile.

b) Se calculează admitanțele laturilor și curenții de scurtcircuit injectați în noduri.

c) Se calculează admitanțele proprii și de cuplaj între noduri.

d) Se scriu ecuațiile potențialelor de noduri.

e) Se rezolvă în raport cu aceste potențiale.

f) Se aleg sensurile de referință pentru curenții pe laturi și se calculează tensiunile la bornele laturilor după regula de la receptoare cu (38.72).

g) Se calculează curenții din laturi cu relația (38.68).

h) Se verifică calculele (de ex. cu bilanțul puterilor).

Exemplu: Considerăm rețeaua din figura 38.19 cu trei ochiuri și două noduri independente ($N - 1 = 2 < 3 = O$). Se dau:

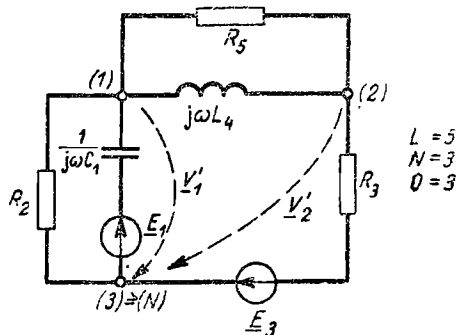


Fig. 38.19.

$$\underline{e}_1 = 20 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right), \quad \underline{e}_3 = 20 \sqrt{2} \sin \omega t \quad (38.83)$$

$$\underline{R}_2 = 4\Omega, \quad \underline{R}_3 = \underline{R}_5 = 2\Omega, \quad \omega L_4 = \frac{1}{\omega C_1} = 1\Omega.$$

Admitanțele laturilor și t.e.m. de laturi sînt:

$$\left. \begin{aligned} \underline{Y}_1 &= j\omega C_1 = j; \quad \underline{Y}_2 = 1/\underline{R}_2 = 0,25; \quad \underline{Y}_3 = 1/\underline{R}_3 = 0,5 \\ \underline{Y}_4 &= 1/j\omega L = -j; \quad \underline{Y}_5 = 1/\underline{R}_5 = 0,5; \\ \underline{E}_1 &= 10(1 + j); \quad \underline{E}_3 = 20. \end{aligned} \right\} \quad (38.84)$$

Curenții de scurtcircuit injectați în nodurile (1) și (2) sînt:

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}'_{s1} &= \underline{E}_1 \underline{Y}_1 = (10 + 10j)j = -10 + j10 \\ \underline{I}'_{s2} &= -\underline{E}_3 \underline{Y}_3 = -20 \cdot 0,5 = -10 \end{aligned} \right\} \quad (38.85)$$

Admitanțele proprii și de cuplaj între noduri sînt:

$$\left. \begin{aligned} \underline{Y}'_{11} &= \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5 = j + 0,25 + 0,5 - j = 0,75 \\ \underline{Y}'_{12} &= \underline{Y}'_{21} = -(\underline{Y}_4 + \underline{Y}_5) = -(0,5 - j) = -0,5 + j \\ \underline{Y}'_{22} &= \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5 = 0,5 + 0,5 - j = 1 - j. \end{aligned} \right\} \quad (38.86)$$

Ecuațiile potențialelor de noduri sînt:

$$\left\{ \begin{aligned} \underline{I}'_{s1} &= \underline{Y}'_{11} \underline{V}'_1 + \underline{Y}'_{12} \underline{V}'_2 & \text{sau} & -10 + j10 = 0,75 \underline{V}'_1 + (-0,5 + j) \underline{V}'_2 \\ \underline{I}'_{s2} &= \underline{Y}'_{21} \underline{V}'_1 + \underline{Y}'_{22} \underline{V}'_2 & \text{sau} & -10 = (-0,5 + j) \underline{V}'_1 + (1 - j) \underline{V}'_2. \end{aligned} \right. \quad (38.87)$$

Ecuatiile sînt acelea care s-ar obține dacă am considera rețeaua pasivizată dar neizolată, avînd injectați din exterior în noduri curenții $\underline{I}'_{s1}$, $\underline{I}'_{s2}$ și $-(\underline{I}'_{s1} + \underline{I}'_{s2})$, ca în figura 38.20. Rezolvînd aceste ecuații, se obțin potențialele:

$$\underline{V}'_1 = 20 \text{ j}; \quad \underline{V}'_2 = 10 \text{ j}. \quad (38.88)$$

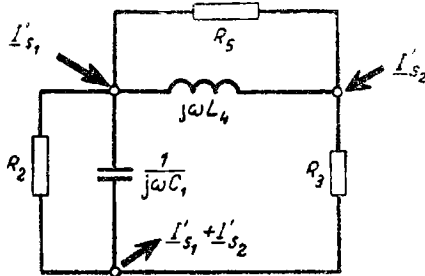


Fig. 38.20.

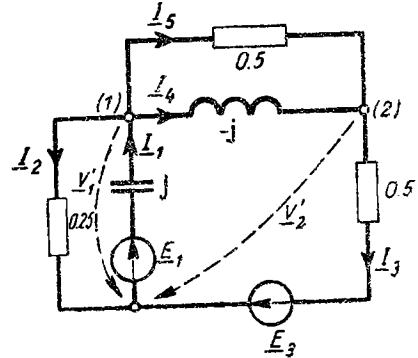


Fig. 38.21.

Alegem sensurile curenților pe laturi și calculăm acești curenți (fig. 38.21, în care, alături de laturi am înscris valorile admitanțelor):

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_1 &= (-\underline{V}'_1 + \underline{E}_1)\underline{Y}_1 = 10 + 10\text{j} \iff i_1 = 20 \sin(\omega t + \pi/4) \\ \underline{I}_2 &= \underline{V}'_1 \underline{Y}_2 = 5\text{j} \iff i_2 = 5\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/2) \\ \underline{I}_3 &= (\underline{V}'_2 + \underline{E}_2)\underline{Y}_3 = 10 + 5\text{j} \iff i_3 = 5\sqrt{10} \sin\left(\omega t + \arctg \frac{1}{2}\right) \\ \underline{I}_4 &= (\underline{V}'_1 - \underline{V}'_2)\underline{Y}_4 = 10 \iff i_4 = 10\sqrt{2} \sin \omega t \\ \underline{I}_5 &= (\underline{V}'_1 - \underline{V}'_2)\underline{Y}_5 = 5\text{j} \iff i_5 = 5\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (38.89)$$

Se verifică imediat teorema lui Kirchhoff cu acești curenți și bilanțul puterilor complexe:

$$\underline{E}_1 \underline{I}_1^* + \underline{E}_2 \underline{I}_2^* = R_2 \underline{I}_2^2 + R_3 \underline{I}_3^2 + R_5 \underline{I}_5^2 + \text{j} \left(-\frac{1}{\omega C_1} \underline{I}_1^2 + \omega L_4 \underline{I}_4^2 \right) \quad (38.90)$$

sau

$$\begin{aligned} (10 + \text{j}10)(10 - \text{j}10) + 20(10 - \text{j}5) &= 4.25 + 2.125 + 2.25 + \text{j}(-1.200 + 1.100) \\ 400 - \text{j}100 &= 400 - \text{j}100. \end{aligned}$$

39. || SISTEME TRIFAZATE, CARACTERIZARE ȘI PROPRIETĂȚI

Transmisiunea energiei electromagnetice, de la locul de producere (centrala electrică în care sînt instalate mașinile generatoare) la locul de utilizare se face prin *linii electrice*. În cazurile cele mai simple, această transmisiune se face cu o linie cu două conductoare (v. și par. 35.6), alimentată la plecare cu un generator de curent alternativ, avînd o anumită tensiune electromotoare. Acesta este *sistemul monofazat* de transmisiune, în care atît generatorul cît și sarcina constituie dipoli electrici (v. fig. 39.1, a). Pentru o linie dată, dimensionată pentru o anumită tensiune nominală U_N (a cărei depășire ar periclita izolația liniei) și pentru un anumit curent nominal I_N (a cărui depășire ar mări inadmisibil pierderile de putere în conductoare), există o *putere activă maximă pe care o poate transmite linia*, egală cu produsul $U_N I_N$ — factorul de putere maxim fiind egal cu unitatea. Raportată la numărul de conductoare — două în cazul liniei monofazate — această putere maximă (specifică) caracterizează eficacitatea sistemului de transmisiune :

$$P_{cond}^{(1)} = \frac{U_N I_N}{2}. \quad (39.1)$$

Se constată că *puterea maximă pe conductor* poate fi sporită (în condiții în rest neschimbate), dacă se utilizează o linie cu trei conductoare (v. fig. 39.1, b), alimentată cu generatoare care produc trei tensiuni electromotoare de valori efective egale și avînd faze inițiale diferite cu cîte $2\pi/3$. Sistemul de transmisiune astfel obținut se numește *sistem trifazat* — chiar dacă egalitatea valorilor efective și a defazajelor t.e.m. nu e riguros asigurată — și prezintă numeroase avantaje : o transmisiune de energie mai economică (v. și par. 39.3); posibilitatea de a dispune la utilizare de două tensiuni diferite pentru consumatori mono-

fazați (v. și par. 39.3.1); posibilitatea de a produce cîmpuri magnetice învîrtitoare (v. și par. 39.4), care permit realizarea celor mai simple și mai economice motoare electrice — motoarele asincrone etc. Totodată, construcția generatoarelor trifazate nu este mai dificilă decît a celor monofazate (v. și par. 39.2). Toate aceste avantaje au făcut ca în tehnica actuală producerea, transmisiunea și distribuția energiei electromagnetice să se facă aproape numai în trifazat (cu frecvența industrială de 50 Hz).

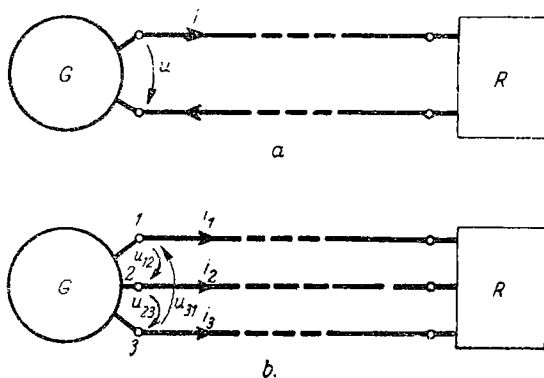


Fig. 39.1.

Prima linie de energie în curent alternativ trifazat a fost realizată de M. O. Dolivo-Dobrovolschi, în 1891. Linia începea la Lauffen (lingă Heidelberg — Germania) — unde se găsea o instalație formată dintr-o turbină hidraulică, un generator de curent alternativ trifazat și un transformator ridicător și se termina la Frankfurt pe Main, unde se găsea un transformator coborîtor care alimenta un motor asincron trifazat (realizat tot de Dolivo-Dobrovolschi), folosit pentru a antrena o pompă. Pe linia care avea 175 km s-a transmis puterea de 200 CP $\approx 147\text{kW}$, la tensiunea de 15 kV, cu frecvența 30—40 Hz și cu un randament de 75%.

În cazuri cu totul speciale se utilizează și sisteme cu două faze (bifazate) sau cu mai mult de trei faze (polifazate), de obicei din motive impuse de natura receptorului. În cele ce urmează vor fi prezentate numai sistemele trifazate.

39.1. Sisteme trifazate simetrice de mărimi sinusoidale

39.1.1. Definiții și proprietăți. Se numește *sistem trifazat simetric direct* (de succesiune directă) un ansamblu ordonat de trei mărimi sinusoidale de aceeași frecvență (e_1, e_2, e_3)¹, care au valori efective egale și diferențe relative de fază egale cu $\frac{2\pi}{3}$, astfel că mărimea e_2 e în urma mărimei e_1 , iar mărimea e_3 e în urma mărimei e_2 . Valorile lor instantanee sînt deci :

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= E_1 \sqrt{2} \sin (\omega t + \alpha_1) = E \sqrt{2} \sin (\omega t + \alpha) \\ e_2 &= E_2 \sqrt{2} \sin (\omega t + \alpha_2) = E \sqrt{2} \sin \left(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3} \right) \\ e_3 &= E_3 \sqrt{2} \sin (\omega t + \alpha_3) = E \sqrt{2} \sin \left(\omega t + \alpha - \frac{4\pi}{3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (39.2)$$

¹ Folosim notația de la tensiuni electromotoare, deși definițiile și proprietățile prezentate sînt valabile pentru orice astfel de mărimi : tensiuni la borne, curenți, fluxuri etc.

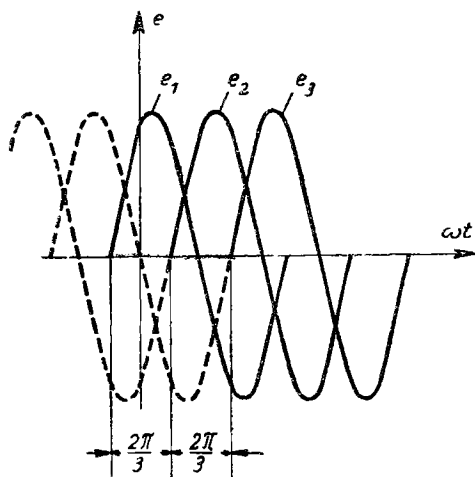


Fig. 39.2.

vență (e'_1, e'_2, e'_3), care au valori efective egale și diferențe relative de fază egale cu $\frac{2\pi}{3}$, astfel că mărimea e'_1 e înaintea mărării e'_2 , iar mărimea e'_3 e înaintea mărării e'_2 . Valorile lor instantanee sînt deci :

$$\left. \begin{aligned} e'_1 &= E'_1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha'_1) = E \sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha) \\ e'_2 &= E'_2 \sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha'_2) = E \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \\ e'_3 &= E'_3 \sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha'_3) = E \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned} \right\} \quad (39.4)$$

adică :

$$E'_1 = E'_2 = E'_3 = E; \quad \alpha'_1 = \alpha; \quad \alpha'_2 = \alpha + \frac{2\pi}{3}; \quad \alpha'_3 = \alpha + \frac{4\pi}{3}. \quad (39.5)$$

Se observă că mărimea e'_3 e totodată defazată în urma mărării e'_1 cu $\frac{2\pi}{3}$

Se mai observă că diferența dintre un sistem direct și un sistem invers are un caracter obiectiv numai în măsura în care ordonarea mărimilor acelor sisteme a fost efectuată în prealabil, de exemplu prin numerotarea bornelor sau a conductoarelor la care se referă aceste mărimi. De aceea, în orice problemă în care se dă un singur sistem trifazat de tensiuni electromotoare, ordonarea se poate face astfel încît sistemul să fie de succesiune directă. Așa vom proceda mereu în cele ce urmează.

adică :

$$\begin{aligned} E_1 &= E_2 = E_3 = E; \quad \alpha_1 = \alpha; \\ \alpha_2 &= \alpha - \frac{2\pi}{3}; \quad \alpha_3 = \alpha - \frac{4\pi}{3}. \end{aligned} \quad (39.3)$$

În figura 39.2 sînt reprezentate grafic mărimile unui sistem trifazat simetric direct. Deoarece adăugarea unui multiplu întreg de 2π la faza inițială nu modifică mărimea sinusoidală, se mai poate afirma că mărimea e_3 e defazată înaintea mărării e_1 cu $\frac{2\pi}{3}$.

Se numește *sistem trifazat simetric invers* (de succesiune inversă) un ansamblu ordonat de trei mărimi sinusoidale de aceeași frec-

39.1.2. **Reprezentări simbolice** Reprezentarea geometrică a mărimilor sistemului trifazat direct (39.2) conduce la trei fazori de lungimi egale, făcând unghiuri egale cu câte $\frac{2\pi}{3}$, astfel că fazorul $\underline{E}_2$, (respectiv $\underline{E}_3$), trebuie rotit în sens trigonometric cu $\frac{2\pi}{3}$, spre a se suprapune cu $\underline{E}_1$, respectiv $\underline{E}_2$ (v. fig. 39.3).

Reprezentarea în complex a mărimilor sistemului trifazat direct (39.2) conduce la următoarele imagini:

$$\begin{aligned}\underline{E}_1 &= E e^{j\alpha} = \underline{E} \\ \underline{E}_2 &= E e^{j(\alpha - \frac{2\pi}{3})} = \underline{E} e^{-j\frac{2\pi}{3}} = a^2 \underline{E} \\ \underline{E}_3 &= E e^{j(\alpha + \frac{2\pi}{3})} = \underline{E} e^{-j\frac{4\pi}{3}} = a \underline{E},\end{aligned}\quad (39.6)$$

unde am introdus notația ¹

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (39.7)$$

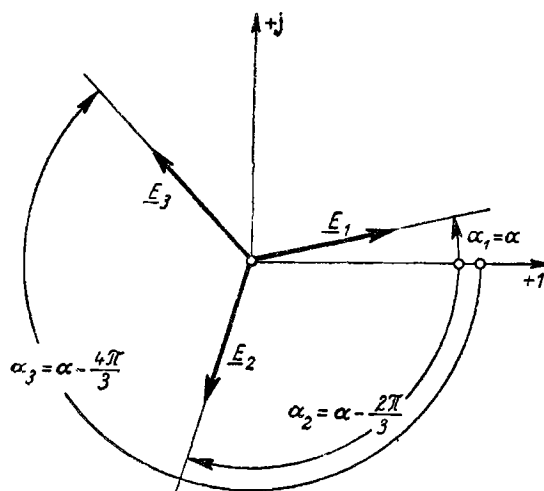


Fig. 39.3.

¹ Deși a e un număr complex, deoarece nu reprezintă o mărime electrică sau magnetică ci numai un operator numeric de rotație, se obișnuiește să nu se sublinieze (ca și $j = e^{j\pi/2}$).

pentru operatorul de rotație cu $\frac{2\pi}{3}$ în sens direct. Se verifică ușor relațiile (în care n e un întreg arbitrar):

$$\begin{aligned} a &= a^4 = a^{-2} = a^{3n+1} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2 &= a^5 = a^{-1} = a^{3n+2} = e^{-j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^3 &= a^6 = a^0 = a^{3n} = e^{j0} = 1 \end{aligned} \quad (39.8)$$

și

$$1 + a + a^2 = 0 \quad (39.9)$$

Înmulțirea cu $a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$ rotește un vector reprezentativ $\underline{A}$ din planul complex cu $\frac{2\pi}{3}$ în sens trigonometric direct, iar înmulțirea cu a^2 îl rotește cu $\frac{2\pi}{3}$ în sens trigonometric invers (fig. 39.4).

Se demonstrează fără dificultăți teorema: suma mărimilor unui sistem simetric (în instantaneu, ca și în complex) e identic nulă:

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad \underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \underline{E}_3 = 0. \quad (39.10)$$

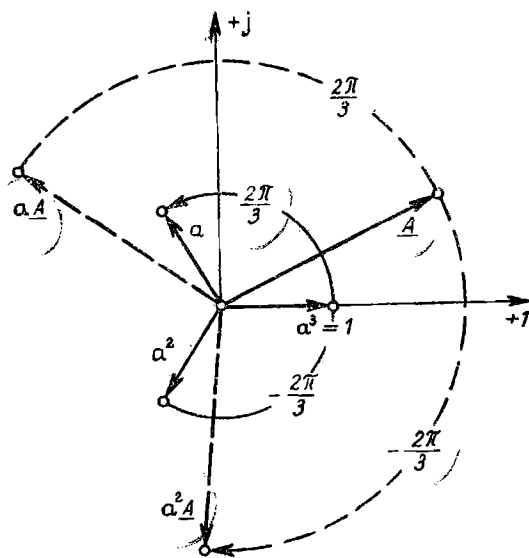


Fig. 39.4.

39.1.3. Diferența a două mărimi ale unui sistem simetric. În studiul rețelelor trifazate echilibrate se întâlnește frecvent diferența a două mărimi sinusoidale, aparținând unui sistem simetric. Fie sistemul simetric direct (39.2), reprezentat în complex sub forma relației (39.6). Se demonstrează fără dificultăți teoremele:

a) Diferența dintre una din mărimi (de ex. $\underline{E}_1$) și o a doua, defazată în urmă cu $\frac{2\pi}{3}$ față de ea (de ex. $\underline{E}_2$), este o mărime amplificată cu $\sqrt{3}$ și defazată cu $\frac{\pi}{6}$ înainte față de prima (v. fig. 39.5).

În adevăr, cu relația (39.7),

$$1 - a^2 = \frac{3}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} e^{j \frac{\pi}{6}} \quad (39.11)$$

și deci

$$\underline{E}_1 - \underline{E}_2 = \underline{E} (1 - a^2) = \sqrt{3} \underline{E} e^{j \frac{\pi}{6}}, \quad (39.12)$$

iar

$$e_1 - e_2 = (E \sqrt{3}) \sqrt{2} \sin \left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{6} \right). \quad (39.12')$$

b) Diferența dintre una din mărimi (de ex. $\underline{E}_1$) și o a doua defazată înainte cu $\frac{2\pi}{3}$ față de prima (de ex. $\underline{E}_3$) este o mărime amplificată cu $\sqrt{3}$ și defazată cu $\frac{\pi}{6}$ în urmă față de prima (v. fig. 39.5).

În adevăr, cu relația (39.7) :

$$1 - a = \frac{3}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} e^{-j \frac{\pi}{6}} \quad (39.13)$$

și deci

$$\underline{E}_1 - \underline{E}_3 = \underline{E} (1 - a) = \sqrt{3} \underline{E} e^{-j \frac{\pi}{6}} \quad (39.14)$$

iar

$$e_1 - e_3 = (E \sqrt{3}) \sqrt{2} \sin \left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{6} \right). \quad (39.14')$$

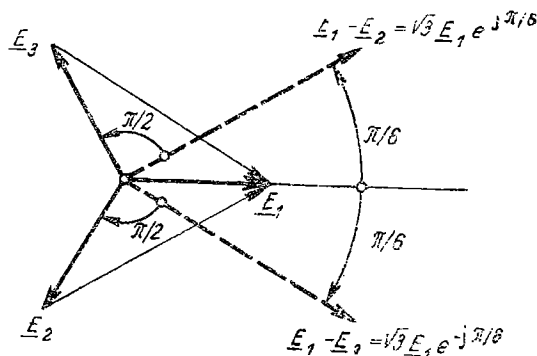


Fig. 39.5.

39.2. Producerea tensiunilor electromotoare trifazate simetrice

Producerea unui sistem simetric de tensiuni electromotoare este, în principiu, la fel de simplă ca și aceea a unei singure tensiuni electromotoare sinusoidale (v. par 22.5.3, vol. I).

Considerăm un cadru dreptunghiular (1), bobinat cu N spire, care se rotește

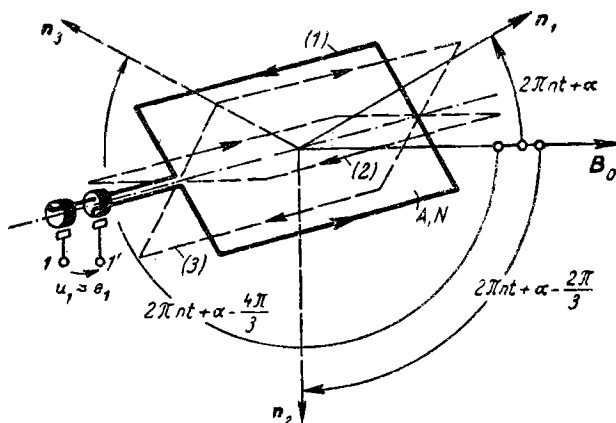


Fig. 39.6

cu turația constantă n (rot/s) în jurul unei axe paralele cu una din laturi, într-un câmp magnetic omogen de inducție B_0 , perpendicular pe axa de rotație (v. fig. 39.6, în care, pentru simplificarea desenului, s-a figurat o singură spirală). Dacă $2\pi n t + \alpha$ e unghiul făcut de normala n_1 pe planul unei spire, iar A e aria acesteia, fluxul magnetic instantaneu prin cele N spire ale cadrului este :

$$\Phi_1 = N A B_0 \cos (2\pi n t + \alpha),$$

iar tensiunea electromotoare instantanee indusă în cadru este :

$$e_1 = - \frac{d\Phi_1}{dt} = 2\pi n N A B_0 \sin (2\pi n t + \alpha_1) = E \sqrt{2} \sin (\omega t + \alpha).$$

Această t.e.m. are pulsația :

$$\omega = 2\pi f = 2\pi n, \quad (39.15)$$

faza inițială :

$$\alpha = \alpha_1 = \angle (n_1, B_0)_{t=0} \quad (39.16)$$

(egală cu unghiul făcut de normală cu liniile de câmp în momentul $t = 0$) și are valoarea efectivă :

$$E = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f N \Phi_{f_0} = 4,44 f N \Phi_{f_0}, \quad (39.17)$$

în care $\Phi_f = AB_0$ e valoarea maximă a fluxului fascicular al unei spire. Tensiunea electromotoare e_1 poate alimenta un circuit exterior prin două perii (1, 1') în contact cu inele colectoare, fixate pe axul de rotație și conectate la capetele înfășurării cadrului.

Dacă acum se fixează pe același ax încă două cadre identice, (2) și (3), cu planurile decalate succesiv cu cîte $2\pi/3$ (schitate în fig. 39.6 cu linii întrerupte), fluxurile instantanee corespunzătoare vor diferi numai datorită faptului că unghiurile făcute de normalele la planurile respective, cu direcția liniilor de cîmp în momentul $t = 0$, vor fi :

$$\alpha_2 = \alpha - \frac{2\pi}{3} \text{ și } \alpha_3 = \alpha - \frac{4\pi}{3}. \quad (39.18)$$

Se vor obține astfel pentru tensiunile electromotoare induse în cele trei cadre expresiile

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= E \sqrt{2} \sin (\omega t + \alpha) \\ e_2 &= E \sqrt{2} \sin \left(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3} \right) \\ e_3 &= E \sqrt{2} \sin \left(\omega t + \alpha - \frac{4\pi}{3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (39.19)$$

cu E dat de relația (39.17), cu ω dat de relația (39.15) și cu α dat de relația (39.16). Se constată că aceste tensiuni electromotoare formează un sistem trifazat simetric direct.

Generatoarele sincrone de curent alternativ trifazat se construiesc după acest principiu, cu următoarele deosebiri mai importante (v. reprezentarea schematică din fig. 39.7) : pentru a obține inducții magnetice intense, mașina e constituită dintr-un rotor și un stator din material feromagnetic, prin care se închide fluxul magnetic, cu un întrefier foarte redus, necesar pentru a asigura mobilitatea lor relativă; cele trei înfășurări (corespunzătoare celor trei cadre) sînt imobile, cu conductoarele active (longitudinale) îngropate în creștături dispuse la fața dinspre întrefier a statorului; cîmpul magnetic este un cîmp învîrtitor, produs de un electromagnet învîrtitor (rotorul), care mătură succesiv cele trei înfășurări. Rotorul poate avea polii aparenti (ca în fig. 39.7) sau îngropați. Înfășurarea de magnetizare de curent continuu a rotorului, numită înfășurare de excitație, nu a fost figurată în desen. Adesea, rotorul are un număr de $2p$ poli alternați, în care caz și înfășurările statorului sînt dispuse în p grupe de cîte trei bobine succesive, cu decalaje spațiale de cîte $\frac{2\pi}{3p}$. În acest caz, o perioadă a tensiunii electromotoare

induse corespunde la o rotație cu numai $\frac{2\pi}{p}$ a rotorului, adică pulsația t.e.m. induse e de p ori mai mare ca viteza unghiului de rotație :

$$\omega = 2\pi f = 2\pi p n \quad (39.20)$$

sau

$$n = \frac{f}{p}. \quad (39.21)$$

În afară de aceasta, dacă spirele unei bobine de fază ar fi suprapuse în aceeași pereche de creștături, la o rotație completă a rotorului, fluxul prin bobina considerată ar avea o variație prea

depărtată de cea sinusoidală. De aceea, înfășurarea se execută repartizat, ceea ce afectează și coeficientul numeric al expresiei valorii efective (39.17) a t.e.m.

Din cele arătate rezultă că sistemele trifazate simetrice de tensiuni electromotoare se produc prin simpla așezare decalată în spațiu (cu decalaje de $\frac{2\pi}{3p}$ la mașini cu p perechi de poli)

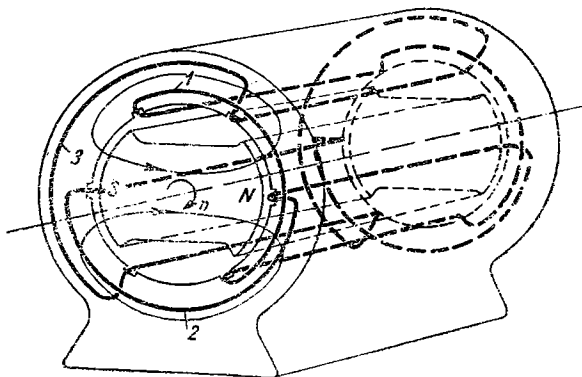


Fig. 39.7.

a trei înfășurări induse, care se găsesc în rotație relativă față de un câmp magnetic inductor și sînt în rest identice cu înfășurarea necesară unui generator de curent alternativ monofazat.

39.3. Conexiunile sistemelor trifazate

Considerăm un sistem de trei linii monofazate independente (fig. 39.8, a), alimentate cu tensiunile electromotoare e_1, e_2, e_3 simetrice (39.19) și avînd impedanțe (totale) egale,

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z} = Z e^{j\varphi} \quad (39.22)$$

Curenții i_1, i_2, i_3 ai celor trei circuite vor avea aceleași valori efective :

$$I_1 = I_2 = I_3 = I = \frac{E}{Z} \quad (39.23)$$

și aceleași defazaje față de t.e.m. corespunzătoare :

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi, \quad (39.24)$$

adică vor forma un sistem simetric :

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= I\sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma) = \frac{E}{Z} \sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha - \varphi) \\ i_2 &= I\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \gamma - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{E}{Z} \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \alpha - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_3 &= I\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \gamma - \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{E}{Z} \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \alpha - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned} \right\} \quad (39.25)$$

Dacă t.e.m. au valorile efective maxime compatibile cu izolația liniilor $E = U_{nom}$, dacă intensitățile au valorile efective maxime compatibile cu încălzirea conductoarelor și dacă factorul de putere e maxim ($\cos \varphi = 1$), cele trei linii monofazate (cu 6 conductoare) vor putea transmite puterea maximă :

$$P_{nom} = 3 U_{nom} I_{nom} \quad (39.26)$$

adică puterea maximă pe conductor $P_{nom}/6$ va fi egală cu cea dată de relația (39.1).

39.3.1. Conexiunea în stea.

Din cele trei rețele monofazate se poate obține o rețea trifazată și se poate reduce numărul de conductoare necesare transmiterii puterii, dacă se leagă împreună bornele 1', 2', 3' ale generatoarelor, formînd un punct O , numit neutrul¹ generatorului, respectiv bornele 1', 2', 3' ale receptoarelor, formînd un punct N numit neutrul¹ receptorului (fig. 39.8,b). Cele trei conductoare „de întoarcere” ale celor trei linii pot fi contopite într-un conductor unic NO , numit conductorul neutru. Se obține astfel o rețea trifazată cu conexiune în stea atît la generator cît și la sarcină.

Conductorul neutru va fi străbătut de suma curenților din celelalte trei conductoare (cum rezultă din prima teoremă a lui Kirchhoff aplicată punctului O sau N). Ori, această sumă e nulă :

$$i_N = i_1 + i_2 + i_3 = 0, \quad (39.27)$$

deoarece sistemul (39.25) e simetric. De aceea, conductorul neutru poate fi suprimat, fără ca să se modifice repartitia curenților și a potențialelor din rețea. Conexiunea trifazată în stea permite deci transmiterea puterii (39.26) cu numai trei conductoare în loc de șase.

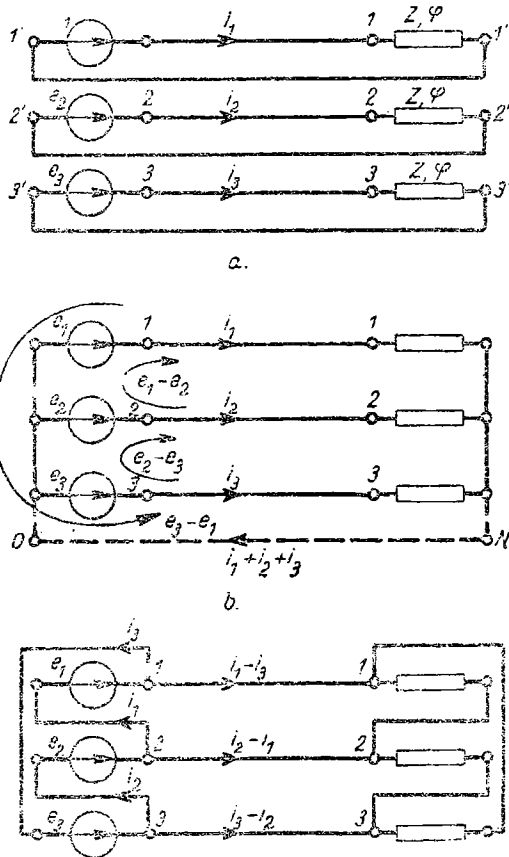


Fig. 39.8.

¹ În loc de neutru se mai spune *nul*, deoarece un astfel de punct se ia de obicei ca punct de potențial nul (originea potențialelor).

Economia realizată nu este întotdeauna atât de mare, deoarece între două conductoare ale liniei trifazate obținute există acum o tensiune practic egală cu diferența a două t.e.m. de fază, diferență a cărei valoare efectivă e cu $\sqrt{3}$ mai mare decât a acestora (v. rel. 39.12). Dacă transmisiunea se efectuează la tensiune înaltă, izolația liniei trifazate obținute trebuie să fie mai rezistentă decât a liniilor monofazate din care provine. Dacă se menține aceeași izolație, se pot utiliza tensiuni de fază maxime cu $\sqrt{3}$ mai mici decât în cazul celor trei sisteme monofazate, adică se poate transmite o putere activă maximă :

$$P_{max}^{(3)} = 3 \left(\frac{U_{nom}}{\sqrt{3}} \right) I_{nom} = \sqrt{3} U_{nom} I_{nom} \quad (39.28)$$

și o putere specifică pe conductor :

$$P_{cond}^{(3)} = \frac{1}{3} P_{nom}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{3}} U_{nom} I_{nom} \quad (39.29)$$

cu $2/\sqrt{3}$ mai mare ca în monofazat (v. 39.1).

39.3.2. Conexiunea în triunghi. Din cele trei rețele monofazate se poate obține o rețea trifazată și se poate reduce numărul de conductoare necesare, dacă se leagă succesiv bornele generatoarelor, respectiv ale receptoarelor, ca în figura 39.8, c, grupându-se două câte două conductoarele liniei și înlocuind cu câte un singur conductor fiecare grupă de două conductoare în paralel. Se obține astfel o rețea trifazată cu conexiune în triunghi atât la generator cât și la receptor.

Și această conexiune permite transmisiunea puterii (39.26) cu numai trei conductoare. Economia realizată nu este atât de mare, deoarece conductoarele liniei vor fi acum străbătute de curenți egali cu diferența a doi curenți debitați de generatoare, diferență a cărei valoare efectivă e cu $\sqrt{3}$ mai mare decât a acestora. În condiții de încălzire egală, conductoarele liniei ar trebui să aibă o secțiune mai mare. Dacă se mențin aceleași conductoare, pentru ca să se păstreze încălzirea liniei trebuie redus curentul generatoarelor cu $\sqrt{3}$, adică se poate transmite o putere maximă :

$$P_{nom}^{(3)} = 3 U_{nom} \left(\frac{I_{nom}}{\sqrt{3}} \right) = \sqrt{3} U_{nom} I_{nom} \quad (39.30)$$

egală cu cea de la conexiunea în stea. Puterea specifică pe conductor este deci aceeași ca la conexiunea în stea (39.29).

Adesea se folosesc ambele tipuri de conexiune, și anume steaua la generatoare și triunghiul la receptoare, sau invers. În cele ce urmează vom face abstracție de conexiunea generatorului, deoarece vom presupune că acesta e capabil să producă anumite tensiuni la borne date. E important însă dacă generatorul are sau nu un punct neutru O , accesibil receptorului (în primul caz generatorul are neapărat conexiunea în stea).

Observații: a) În terminologia curentă a rețelilor trifazate se numește fază — nu numai argumentul sinusului din expresia unei mărimi sinusoidale (tensiune, curent etc.) — ci și ansamblul elementelor de circuit (generator, conductor, receptor etc.), parcurs de unul dintre curenții unui sistem trifazat.

b) Se numește tensiune stelată sau tensiune simplă tensiunea dintre o bornă a unei faze și un punct neutru. Se numește tensiune compusă sau tensiune dintre faze tensiunea dintre două borne sau conductoare de fază (în cazul analizat mai sus, cu $\sqrt{3}$ mai mare ca prima).

Tensiunea compusă mai e numită *tensiune de linie*, deoarece e stabilită și între conductoarele liniei, iar tensiunea simplă mai e numită *tensiune de fază*, dacă conexiunea e în stea (această ultimă denumire nu trebuie utilizată la conexiunea în triunghi, decît precizînd despre a cui fază e vorba : a receptorului, a generatorului etc.).

39.4. Cîmpuri magnetice învîrtitoare

În legătură cu avantajele amintite la început ale rețelelor trifazate arătăm cum se pot produce — cu ajutorul unei sistem trifazat simetric de curenți — cîmpuri magnetice învîrtitoare, extrem de importante pentru funcționarea mașinilor electrice.

Se deosebesc două tipuri principale de cîmpuri magnetice învîrtitoare : cu vector-cîmp învîrtitor sau cu repartiție spațială învîrtitoare.

39.4.1. Cîmp magnetic cu vector-cîmp învîrtitor. Fie trei spire plate dreptunghiulare identice, ale căror plane formează unghiuri de $2\pi/3$ — dispuse deci analog celor trei cadre ale generatorului din figura 39.6, dar fixe (fig. 39.9). Dacă i_1, i_2, i_3 sînt curenții din cele trei spire, inducția magnetică B_1, B_2, B_3 a fiecăreia dintre ele e în fiecare moment proporțională cu intensitatea curențului care îl produce (așa cum rezultă din teorema suprapoziției cîmpurilor magnetice — v. par. 25.1, vol. I). Într-un punct O de pe axa de simetrie a sistemului de spire identice (dreapta de intersecție a planelor lor), constanta de proporționalitate K e aceeași pentru toate spirele — și vectorii inducție magnetică ai celor trei spire, cu orientări fixe, corespunzătoare vectorilor n_1, n_2, n_3 normali pe planul spirelor, sînt :

$$B_1 = n_1 K i_1; \quad B_2 = n_2 K i_2; \quad B_3 = n_3 K i_3. \quad (39.31)$$

Cîmpul magnetic resultant într-un punct de pe ax

$$B = B_1 + B_2 + B_3 = K(n_1 i_1 + n_2 i_2 + n_3 i_3) \quad (39.32)$$

are proiecțiile pe axele Ox, Oy (alese ca în fig. 39.9),

$$\left. \begin{aligned} B_x &= K \left(i_1 + i_2 \cos \frac{4\pi}{3} + i_3 \cos \frac{2\pi}{3} \right) = K \left(i_1 - \frac{i_2 + i_3}{2} \right) \\ B_y &= K \left(i_1 \cos \frac{\pi}{2} + i_2 \cos \frac{5\pi}{6} + i_3 \cos \frac{\pi}{6} \right) = K \frac{\sqrt{3}}{2} (i_3 - i_2) \end{aligned} \right\}. \quad (39.33)$$

Să presupunem acum că aceste trei spire — dispuse în spațiu cu decalaje succesive de $2\pi/3$ — sînt alimentate cu trei curenți i_1, i_2, i_3 , formînd un sistem simetric direct, adică avînd expresiile (39.25) — cu defazaje succesive în timp de cîte o treime de perioadă și cu valori efective egale. În acest caz (v. și rel. 39.14') :

$$\begin{aligned} i_2 + i_3 &= -i_1 = -I\sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma) \\ i_3 - i_2 &= (\sqrt{3} I) \sqrt{2} \sin \left(\omega t + \gamma - \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} I \sqrt{2} \cos(\omega t + \gamma) \end{aligned} \quad (39.34)$$

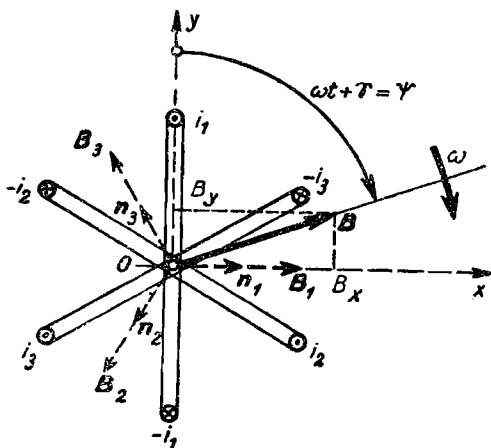


Fig. 39.9.

și proiecțiile cîmpului magnetic dintr-un punct de pe axă (39.33) devin :

$$\left. \begin{aligned} B_x &= K \frac{3}{2} I \sqrt{2} \sin (\omega t + \gamma) \\ B_y &= K \frac{3}{2} I \sqrt{2} \cos (\omega t + \gamma) \end{aligned} \right\} \quad (39.35)$$

Vectorul $\mathbf{B}$, care are aceste proiecții, are modulul constant în timp

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \frac{3}{2} K I \sqrt{2} \quad (39.36)$$

și formează cu axa Ox un unghi variabil $\psi = \omega t + \gamma$ funcțiune liniară de timp, adică se rotește în sensul de rotație definit de ordinea de așezare a spirelor ($\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$), cu viteza unghiulară :

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega, \quad (39.37)$$

egală cu pulsația curenților trifazați care alimentează bobinele. Dacă această pulsație nu e prea mare, și dacă într-un punct de pe axă se așază un mic ac magnetic de moment $\mathbf{m}$, căruia i se dă un impuls de rotație inițial, acul „se prinde în sincronism” și se rotește o dată cu vectorul cîmp $\mathbf{B}$, sub acțiunea cuplului $\mathbf{C} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ (v. par. 18.1, vol. I). Acesta este în forma cea mai simplificată principiul de funcționare al *motorului electric sincron*.

39.4.2. Cîmp magnetic radial cu repartiție spațială învîrtitoare. În mașinile electrice, conductoarele înfășurărilor de curent alternativ sînt dispuse în creștături longitudinale, practicate în fețele dinspre întrefier ale statorului sau rotorului. Conductoarele unei aceeași faze sînt străbătute toate de același curent și dacă se parcurge întrefierul, ocolind rotorul într-un plan transversal (v. fig. 39.10), se întîlnesc (pentru o aceeași fază) grupuri de conductoare „de ducere” (cu un anumit sens de referință al curentului), dispuse în creștături alăturate și grupuri de conductoare „de întoarcere” (cu sens de referință opus), care împreună cu primele asigură constituirea spirelor înfășurării. Pe întreaga periferie a mașinii, această alternare a unor conductoare de ducere și de întoarcere (pe aceeași fază) se poate întîlni de p ori, p fiind numărul de perechi de poli ai înfășurării (respectiv ai mașinii). În figura 39.10 e reprezentată o secțiune transversală printr-o mașină trifazată cu o înfășurare rotorică, avînd $p = 2$ perechi de poli și cîte trei creștături pe pol și fază. Pentru simplificarea desenului s-au reprezentat numai conductoarele fazei 1 și numai cîte un conductor pe creștătură.

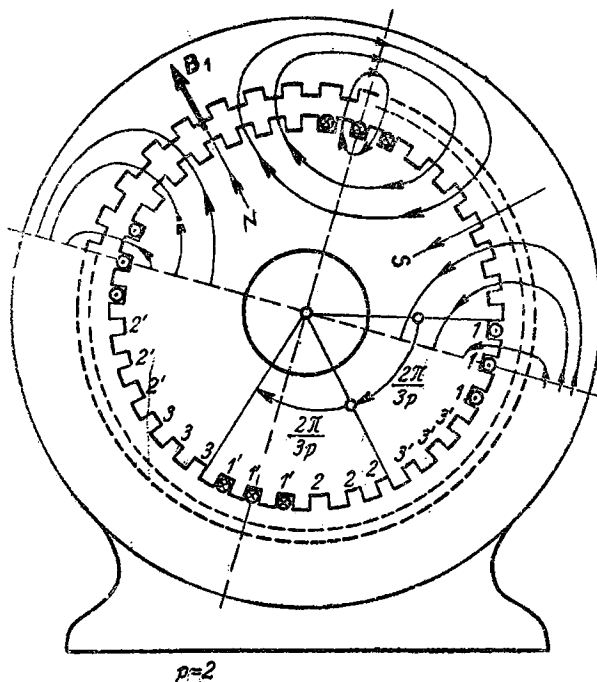


Fig. 39.10.

Dacă înfășurarea unei faze e străbătută de curentul respectiv, se produce un cîmp magnetic cu linii închise prin fierul statorului,

prin fierul rotorului și prin întrefier. Aceste linii înălțuie (după regula burghiului drept) gruppurile de conductoare de ducere, respectiv de întoarcere. În figura 39.10 sînt reprezentate simplificat liniile cîmpului de inducție magnetică produs de curentul i_1 al fazei 1. Datorită permeabilității foarte mari a fierului, liniile de cîmp din întrefier sînt practic perpendiculare pe fața acestuia, adică sînt radiale. Cîmpul din întrefier e mai intens în dreptul dinților și mai slab în dreptul creștăturii, lungimea de întrefier a liniilor de cîmp corespunzătoare fiind diferită: mai mică în dreptul dinților și mai mare în dreptul creștăturilor. În cele ce urmează vom neglija această structură de detaliu a cîmpului magnetic din întrefier și vom ține seama numai de valoarea medie a lui pe un interval dintre + creștătură. Variația acestui cîmp radial în lungul întrefierului — în funcțiune de unghiul α din planul transversal — este periodică, cu perioada unghiulară $2\pi/p = 2\tau$. Maximele acestei variații corespund polilor nord (N) ai rotorului, iar minimele, polilor sud (S), distanța dintre doi poli succesivi fiind pasul polar $\tau = \pi/p$. Axele de simetrie ale secțiunii transversale a mașinii, care trec prin dreptul punctelor din întrefier unde cîmpul se anulează, se numesc axe neutre, și au fost figurate cu linii întrerupte în figura 39.10. Conductoarele înfășurării fazei a doua, respectiv a treia (nerepresentate în desen), sînt dispuse analog celor ale fazei întii, cu un decalaj spațial (unghiular) egal cu $2\pi/3p$ (în sens orar în fig. 39.10). În figura 39.11, a e prezentată o singură perioadă a cîmpului magnetic al înfășurării statorice a unei singure faze (cu $p = 6$ și patru creștături pe pol și fază). Determinarea repartiției spațiale a cîmpului în lungul întrefierului de grosime (medie) δ se face observînd că ori de cîte ori se întîlnește un conductor parcurs de un curent i (fig. 39.11, b), intensitatea cîmpului magnetic are o creștere ΔH , cu valoarea absolută:

$$|\Delta H| \approx \frac{i}{\delta} \quad (39.38)$$

și cu sensul dedus din sensul curentului, după regula burghiului drept. În adevăr, în fierul statoric și rotoric (presupus nesaturat) $H \approx 0$, deoarece $\mu \approx \infty$, și aplicînd legea circuitului magnetic unei curbe de forma unui dreptunghi care înălțuie conductorul considerat, rezultă:

$$(H + \Delta H)\delta - H\delta = i,$$

adică relația (39.38). Creșterea corespunzătoare a inducției magnetice radiale din întrefier este:

$$\Delta B = \mu_0 \Delta H = \pm \frac{\mu_0}{\delta} i. \quad (39.39)$$

Curba care indică repartiția spațială a inducției magnetice în întrefier se obține pornind de la axa neutră (punctul O) într-un sens ales pentru variabila unghiulară α și adăugînd creșterea (39.39) ori de cîte ori se trece prin dreptul unui conductor de curent i (cu sensul asociat în mod corespunzător sensului curentului). Pentru cîmpul magnetic al înfășurării fazei întii parcursă de curentul $i_1 = I \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma)$ se obține o expresie de forma:

$$B_1(\alpha, t) = K i_1(t) \Theta_1(\alpha), \quad (39.40)$$

în care $\Theta_1(\alpha)$ e funcțiunea de repartiție spațială, periodică, în trepte, reprezentată cu linii pline în figura 39—11, c (în care s-a luat linia de referință $B = 0$ la periferia rotorului). În primă aproximație, această repartiție spațială periodică poate fi aproximată cu o sinusoidă de aceeași perioadă (de ex. unda fundamentală de la dezvoltarea ei în serie Fourier), reprezentată în linii întrerupte în figura 39.11, c . Se obține astfel expresia aproximativă:

$$B_1(\alpha, t) \approx K I \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma) \sin p\alpha = B_0 \sin(\omega t + \gamma) \sin p\alpha \quad (39.41)$$

pentru inducția magnetică din întrefier a fazei întii. Expresia aceasta reprezintă un cîmp de vectori radial, alternativ, cu repartiție unghiulară sinusoidală și invariabilă: în toate punctele din întrefier, vectorii cîmp sînt în fază, fiind permanent nuli în dreptul axelor neutre (noduri) și avînd maximele și minimele în dreptul axelor polilor (ventre), în totală analogie cu undele staționare.

Dacă se exprimă acum inducția magnetică din întrefier a fazei a doua, respectiv a treia, se obțin expresii similare cu relația (39.41). Deoarece înfășurările fazelor sînt prin ipoteză identice și sînt parcurse de curenți trifazați simetrici, valoarea maximă $B_0 = K I \sqrt{2}$ rămîne aceeași;

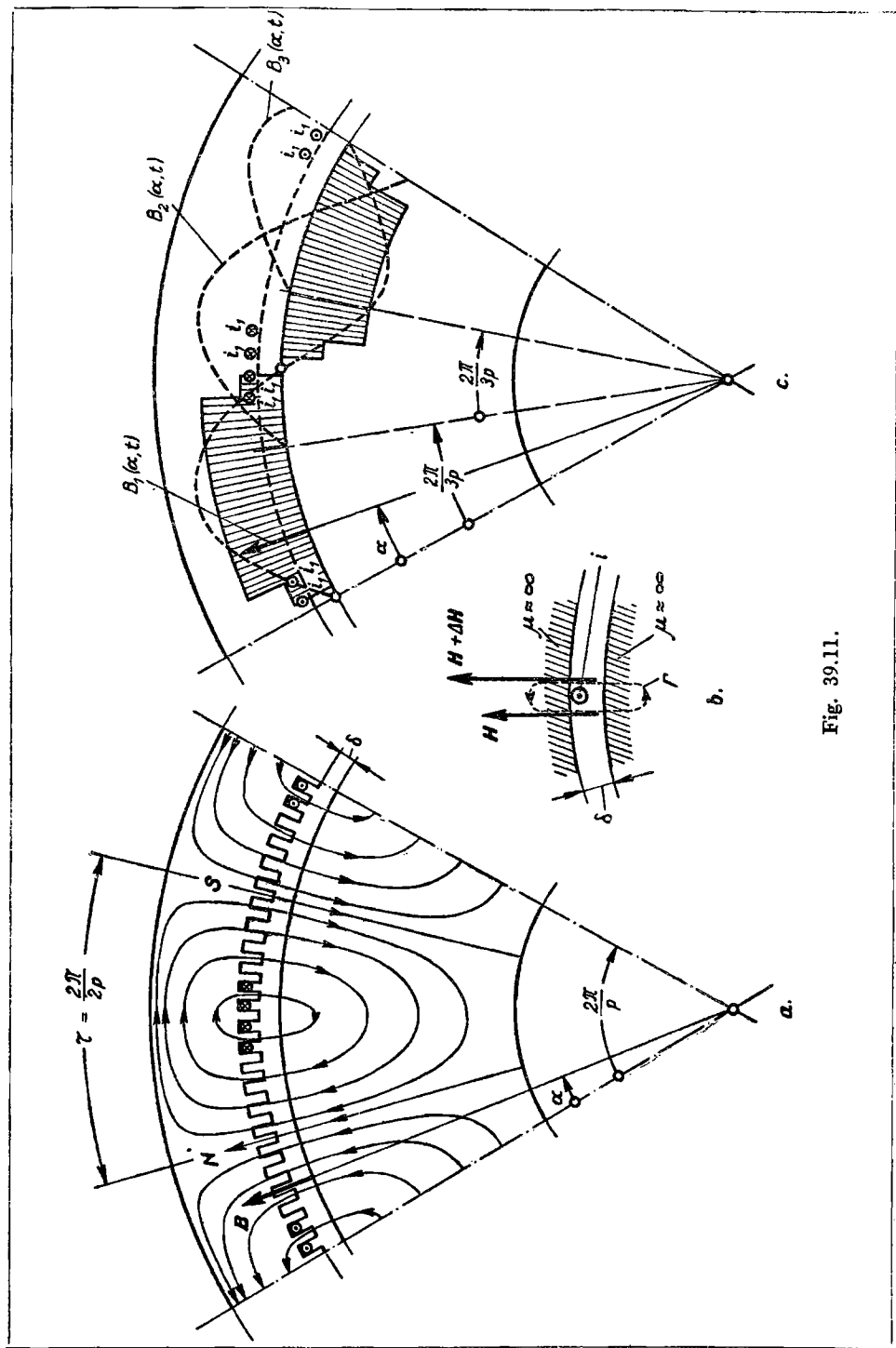


Fig. 39.11.

deoarece curenții $i_2(t)$, respectiv $i_3(t)$, sînt defazați în urma curențului $i_1(t)$ cu $\frac{2\pi}{3}$, respectiv $\frac{4\pi}{3}$, fazele inițiale ale factorului temporal se vor modifica corespunzător; deoarece înfășurările acestor faze sînt decalate spațial (de ex. în sensul α crescător, ca în fig. 39.10 și 39.11) cu $\frac{2\pi}{3p}$, respectiv $\frac{4\pi}{3p}$, sinusoida repartiției spațiale din relația (39.41) se înlocuiește cu una decalată corespunzător. Se obțin astfel expresiile:

$$B_2(\alpha, t) \approx B_0 \sin\left(\omega t + \gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(p\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (39.42)$$

$$B_3(\alpha, t) \approx B_0 \sin\left(\omega t + \gamma - \frac{4\pi}{3}\right) \sin\left(p\alpha - \frac{4\pi}{3}\right). \quad (39.43)$$

Dacă admitem acum că toate înfășurările sînt parcurse concomitent de curenții i_1, i_2, i_3 ai unui sistem trifazat și neglijăm neliniaritățile (determinate de saturația fierului), inducția magnetică rezultantă din întrefier va fi suma inducțiilor produse de fiecare dintre înfășurările celor trei faze

$$B(\alpha, t) \approx B_1(\alpha, t) + B_2(\alpha, t) + B_3(\alpha, t). \quad (39.44)$$

Expresiile acestora se mai pot transforma cu identitatea:

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

și devin:

$$\left. \begin{aligned} B_1(\alpha, t) &= \frac{B_0}{2} \cos(\omega t - p\alpha + \gamma) - \frac{B_0}{2} \cos(\omega t + p\alpha + \gamma) \\ B_2(\alpha, t) &= \frac{B_0}{2} \cos(\omega t - p\alpha + \gamma) - \frac{B_0}{2} \cos\left(\omega t + p\alpha + \gamma - \frac{4\pi}{3}\right) \\ B_3(\alpha, t) &= \frac{B_0}{2} \cos(\omega t - p\alpha + \gamma) - \frac{B_0}{2} \cos\left(\omega t + p\alpha + \gamma - \frac{8\pi}{3}\right) \end{aligned} \right\} \quad (39.45)$$

Dacă adunăm aceste expresii, termenii secunzi au o contribuție nulă, deoarece alcătuiesc un sistem trifazat simetric de mărimi sinusoidale, iar termenii primi sînt identici, așa că

$$B(\alpha, t) = \frac{3}{2} B_0 \cos(\omega t - p\alpha + \gamma). \quad (39.46)$$

Inducția magnetică rezultantă nu mai reprezintă o undă staționară, ci o undă progresivă: repartiția spațială sinusoidală

$$\cos(-p\alpha + \omega t + \gamma) = \sin\left[p\alpha - \left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

are o „fază inițială” $\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}$ funcțiune liniară de timp, adică se deplasează la periferia

mașinii, în lungul întrefierului, cu o viteză unghiulară de rotație Ω_0 constantă. Aceasta e viteza unui sistem de referință mobil, în raport cu care inducția din întrefier apare ca o repartiție spațială invariabilă

$$\omega t - p\alpha + \gamma = \text{const.}$$

Prin derivare rezultă viteza unghiulară de rotație:

$$\Omega_0 = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\omega}{p} = \frac{2\pi f}{p}, \quad (39.47)$$

respectiv turația :

$$n_0 = \frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{f}{p}, \quad (39.48)$$

numită *turație de sincronism*. Expresia (39.47) reprezintă deci un câmp de vectori radial cu repartiție spațială învîrtitoare. Un asemenea câmp magnetic se poate produce de înfășurarea trifazată cu $2p$ poli a unei mașini, adică de un sistem de trei înfășurări decalate în spațiu cu câte $\frac{2\pi}{3p}$

și parcurse de curenți defazați în timp cu câte $\frac{2\pi}{3}$. Dacă un astfel de câmp învîrtitor e pro-

pus de stator și „mătură“, în deplasarea lui, conductoarele unei înfășurări trifazate, fixate de rotor, în această înfășurare rotorică se induc curenți, și asupra ei se exercită forțe, care, în conformitate cu regula lui Lenz, antrenează rotorul în sensul de rotație al câmpului învîrtitor. Viteza de rotație Ω a rotorului e totdeauna diferită de viteza Ω_0 a câmpului învîrtitor, deoarece numai astfel există o deplasare relativă a câmpului învîrtitor față de rotor și se produce fenomenul de inducție electromagnetică (dacă $\Omega = \Omega_0$, câmpul ar fi invariabil în raport cu rotorul). Acesta este în forma cea mai simplificată principiul de funcționare al *motorului electric usincron*.

40. REZOLVAREA REȚELOR TRIFAZATE ECHILIBRATE, SUB TENSIUNI LA BORNE SIMETRICE

Se numește *receptor trifazat echilibrat* un receptor trifazat care admite o schemă echivalentă în stea, cu impedanțe complexe egale în cele trei ramuri ale stelei. Receptorul poate avea numai cele trei borne de fază (1, 2, 3), în care caz linia de alimentare nu are fir neutru; sau poate avea și o a patra bornă (N) — nodul comun laturilor stelei echivalente, numit *punctul neutru al receptorului* — în care caz linia de alimentare poate avea fir neutru. Un receptor cu conexiune în triunghi și impedanțe complexe egale Z_Δ , în laturile triunghiului, e de asemenea echilibrat, deoarece, în baza teoremei transfigurării (38.30), admite schema echivalentă în stea cu impedanțele egale

$$Z_A = \frac{Z_\Delta}{3}, \quad (40.1)$$

În cele ce urmează vom studia diferite tipuri fundamentale de receptoare echilibrate, cărora rețeaua de alimentare le aplică la borne un sistem simetric de tensiuni, presupuse cunoscute. Vom nota cu

- U_f — valoarea efectivă a tensiunilor simple (stelate, de fază) ale rețelei;
- U_l — valoarea efectivă a tensiunilor compuse (dintre faze) ale rețelei;
- U_r — valoarea efectivă a tensiunilor aplicate fazelor receptorului;
- I_l — valoarea efectivă a curenților din conductoarele liniei;
- I_r — valoarea efectivă a curenților din fazele receptorului.

Cele trei borne de fază vor fi notate cu 1, 2, 3. În practică se mai utilizează notațiile (U, V, W) , (R, S, T) , (a, b, c) etc.

40.1. Receptoare trifazate echilibrate în stea

40.1.1 Receptor în stea cu fir neutru (fig. 40.1). Se dau tensiunile simple (stelate) ale rețelei de alimentare :

$$\underline{U}_{10} = U_f \quad \underline{U}_{20} = a^2 \underline{U}_{10} = U_f e^{j \frac{2\pi}{3}} \quad \underline{U}_{30} = a \underline{U}_{10} = U_f e^{j \frac{2\pi}{3}} \quad (40.2)$$

(tensiunea fazei întâi fiind aleasă origine de fază) — și impedențele egale ale fazelor receptorului (necuplate inductiv între ele)

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z} = Z e^{j\varphi_N}, \quad (40.3)$$

respectiv impedența firului neutru

$$\underline{Z}_N = Z_N e^{j\varphi_N} \quad (40.4)$$

Dacă impedențele (în serie) ale liniei de alimentare nu pot fi neglijate, se consideră incluse în valorile (40.3). Conducătoarele liniei de alimentare fiind în serie cu laturile stelei, curenții de linie sînt identici cu aceia din fazele receptorului :

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= I_1 e^{j\gamma_1} & \underline{I}_2 &= I_2 e^{j\gamma_2} \\ \underline{I}_3 &= I_3 e^{j\gamma_3} \end{aligned} \quad (40.5)$$

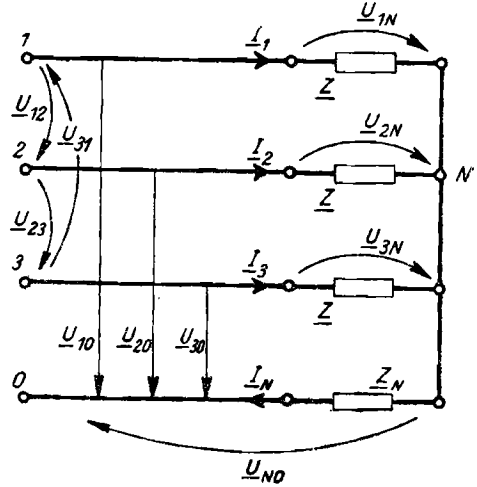


Fig. 40.1.

Calculul curenților. Acești curenți se pot exprima imediat în funcție de tensiunile stelate ale receptorului $\underline{U}_{1N}$, $\underline{U}_{2N}$, $\underline{U}_{3N}$, care, la rîndul lor, sînt egale cu diferențele dintre tensiunile stelate ale rețelei și tensiunea $\underline{U}_{NO}$ a neutrului receptorului față de neutrul rețelei :

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_{1N}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_{10} - \underline{U}_{NO}}{\underline{Z}}; & \underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}_{2N}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_{20} - \underline{U}_{NO}}{\underline{Z}}; \\ \underline{I}_3 &= \frac{\underline{U}_{3N}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_{30} - \underline{U}_{NO}}{\underline{Z}}. \end{aligned} \quad (40.6)$$

Conform primei teoreme a lui Kirchhoff, aplicată punctului neutru N , curențul din firul neutru este :

$$\underline{I}_N = \frac{\underline{U}_{NO}}{\underline{Z}_N} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3. \quad (40.7)$$

Cele patru relații (40.6, 40.7), cu necunoscutele $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ și $\underline{U}_{NO}$, rezolvă complet problema. Demonstrăm mai întâi că tensiunea neutrului $\underline{U}_{NO}$ și curențul $\underline{I}_N$ din firul neutru sînt nule în acest regim echilibrat și simetric. În acest scop, înlocuim în relația (40.7) valorile (40.6) ale curenților și obținem egalitatea :

$$(\underline{U}_{10} + \underline{U}_{20} + \underline{U}_{30}) \frac{1}{\underline{Z}} = \underline{U}_{NO} \left[\frac{3}{\underline{Z}} + \frac{1}{\underline{Z}_N} \right], \quad (40.8)$$

deoarece

$$\underline{U}_{10} + \underline{U}_{20} + \underline{U}_{30} = 0, \quad (40.9)$$

sistemul tensiunilor simple ale rețelei fiind simetric. Paranteza dreaptă din relația (40.8) nu poate fi nulă, din cauză că în rețele disipative părțile reale ale impedanțelor și admitanțelor sînt pozitive și nenule. De aceea, din relațiile (40.8) și (40.7) rezultă :

$$\boxed{\underline{U}_{NO} = 0} \text{ și } \underline{I}_N = \underline{U}_{NO}/\underline{Z}_N = 0, \quad (40.10)$$

de unde :

$$\underline{U}_{1N} = \underline{U}_{10} \quad \underline{U}_{2N} = \underline{U}_{20} ; \quad \underline{U}_{3N} = \underline{U}_{30}. \quad (40.11)$$

Luînd modulele, rezultă :

$$U_f = U_r = |\underline{U}_{1N}| = |\underline{U}_{2N}| = |\underline{U}_{3N}|. \quad (40.12)$$

În regim echilibrat și simetric, tensiunile stelate ale receptorului sînt egale cu tensiunile stelate ale rețelei, iar curentul firului neutru e nul. Curenții rezultă imediat din relațiile (40.6) și (40.10) :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{Z}} = \frac{U_f}{Z} e^{-j\varphi}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{20}}{\underline{Z}} = \frac{U_f}{Z} e^{-j(\varphi + \frac{2\pi}{3})} = a^2 \underline{I}_1 \quad (40.13)$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{30}}{\underline{Z}} = \frac{U_f}{Z} e^{-j(\varphi + \frac{4\pi}{3})} = a \underline{I}_1$$

și formează un sistem simetric direct ca și tensiunile, avînd valorile efective egale :

$$|\underline{I}_1| = |\underline{I}_2| = |\underline{I}_3| = \boxed{I_r = \frac{U_f}{Z}}$$

(40.14)

și fiind defazate cu argumentul φ al impedanțelor față de tensiunile stelate corespunzătoare : $\underline{I}_1$ față de $\underline{U}_{10}$, $\underline{I}_2$ față de $\underline{U}_{20}$, $\underline{I}_3$ față de $\underline{U}_{30}$. În figura 40.2 sînt reprezentați fazorii tensiunilor și curenților.

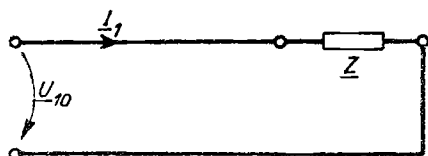


Fig. 40.2.

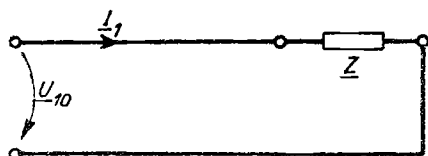


Fig. 40.3.

Concluzie : În regim echilibrat și simetric, curenții unui receptor în stea se pot calcula pe fiecare fază în parte, ca într-un circuit monofazat, căruia i s-ar aplica tensiunea stelată a rețelei (v. fig. 40.3).

Relații între mărimile de linie și mărimile receptorului. Dacă I_l e valoarea efectivă comună a curenților din conductoarele liniei, în cazul receptorului în stea avem :

$$\boxed{I_l = I_r}, \quad (40.15)$$

deoarece curenții de linie coincid cu cei din fazele receptorului.

Tensiunile de linie sînt tensiunile dintre faze $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$, $\underline{U}_{31}$, egale cu diferențele tensiunilor stelate respective (v. teoremele din par. 39.1.3) și care formează sistemul simetric :

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_{12} &= \underline{U}_{10} - \underline{U}_{20} = \sqrt{3} \underline{U}_{10} e^{j\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} \underline{U}_f e^{j\frac{\pi}{6}} \\ \underline{U}_{23} &= \underline{U}_{20} - \underline{U}_{30} = \sqrt{3} \underline{U}_{20} e^{j\frac{\pi}{6}} = a^2 \sqrt{3} \underline{U}_f e^{j\frac{\pi}{6}} = a^2 \underline{U}_{12} \\ \underline{U}_{31} &= \underline{U}_{30} - \underline{U}_{10} = \sqrt{3} \underline{U}_{30} e^{j\frac{\pi}{6}} = a \sqrt{3} \underline{U}_f e^{j\frac{\pi}{6}} = a \underline{U}_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (40.16)$$

Luînd modulele și ținînd seama de relația (40.12), rezultă că valoarea efectivă comună a tensiunilor dintre faze e de $\sqrt{3}$ ori mai mare ca a tensiunilor de fază ale receptorului :

$$\boxed{U_l = \sqrt{3} U_r} = \sqrt{3} Z I_r. \quad (40.17)$$

40.1.2. Receptor în stea fără fir neutru (fig. 40.4) În acest caz sînt accesibile măsurări și se presupun cunoscute tensiunile simetrice de linie (dintre faze) :

$$\underline{U}_{12} = U_l e^{j\beta_l}; \quad \underline{U}_{23} = a^2 \underline{U}_{12} = U_l e^{j(\beta_l - \frac{2\pi}{3})}; \quad \underline{U}_{31} = a \underline{U}_{12} = U_l e^{j(\beta_l - \frac{4\pi}{3})} \quad (40.18)$$

și impedanțele egale ale fazelor receptorului (40.3).

Calculul direct al curenților se poate face aplicînd teoremele lui Kirchhoff celor două ochiuri formate și punctului neutru N . Ne putem însă dispensa de acest calcul, dacă observăm că suprimarea firului neutru la rețeaua studiată mai înainte (par. 40.1.1) nu poate aduce nici o modificare în repartiția tensiunilor și curenților, deoarece I_N era egal cu zero (rel. 40.10). Rezultă că tensiunile stelate ale receptorului sînt egale cu tensiunile stelate ale generatorului

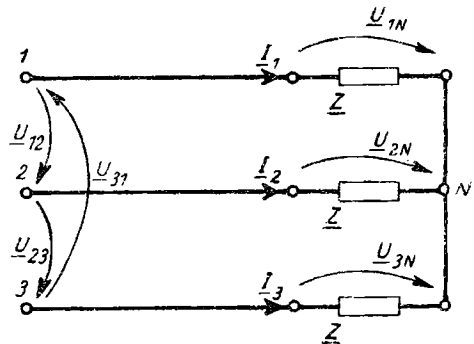


Fig. 40.4.

din cazul precedent. Din relațiile (40.11) și (40.16) rezultă atunci cum se exprimă aceste tensiuni în funcție de tensiunile de linie :

$$\begin{aligned}\underline{U}_{1N} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \underline{U}_{12} e^{-j\frac{\pi}{6}} \\ \underline{U}_{2N} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \underline{U}_{23} e^{-j\frac{\pi}{6}} = a^2 \underline{U}_{1N} \\ \underline{U}_{3N} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \underline{U}_{31} e^{-j\frac{\pi}{6}} = a \underline{U}_{1N},\end{aligned}\quad (40.19)$$

cu

$$U_r = |\underline{U}_{1N}| = |\underline{U}_{2N}| = |\underline{U}_{3N}| = \frac{|\underline{U}_{12}|}{\sqrt{3}} = \frac{U_l}{\sqrt{3}}. \quad (40.20)$$

Curenții vor fi și ei aceiași ca în cazul precedent, adică (v. 40.12, 40.14 și 40.20) vor avea valoarea efectivă :

$$|\underline{I}_1| = |\underline{I}_2| = |\underline{I}_3| = I_r = I_l = \frac{U_r}{Z} = \frac{U_l}{Z\sqrt{3}} \quad (40.21)$$

și defazajul φ față de tensiunea stelată corespunzătoare a receptorului. Expresiile lor complexe vor fi :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{1N}}{Z} = \frac{\underline{U}_{12}}{\sqrt{3}Z} e^{-j(\frac{\pi}{6} + \varphi)} \quad \underline{I}_2 = a^2 \underline{I}_1; \quad \underline{I}_3 = a \underline{I}_1, \quad (40.22)$$

adică vor fi defazați față de tensiunea de linie dintre faza dată și cea următoare cu $\varphi + \pi/6$ (fig. 40.5).

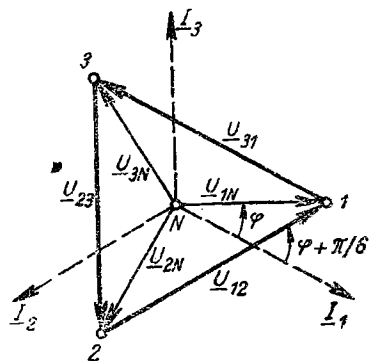


Fig. 40.5.

40.1.3. Receptor în stea cu inductivități mutuale. Fie un receptor echilibrat fără fir neutru, având laturile cuplate cu impedanțele mutuale două câte două egale

$$\underline{Z}_M = j\omega L_{12} = j\omega L_{23} = j\omega L_{31} = j\omega M, \quad (40.23)$$

— de exemplu, în cazul unei bobine trifazate (v. fig. 40.6, a) sau a unei linii de alimentare, la care se iau în considerare inductivitățile liniei. În acest caz se poate găsi o schemă echivalentă în stea fără cuplaje între laturi (v. fig. 40.6, b) și problema deter-

minării curenților se reduce la cazurile precedente. Pentru a găsi schema echivalentă, scriem ecuațiile lui Kirchhoff pe cele două ochiuri independente din figura 40.6, *a* :

$$\underline{U}_{12} = \underline{Z} I_1 + \underline{Z}_M I_2 - \underline{Z} I_2 - \underline{Z}_M I_1 = (\underline{Z} - \underline{Z}_M) I_1 - (\underline{Z} - \underline{Z}_M) I_2$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{Z} I_2 + \underline{Z}_M I_3 - \underline{Z} I_3 - \underline{Z}_M I_2 = (\underline{Z} - \underline{Z}_M) I_2 - (\underline{Z} - \underline{Z}_M) I_3.$$

Se observă că am obținut ecuațiile scrise pentru ochiurile schemei echivalente din figura 40.6, *b*, dacă impedanțele acesteia sînt :

$$\underline{Z}_e = \underline{Z} - \underline{Z}_M. \quad (40.24)$$

Dacă $\underline{Z} = R + j\omega L$, se constată că inductivitățile echivalente, necuplate, în stea sînt :

$$L_e = L - M, \quad (40.25)$$

unde M e valoarea comună a inductivităților mutuale dintre faze. Curenții din ramurile acestei stele echilibrate cu inductivități mutuale sînt simetrici, dacă tensiunile aplicate sînt simetrice. Echivalența stabilită e însă valabilă și în cazul în care tensiunile între faze nu sînt simetrice, deoarece simetria lor nu a fost utilizată în demonstrație.

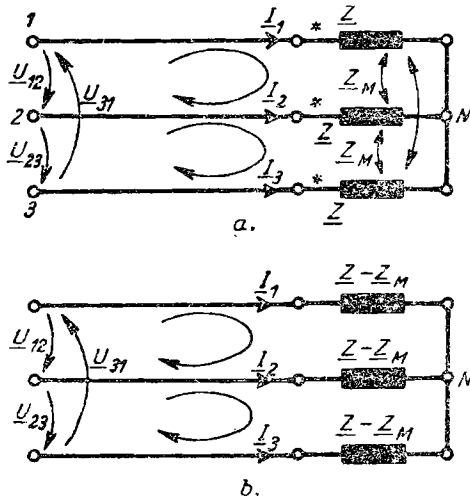


Fig. 40.6.

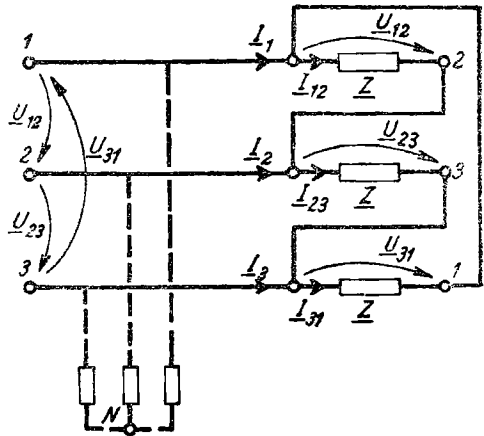


Fig. 40.7.

40.2. Receptoare trifazate echilibrate în triunghi

40.2.1 Receptor în triunghi fără cuplaje inductive (fig. 40.7). Se dau tensiunile simetrice de linie (40.18) și impedanțele egale ale fazelor receptorului :

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{31} = \underline{Z} = Z e^{j\varphi}. \quad (40.26)$$

Se cer curenții din fazele receptorului $\underline{I}_{12}$, $\underline{I}_{23}$, $\underline{I}_{31}$ și curenții de linie $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$.

Calculul curenților. Primii curenți se pot exprima imediat în funcție de tensiunile de linie, care sînt acum aplicate direct impedanțelor receptorului :

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_l}{\underline{Z}} e^{j(\beta_l - \varphi)} \quad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}} = a^2 \underline{I}_{12}; \quad \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}} = a \underline{I}_{12} \quad (40.27)$$

și formează un sistem simetric cu valorile efective :

$$|\underline{I}_{12}| = |\underline{I}_{23}| = |\underline{I}_{31}| = \boxed{I_r = \frac{U_l}{Z}}. \quad (40.28)$$

Acești curenți sînt defazați cu argumentul φ al impedanței față de tensiunile de linie corespunzătoare : $\underline{I}_{12}$ față de $\underline{U}_{12}$, $\underline{I}_{23}$ față de $\underline{U}_{23}$, $\underline{I}_{31}$ față de $\underline{U}_{31}$.

Din aplicarea primei teoreme a lui Kirchhoff, la bornele de fază ale receptorului rezultă că fiecare curent de linie e diferența a doi curenți de fază ai receptorului (v. par. 39.1.3) :

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = \sqrt{3} \underline{I}_{12} e^{-j\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3} U_l}{Z} e^{j(\beta_l - \varphi - \frac{\pi}{6})} \\ \underline{I}_2 &= \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = \sqrt{3} \underline{I}_{23} e^{-j\frac{\pi}{6}} = a^2 \underline{I}_1 \\ \underline{I}_3 &= \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = \sqrt{3} \underline{I}_{31} e^{-j\frac{\pi}{6}} = a \underline{I}_1 \end{aligned} \right\} \quad (40.29)$$

Curenții de linie formează și ei un sistem simetric cu valorile efective :

$$I_l = \frac{\sqrt{3} U_l}{Z}, \quad (40.30)$$

fiecare avînd defazajul $\varphi + \frac{\pi}{6}$ față de tensiunea dintre faza dată și cea următoare.

Dacă se introduce un sistem de tensiuni auxiliare stelate, pe baza relațiilor (40.19), considerate ca relații de definiție, rezultă pentru curenții de linie expresiile :

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= 3 \frac{\underline{U}_{1N}}{\underline{Z}} = 3 \frac{\underline{U}_{1N}}{\underline{Z}} e^{-j\varphi} & \underline{I}_2 &= 3 \frac{\underline{U}_{2N}}{\underline{Z}} = 3 \frac{\underline{U}_{2N}}{\underline{Z}} e^{-j\varphi} \\ \underline{I}_3 &= 3 \frac{\underline{U}_{3N}}{\underline{Z}} = 3 \frac{\underline{U}_{3N}}{\underline{Z}} e^{-j\varphi}. \end{aligned} \quad (40.31)$$

Se verifică și pe această cale că impedanța unei laturi a stelei echivalente triunghiului e $Z_\Delta = \frac{1}{3} \underline{Z}_\Delta = \frac{1}{3} \underline{Z}$.

Observație : Tensiunile auxiliare stelate $\underline{U}_{1N}$, $\underline{U}_{2N}$, $\underline{U}_{3N}$ definite de relațiile (40.19) nu există în acest caz în rețea. Dacă însă rețeaua de alimentare simetrică are neutrul accesibil, sau dacă se montează un grup de impedanțe egale în stea între bornele ei, pentru a forma un punct neutru artificial (fig. 40.7), tensiunile stelate corespunzătoare sînt egale cu aceste tensiuni auxiliare.

În figura 40.8 e construită diagrama curenților și tensiunilor.

Relații între mărimile de linie și mărimile receptorului. În cazul receptorului în triunghi, tensiunea aplicată unei faze a receptorului e chiar tensiunea de linie

$$\boxed{U_l = U_r} = Z I_r, \quad (40.32)$$

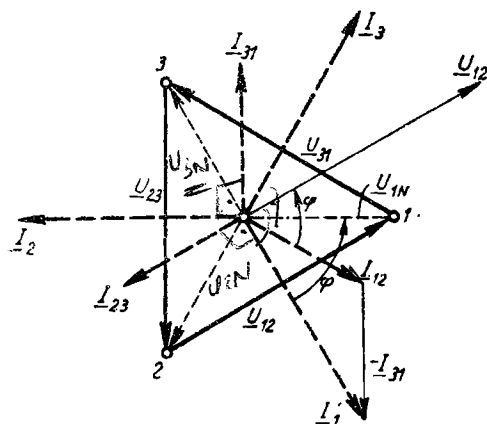
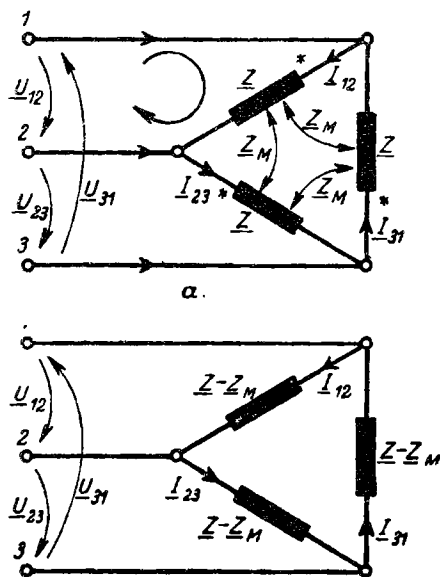


Fig. 40.8.



b.

Fig. 40.9.

iar curentul de linie este de $\sqrt{3}$ ori mai mare decât curentul de fază al receptorului (v. 40.28 și 40.30),

$$\boxed{I_l = \sqrt{3} I_r} \quad (40.33)$$

40.2.2 Receptoare în triunghi cu inductivități mutuale (fig. 40.9, a). Ca și în cazul stelei cu inductivități mutuale căutăm o schemă echivalentă fără cuplaje inductive pentru receptorul considerat (fig. 40.9, b).

Ecuatiile lui Kirchhoff scrise pe cele trei ochiuri independente din figura 40.9 a, sînt :

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_{12} &= \underline{Z} \underline{I}_{12} + \underline{Z}_M (\underline{I}_{23} + \underline{I}_{31}) \\ \underline{U}_{23} &= \underline{Z} \underline{I}_{23} + \underline{Z}_M (\underline{I}_{31} + \underline{I}_{12}) \\ \underline{U}_{31} &= \underline{Z} \underline{I}_{31} + \underline{Z}_M (\underline{I}_{12} + \underline{I}_{23}) \end{aligned} \right\} \quad (40.34)$$

Adunînd aceste ecuații și ținînd seama că suma tensiunilor dintre faze e nulă, rezultă :

$$(\underline{Z} + 2 \underline{Z}_M) (\underline{I}_{12} + \underline{I}_{23} + \underline{I}_{31}) = 0.$$

Primul factor nu poate fi nul, din cauza rezistențelor totdeauna pozitive ale aturilor. Rezultă că cei trei curenți ai receptorului satisfac relația :

$$\underline{I}_{12} + \underline{I}_{23} + \underline{I}_{31} = 0. \quad (40.35)$$

Înlocuind cu această relație suma a cîte doi curenți în (40.34), rezultă

$$\underline{U}_{12} = (\underline{Z} - \underline{Z}_M) \underline{I}_{12}; \quad \underline{U}_{23} = (\underline{Z} - \underline{Z}_M) \underline{I}_{23}; \quad \underline{U}_{31} = (\underline{Z} - \underline{Z}_M) \underline{I}_{31}, \quad (40.36)$$

adică impedanțele triunghiului echivalent fără cuplaje inductive sînt :

$$\underline{Z}_e = \underline{Z} - \underline{Z}_M. \quad (40.37)$$

Curenții receptorului $\underline{I}_{12}$, $\underline{I}_{23}$, $\underline{I}_{31}$ și cei de linie sînt și în acest caz simetrici, dacă tensiunile aplicate sînt simetrice. Echivalența stabilită e însă valabilă și în cazul în care tensiunile dintre faze nu formează un sistem simetric, deoarece simetria tensiunilor nu a fost utilizată în demonstrație.

40.3. Puteri în rețele trifazate echilibrate

Un receptor trifazat în stea cu fir neutru constituie un 4-pol, a cărui putere complexă la borne e dată de relația generală (37.22) :

$$\underline{S}_b = \underline{V}_1 \underline{I}_1^* + \underline{V}_2 \underline{I}_2^* + \underline{V}_3 \underline{I}_3^* + \underline{V}_0 (-\underline{I}_N^*) \quad (40.38)$$

sau — cu $\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$ și $\underline{U}_{k0} = \underline{V}_k - \underline{V}_0$, ($k = 1, 2, 3$) — de relația :

$$\underline{S}_b = \underline{U}_{10} \underline{I}_1^* + \underline{U}_{20} \underline{I}_2^* + \underline{U}_{30} \underline{I}_3^*. \quad (40.39)$$

Dacă receptorul e echilibrat și tensiunile sînt simetrice, din relațiile (40.2) și 40.13) rezultă egalitatea celor trei termeni de mai sus (cu $a^* = a^2$ și $(a^2)^* = a$) :

$$\underline{U}_{20} \underline{I}_2^* = a^2 \underline{U}_{10} (a^2 \underline{I}_1)^* = a^3 \underline{U}_{10} \underline{I}_1^* = \underline{U}_{10} \underline{I}_1^*$$

$$\underline{U}_{30} \underline{I}_3^* = a \underline{U}_{10} (a \underline{I}_1)^* = a^3 \underline{U}_{10} \underline{I}_1^* = \underline{U}_{10} \underline{I}_1^*.$$

Puterea complexă trifazată în regim simetric rezultă cu relația (40.17) :

$$\underline{S}_b = 3 \underline{U}_{10} \underline{I}_1^* = 3 U_l I_l e^{j\varphi} = \sqrt{3} U_l I_l e^{j\varphi} = P_b + jQ_b, \quad (40.40)$$

cu puterea activă și puterea reactivă :

$$\boxed{P_b = \sqrt{3} U_l I_l \cos \varphi \quad ; \quad Q_b = \sqrt{3} U_l I_l \sin \varphi}. \quad (40.41)$$

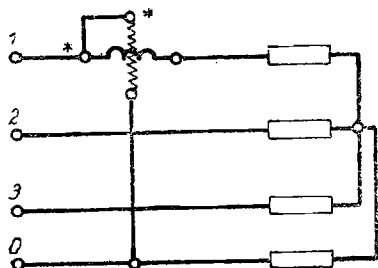


Fig. 40.10.

Puterea activă se măsoară cu un singur wattmetru (fig. 40.10), a cărui bobină de curent se pune în serie cu conductorul fazei întâi, a cărui bobină de tensiune se conectează între conductorul fazei întâi și firul neutru (dacă acesta lipsește, se folosește un neutru artificial, ca în fig. 40.7) și a cărui indicație se multiplică cu trei.

Deoarece orice receptor în triunghi admite o schemă echivalentă în stea, rezultă că formulele (40.38) și (40.41) rămîn valabile (cu $\underline{I}_N = 0$) la orice fel de receptor echilibrat, alimentat cu tensiuni simetrice.

Concluzii: Cazurile particulare de receptoare studiate anterior conduc la următoarele concluzii generale, privitoare la rețelele trifazate echilibrate, alimentate cu tensiuni simetrice:

- Calculul curenților se poate efectua ca în monofazat, pe fiecare fază în parte.
- În cazul mai multor receptoare conectate în serie sau în paralel se pot face transfigurări succesive, pentru a obține un singur receptor echivalent în stea sau în triunghi.
- Curenții de linie sînt defazați față de tensiunile stelate ale generatorului (sau ale receptorului), cu argumentul $\varphi = \arctg \frac{X}{R}$ al impedanțelor de sarcină $Z = R + jX$ și au valoarea efectivă:

$$I_l = \frac{U_f}{Z_\lambda} = 3 \frac{U_f}{Z_\Delta} = \frac{U_l}{\sqrt{3} Z_\lambda} = \frac{\sqrt{3} U_l}{Z_\Delta}, \quad (40.42)$$

în care Z_λ e impedanța unei laturi a receptorului echivalent în stea, iar Z_Δ impedanța unei laturi a receptorului echivalent în triunghi.

d) Puterile complexe, active și reactive, sînt date de relația (40.40) și (40.41), oricare ar fi receptorul.

e) În cazul receptoarelor trifazate echilibrate în stea, curenții și tensiunile au aceeași valoare fie că există, fie că nu există firul neutru. De aceea, el poate fi suprimat. Cu toate acestea, în rețelele trifazate de distribuție a energiei electrice (la tensiune joasă) există totdeauna conductorul neutru (cu o secțiune mai mică decît a conductoarelor de fază). Aceasta deoaurec un mare număr de consumatori (iluminat, uz casnic etc.) au receptoare monofazate — conectate în stea — a căror echilibrare nu e niciodată perfectă. Firul neutru are, în acest caz, rolul de a stabili potențialul punctului neutru al receptorului, astfel încît fiecărei faze a accestuia să i se aplice practic aceeași tensiune efectivă, chiar la impedanțe de fază neegale (v. par. 41.2). Pentru același motiv, firul neutru, care nu trebuie să se întrerupă nici măcar accidental, nu se echează cu siguranțe fuzibile. Totodată, în rețelele de distribuție de joasă tensiune, conductorul neutru e legat la pămînt, asigurîndu-se astfel o tensiune maximă între conductoarele de fază și pămînt, egală cu tensiunea stelată.

Observație: În practică, valorile efective ale tensiunilor unui sistem trifazat se indică prin raportul (neefectuat și egal cu $\sqrt{3}$) dintre tensiunea de linie și cea stelată a rețelei de alimentare: U_l/U_f . De exemplu, notația 380/220 V înseamnă: tensiuni între faze de 380 V și tensiuni stelate de $220 = 380/\sqrt{3}$ V.

40.4. Aplicații

40.4.1. Exemplul 1. Se consideră o rețea cu tensiuni trifazate simetrice, date de 380/220 V, 50 Hz, care alimentează un receptor echilibrat în stea, format din trei impedanțe egale $Z = R + jX = (3 + j4)\Omega$ și un motor trifazat asincron¹, care absoarbe o putere $P'' = 4$ kW, sub un factor de putere inductiv $\cos \varphi = 0,8$.

Se cere:

- Să se determine curenții totali de linie și să se verifice bilanțul puterilor active și reactive.
- Să se determine capacitatea a trei condensatoare montate în triunghi, care com-

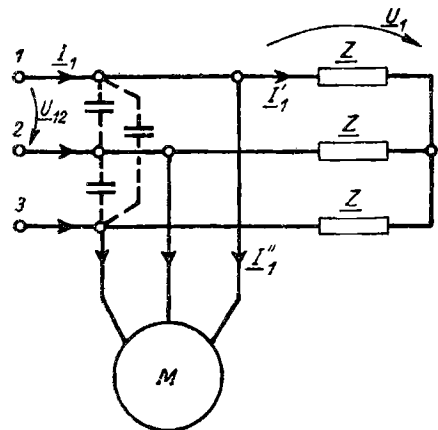


Fig. 40.11.

¹ Motorul asincron alimentat cu tensiuni simetrice admite o schemă echivalentă cu trei impedanțe (inductive) identice, legate în stea sau în triunghi. Prin urmare este un receptor echilibrat.

pensează integral puterea reactivă a celor două receptoare, astfel încît factorul de putere să devină unitar.

c) Dacă linia de alimentare are impedanțele interioare (serie) de fază $\underline{Z}_l = (1 + j1)\Omega$, să se determine valoarea tensiunii de fază a generatorului, înainte și după montarea condensatoarelor.

Soluție: Ambele receptoare fiind echilibrate, curenții de linie formează un sistem simetric, deci este suficient să se determine curentul pe o fază, de exemplu pe faza 1 (fig. 40.11).

a) Ca origine de fază se consideră tensiunea stelată pe faza 1 :

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{10} = \underline{U}_{1N} = U_f = \frac{U_l}{\sqrt{3}} = 220 \text{ V.}$$

Curentul de linie pentru receptorul în stea este :

$$\underline{I}'_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}} = \frac{220}{3 + j4} = 8,8(3 - j4) = 26,4 - j35,2 \approx 43,9 e^{-j \arctg 0,75}.$$

Curentul de linie absorbit de motor are valoarea efectivă :

$$I'_1 = \frac{P''}{\sqrt{3} U_l \cos \varphi} = \frac{4000}{\sqrt{3} 380,8} \approx 7,6 \text{ A,}$$

cu expresia în complex pentru faza întâi :

$$\underline{I}'_1 = I'_1 (\cos \varphi'' - j \sin \varphi'') \approx 7,6(0,8 - j 0,6) = 6,08 - j 4,56.$$

Curentul total devine, conform primei teoreme a lui Kirchhoff :

$$\underline{I}_1 = \underline{I}'_1 + \underline{I}''_1 \approx 32,48 - j 39,76 = I_l e^{-j\varphi},$$

cu valoarea efectivă $I_l = \sqrt{32,48^2 + 39,76^2} \approx 51,4 \text{ A}$ și defazajul inductiv $\varphi = \arctg (39,76/32,48) \approx \arctg 1,223 = 51^\circ 30'$ ($\cos \varphi \approx 0,633$; $\sin \varphi \approx 0,774$).
Puterile date de rețea sînt :

$$P_b = \sqrt{3} 380 \cdot 51,4 \cdot 0,633 = 21\,400 \text{ W}; \quad Q_b = \sqrt{3} 380 \cdot 51,4 \cdot 0,774 \approx 26\,200 \text{ var.}$$

Puterile consumate de receptoare (cu $Q'' = P'' \operatorname{tg} \varphi''$) sînt :

$$P_b = 3RI_1'^2 + P'' = 3 \cdot 3 \cdot 43,9^2 + 4000 \approx 21\,300 \text{ W}$$

$$Q = 3XI_1'^2 + Q'' = 3 \cdot 4 \cdot 43,9^2 + 4000 \frac{0,6}{0,8} \approx 26\,100 \text{ var.}$$

În limitele erorilor de calcul cu rigla am obținut verificarea bilanșului puterilor active și reactive :

$$P \approx P_b, \quad Q \approx Q_b.$$

b) Puterea reactivă a bateriei de condensatoare necesare compensării integrale a factorului de putere este :

$$Q_c = -3C_\Delta \omega U_f^2 = -Q = -26\,200 \text{ var.}$$

Capacitatea pe fază a bateriei montate în triunghi rezultă :

$$C_\Delta = \frac{|Q_c|}{3U_f^2 \omega} = \frac{26\,200}{3 \cdot 380^2 \cdot 314} \approx 192 \text{ } \mu\text{F.}$$

c) Înainte de montarea condensatoarelor, tensiunea stelată necesară generatorului era :

$$|\underline{E}_1| = |\underline{U}_1 + \underline{Z}_l \underline{I}_1| = |220 + (1 + j)(32,48 - j 39,76)| \approx 290 \text{ V.}$$

După montarea condensatoarelor, deoarece compensarea este completă, iar condensatoarele absorb numai curenți în cuadratură cu tensiunea aplicată, curentul total se reduce la componenta activă a curentului determinat anterior $I_{l0} = 32,48$ A.

Tensiunea stelată necesară generatorului e, în acest caz, numai:

$$|E_{10}| = |U_1 + Z_l I_{l0}| = |220 + (1 + j) 32,48| \approx 255 \text{ V.}$$

În figura 40.12 e reprezentată diagrama compunerii curenților și tensiunilor pe faza întâi. Avantajul cel mai important al compensării puterii reactive consistă în reducerea consumului de putere ΔP pe linie: înainte de compensare

$$\Delta P = 3 R_l I_l^2 = 3 \cdot 1 \cdot 51,4^2 \approx 7910 \text{ W,}$$

după compensare:

$$\Delta P = 3 R_l I_{l0}^2 = 3 \cdot 1 \cdot 32,48^2 \approx 3170 \text{ W.}$$

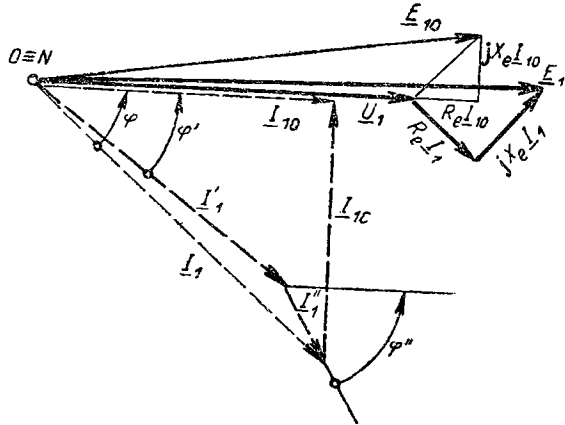


Fig. 40.12.

40.4.2. Exemplul 2. O linie trifazată alimentează un receptor format din trei impedanțe egale $Z = R + jX = (8,4 + j11,1)\Omega$, montate în triunghi (fig. 40.13, a). La bornele generatorului, tensiunea între faze are valoarea efectivă $U_l = 250$ V ($f = 50$ Hz). Impedanțele echivalente serie ale liniei sînt $Z_l = R_l + jX_l = (0,2 + j0,3)\Omega$.

Să se determine curenții de linie, tensiunile de linie aplicate receptorului și curenții din laturile receptorului.

Soluție: Se transfigurează triunghiul într-o stea echivalentă (fig. 40.13, b). Se obține:

$$Z_\Delta = \frac{Z_\Delta}{3} = \frac{Z}{3} = 2,8 + j3,7 \Omega.$$

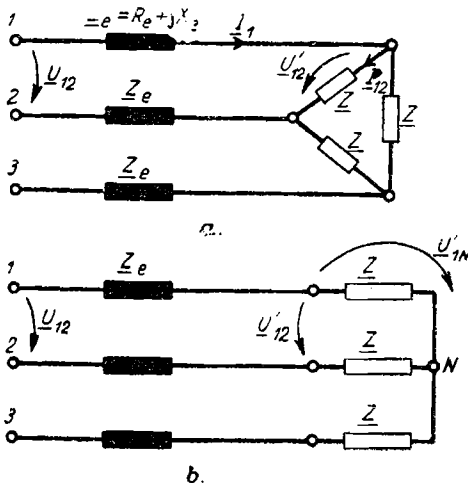


Fig. 40.13.

Deci, impedanța totală pe fiecare fază va fi:

$$Z'' = Z_\Delta + Z_l = 3 + j4 = 5 \cdot e^{j\varphi},$$

cu $\varphi = \arctg(4/3) \approx 53^\circ$.

Dacă se alege ca origine de fază tensiunea stelată la generator pe faza 1 $U_1 = 250/\sqrt{3}$ V, se obține curentul:

$$I_1 = \frac{U_1}{Z''} = \frac{30}{\sqrt{3}} - j \frac{40}{\sqrt{3}} = 28,9 e^{-j\varphi},$$

cu valoarea efectivă $|I_1| = I_l = 28,9$ A.

Ceilalți doi curenți de linie sînt:

$$I_2 = 28,9 e^{-j(\varphi + \frac{2\pi}{3})}$$

$$I_3 = 28,9 e^{-j(\varphi + \frac{4\pi}{3})}$$

sistemul fiind simetric.

La receptor, tensiunea stelată $\underline{U}'_N$ este :

$$\underline{U}'_{1N} = \underline{I}_1 Z_\lambda = \left(\frac{30}{\sqrt{3}} - j \frac{40}{\sqrt{3}} \right) (2,8 + j 3,7) \approx \frac{232 - j}{\sqrt{3}}.$$

Valoarea efectivă a tensiunii de linie la receptor este :

$$U'_l = \sqrt{3} |U'_{1N}| \approx \sqrt{3} \cdot \frac{232}{\sqrt{3}} = 232 \text{ V},$$

iar valorile efective ale curenților din laturile triunghiului sînt egale cu :

$$I_r = |I_{12}| = \frac{I_l}{\sqrt{3}} \approx \frac{28,9}{\sqrt{3}} = 16,7 \text{ A}.$$

41. || REZOLVAREA REȚELOR TRIFAZATE DEZECHILIBRATE SUB TENSIUNI LA BORNE DATE

Calculul rețelor trifazate dezechilibrate sub tensiuni la borne date se poate face cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff, fără alte metode speciale. Pentru rețelele trifazate fără inductivități mutuale între laturi, acest calcul se sistematizează, după cum vom arăta în acest capitol, în principal pe baza teoremei potențialului punctului neutru. Dacă neutrul O al rețelei de alimentare e accesibil, vom presupune, în general, că se dau tensiunile nesimetrice,

$$\underline{U}_{10} = U_{10} e^{j\beta_{10}}, \underline{U}_{20} = U_{20} e^{j\beta_{20}}, \underline{U}_{30} = U_{30} e^{j\beta_{30}}, \quad (41.1)$$

cu

$$\underline{U}_{10} + \underline{U}_{20} + \underline{U}_{30} \neq 0. \quad (41.2)$$

Tensiunile aplicate între faze rezultă imediat :

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_{10} - \underline{U}_{20}, \underline{U}_{23} = \underline{U}_{20} - \underline{U}_{30}, \underline{U}_{31} = \underline{U}_{30} - \underline{U}_{10} \quad (41.3)$$

și sînt, în general, tot nesimetrice, satisfăcînd însă relația evidentă

$$\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} = 0. \quad (41.4)$$

Dacă neutrul rețelei de alimentare nu e accesibil, se pot da numai tensiunile între faze ale rețelei

$$\underline{U}_{12} = U_{12} e^{j\beta_{12}}, \underline{U}_{23} = U_{23} e^{j\beta_{23}}, \underline{U}_{31} = U_{31} e^{j\beta_{31}}, \quad (41.5)$$

satisfăcînd relația (41.4) și fiind, în rest, oarecare. În acest caz nu există tensiuni stelate ale rețelei de alimentare, decît introduse în mod convențional și neunivoc, prin relațiile (41.3), luînd arbitrară una din aceste tensiuni, ceea ce corespunde alegerii unui anumit punct neutru artificial. Astfel de tensiuni stelate vor fi numite tensiuni stelate auxiliare.

41.1. Teorema potențialului punctului neutru ¹

Considerăm un multipol pasiv în stea cu n ramuri, prin care intră curenții $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \dots, \underline{I}_n$ și cu bornele de acces 1, 2, ..., n , avînd potențialele $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \dots, \underline{V}_N$ față de un punct de referință arbitrar (fig. 41.1).

Ramurile stelei nu sînt cuplate inductiv între ele sau cu alte laturi exterioare și au impedanțele proprii $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \dots, \underline{Z}_n$, respectiv admitanțele :

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1},$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2}, \dots, \underline{Y}_n = \frac{1}{\underline{Z}_n}. \quad (41.6)$$

Conform teoremei potențialului punctului neutru, potențialul punctului N de întîlnire a ramurilor stelei e egal cu media aritmetică a potențialelor bornelor de acces, ponderate cu admitanțele laturilor corespunzătoare

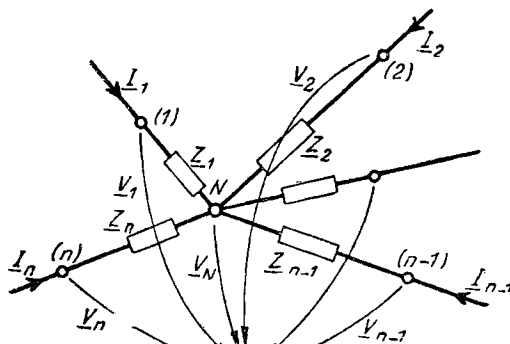


Fig. 41.1

$$\underline{V}_N = \frac{\underline{V}_1 \underline{Y}_1 + \underline{V}_2 \underline{Y}_2 + \dots + \underline{V}_n \underline{Y}_n}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \dots + \underline{Y}_n} \quad (41.7)$$

Teorema se demonstrează imediat, exprimînd curenții din laturi cu ajutorul diferențelor de potențial :

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_1(\underline{V}_1 - \underline{V}_N); \quad \underline{I}_2 = \underline{Y}_2(\underline{V}_2 - \underline{V}_N); \dots, \underline{I}_n = \underline{Y}_n(\underline{V}_n - \underline{V}_N) \quad (41.8)$$

și înlocuind aceste valori în relația care exprimă prima teoremă a lui Kirchhoff, aplicată nodului N ,

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \dots + \underline{I}_n = 0. \quad (41.9)$$

Prin înlocuire, grupînd termenii care au în factor pe $\underline{V}_N$, se obține :

$$\underline{V}_1 \underline{Y}_1 + \underline{V}_2 \underline{Y}_2 + \dots + \underline{V}_n \underline{Y}_n - \underline{V}_N (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \dots + \underline{Y}_n) = 0,$$

de unde rezultă teorema (41.7). Rezultatul e corect, oricare ar fi punctul de referință al potențialelor, dacă în sumele din teorema (41.7) nu se omite nici o latură legată de nodul N .

¹ Uneori, această teoremă e numită *teorema lui Milman*.

41.2. Receptor dezechilibrat, în stea, cu fir neutru

Curenții de linie $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$, identici cu aceia din fazele receptorului s-ar putea determina din relațiile :

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_{1N}}{Z_1} = \underline{Y}_1 (\underline{V}_1 - \underline{V}_N) = \underline{Y}_1 (\underline{U}_{1O} - \underline{U}_{NO}) \\ \underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}_{2N}}{Z_2} = \underline{Y}_2 (\underline{V}_2 - \underline{V}_N) = \underline{Y}_2 (\underline{U}_{2O} - \underline{U}_{NO}) \\ \underline{I}_3 &= \frac{\underline{U}_{3N}}{Z_3} = \underline{Y}_3 (\underline{V}_3 - \underline{V}_N) = \underline{Y}_3 (\underline{U}_{3O} - \underline{U}_{NO}),\end{aligned}\quad (41.10)$$

dacă s-ar cunoaște potențialul $\underline{V}_N$ al punctului neutru sau tensiunea $\underline{U}_{NO}$ dintre neutrul receptorului și cel al rețelei de alimentare, numită și deplasarea neutrului. Potențialul $\underline{V}_N$ rezultă din teorema (41.7) care, în acest caz, se scrie :

$$\underline{V}_N = \frac{\underline{V}_1 \underline{Y}_1 + \underline{V}_2 \underline{Y}_2 + \underline{V}_3 \underline{Y}_3 + \underline{V}_O \underline{Y}_N}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_N}, \quad (41.11)$$

cu punct de referință arbitrar pentru potențiale. Practic, se cunosc tensiunile stelate ale rețelei de alimentare $\underline{U}_{1O}, \underline{U}_{2O}, \underline{U}_{3O}$, care coincid cu potențialele borne-

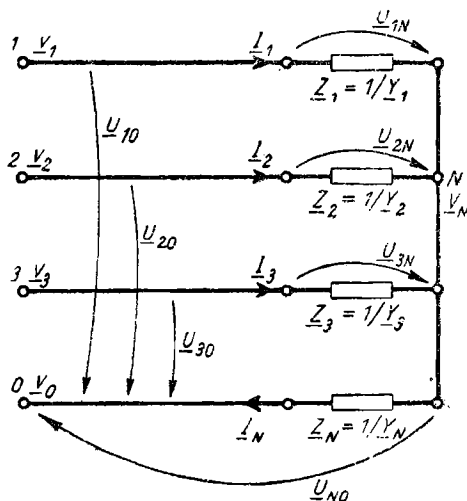


Fig. 41.2

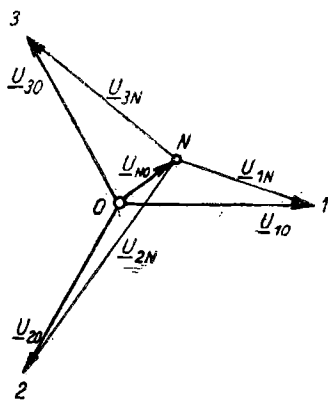


Fig. 41.3

lor, în cazul când neutrul rețelei de alimentare se alege drept punct de referință cu $\underline{V}_O = 0$. În acest caz, $\underline{V}_N = \underline{V}_N - \underline{V}_O = \underline{U}_{NO}$ și teorema (41.11) capătă forma :

$$\underline{U}_{NO} = \frac{\underline{U}_{1O} \underline{Y}_1 + \underline{U}_{2O} \underline{Y}_2 + \underline{U}_{3O} \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_N}. \quad (41.12)$$

O dată calculată această tensiune (deplasarea neutrului v. fig. 41.3), tensiunile stelate ale receptorului, și curenții rezultă imediat din (41.10).

Trebuie observat că $\underline{U}_{NO} \neq 0$ (neutrul „se deplasează”), chiar dacă tensiunile de alimentare sînt simetrice, din cauza dezechilibrului sarcinii. Dacă însă impedanța $|Z_N|$ de pe firul neutru e foarte mică (se reduce la rezistența și inductivitatea echivalentă a firului), atunci $|Y_N| \rightarrow \infty$ și $\underline{U}_{NO} \rightarrow 0$: deplasarea neutrului e neglijabilă în rețelele cu conductor neutru, de secțiune suficient de mare, chiar dacă sarcina e puternic dezechilibrată. Această consecință prezintă mare importanță practică, deoarece asigură aplicarea unor tensiuni de fază, practic simetrice (dacă $\underline{U}_{NO} = 0$, atunci $\underline{U}_{N1} = \underline{U}_{10}$ etc.) receptorilor dezechilibrați monofazați, conectați în stea în rețelele de distribuție de joasă tensiune. De altă parte, dacă admitanța firului neutru e mică sau nulă (nu avem fir neutru), deplasarea neutrului poate fi importantă (v. aplicația de mai jos), producînd micșorarea tensiunilor aplicate unora dintre faze și creșterea tensiunilor la celelalte, ceea ce e inadmisibil în exploatare, periclitînd securitatea instalațiilor. Dacă, în plus, suma admitanțelor laturilor e mică (de ex., datorită satisfacerii unei condiții de rezonanță), deplasarea neutrului poate atinge valori oricît de mari, mai mari decît ale tensiunilor aplicate de rețea. Laturile stelei pot fi în acest caz mult supratensionate.

Aplicație: Fie un receptor trifazat pur rezistiv, constituit din lămpi de iluminat, în stea, cu rezistențele laturilor :

$$R_1 = 100 \, \Omega,$$

$$R_2 = R_3 = 10 \, \Omega,$$

în care sînt incluse și rezistențele conductoarelor liniei de alimentare (care au inductivități neglijabile). Rețeaua de alimentare aplică tensiuni simetrice 220/127 V, 50 Hz. Studiem deplasarea neutrului $\underline{U}_{NO}$ și tensiunile aplicate fazelor receptorului $\underline{U}_{1N}$, $\underline{U}_{2N}$, $\underline{U}_{3N}$ în următoarele două situații :

- există un conductor neutru de inductivitate neglijabilă și rezistența $R_N = 0,6 \, \Omega$ (fig. 41.4, a);
- conductorul neutru lipsește (fig. 41.5, a).

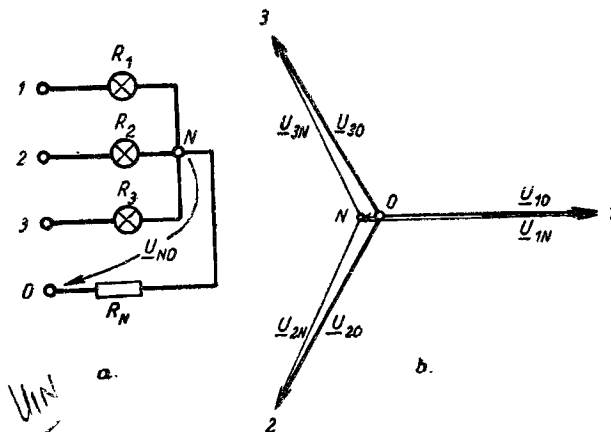


Fig. 41.4

a) În primul caz, $\underline{Y}_1 = 0,01$, $\underline{Y}_2 = \underline{Y}_3 = 0,1$, $\underline{Y}_N = 1,67$. Deoarece am presupus că tensiunile la borne sînt simetrice, $\underline{U}_{20} + \underline{U}_{30} = -\underline{U}_{10}$, rezultă :

$$\underline{U}_{NO} = \frac{0,01 \underline{U}_{10} + 0,1 (\underline{U}_{20} + \underline{U}_{30})}{0,01 + 0,1 + 0,1 + 1,67} = -0,048 \underline{U}_{10}$$

$$U_{NO} = |\underline{U}_{NO}| = 0,048 \cdot 127 = 6,08 \text{ V.}$$

Deplasarea neutrului e admisibilă, fiind sub 5% din tensiunea aplicată. Tensiunile de fază ale receptorului (v. fig. 41.4, b) sînt practic simetrice și egale cu cele ale rețelei.

b) În al doilea caz, $\underline{Y}_N = 0$ (fig. 41.5, a) și rezultă :

$$\underline{U}_{NO} = \frac{0,01 \underline{U}_{1O} + 0,1 (\underline{U}_{2O} + \underline{U}_{3O})}{0,01 + 0,1 + 0,1} = -0,43 \underline{U}_{1O}$$

$$U_{NO} = |\underline{U}_{NO}| = 0,43 \cdot 127 = 54,6 \text{ V.}$$

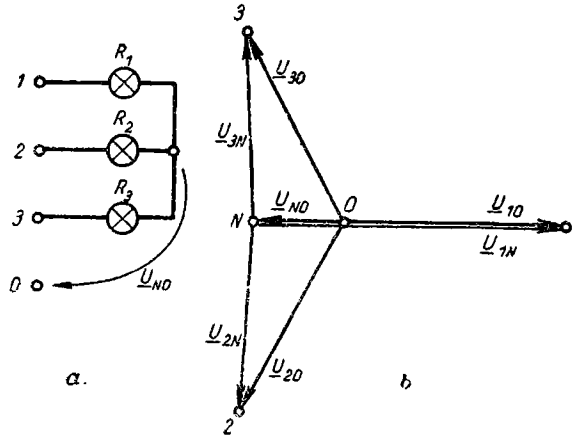


Fig. 41.5

Deplasarea neutrului e acum de ordinul jumătății tensiunii aplicate (fig. 41.5, b). Tensiunile de fază ale receptorului sînt :

$$\underline{U}_{1N} = \underline{U}_{1O} - \underline{U}_{NO} = 1,43 \underline{U}_{1O}; \quad U_{1N} \approx 182 \text{ V}$$

$$\underline{U}_{2N} = \underline{U}_{2O} - \underline{U}_{NO} = \underline{U}_{1O} (e^{-j\frac{2\pi}{3}} + 0,43); \quad U_{2N} \approx 95 \text{ V}$$

$$\underline{U}_{3N} = \underline{U}_{3O} - \underline{U}_{NO} = \underline{U}_{1O} (e^{+j\frac{2\pi}{3}} + 0,43); \quad U_{3N} \approx 95 \text{ V.}$$

Se observă că în lipsa firului neutru lămpile de pe faza 1, mai descărcată (cu rezistență mai mare și curent mai mic), sînt supratensionate inadmisibil (143%). Acest exemplu ilustrează necesitatea utilizării conductorului neutru în rețelele trifazate de distribuție cu consumatori monofazați. În cazul liniilor de înaltă tensiune, care alimentează un număr mare de receptori prin stații de transformare, dezechilibrele consumatorilor mici se compensează prin repartizarea cît mai egală a receptorilor monofazați pe cele trei faze și prin utilizarea unor conexiuni speciale ale înfășurărilor transformatoarelor. De aceea, aceste linii au sarcina practic echilibrată.

41.3. Receptor dezechilibrat în stea, fără fir neutru (fig. 41.6)

În acest caz nu sînt date tensiunile stelate ale rețelei de alimentare, ci numai tensiunile dintre faze :

$$\underline{U}_{12} = U_{12} e^{j\beta_{12}}, \quad \underline{U}_{23} = U_{23} e^{j\beta_{23}}, \quad \underline{U}_{31} = U_{31} e^{j\beta_{31}}, \quad (41.13)$$

în general nesimetrice. Numai două din aceste mărimi sînt independente, deoarece suma lor e nulă, fiind suma unor tensiuni la borne în lungul unei curbe închise :

$$\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} = 0. \quad (41.14)$$

Curenții de linie sînt dați, ca mai sus, de relațiile :

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_{1N}}{\underline{Z}_1} = \underline{Y}_1 (\underline{V}_1 - \underline{V}_N) \\ \underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}_{2N}}{\underline{Z}_2} = \underline{Y}_2 (\underline{V}_2 - \underline{V}_N) \\ \underline{I}_3 &= \frac{\underline{U}_{3N}}{\underline{Z}_3} = \underline{Y}_3 (\underline{V}_3 - \underline{V}_N) \end{aligned} \right\} \quad (41.15)$$

unde $\underline{V}_N$ se determină cu teorema potențialului punctului neutru (41.7), care în acest caz se scrie :

$$\underline{V}_N = \frac{\underline{V}_1 \underline{Y}_1 + \underline{V}_2 \underline{Y}_2 + \underline{V}_3 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}. \quad (41.16)$$

Alegerea originii potențialelor este arbitrară și poate fi un punct oarecare P_0 din spațiu. În practică se alege astfel punctul de referință P_0 al potențialelor, încît exprimarea lor în funcție de datele problemei — tensiunile dintre faze (41.13) — să se facă cît mai simplu.

Dacă tensiunile (41.13) sînt simetrice, se preferă să se aleagă drept potențial de referință (nul) potențialul pe care l-ar avea punctul 0 al rețelei de alimentare, simetrice, dacă ar fi accesibil — identic cu potențialul pe care l-ar avea o sarcină echilibrată alimentată de această rețea. Potențialele bornelor vor fi atunci tensiunile auxiliare de fază (simetrice), definite de relațiile :

$$\underline{V}_1 = \underline{U}_{10} = \frac{\underline{U}_{12}}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}}; \quad \underline{V}_2 = \underline{U}_{20} = \frac{\underline{U}_{23}}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}}; \quad \underline{V}_3 = \underline{U}_{30} = \frac{\underline{U}_{31}}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}}, \quad (41.17)$$

iar potențialul neutrlui va fi :

$$\underline{V}_N = \underline{U}_{N0} = \frac{\underline{U}_{10} \underline{Y}_1 + \underline{U}_{20} \underline{Y}_2 + \underline{U}_{30} \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}. \quad (41.18)$$

În cazul general, tensiunile (41.13) nu sînt simetrice și se poate alege nul potențialul unei faze (de ex. $\underline{V}_2$). Potențialele devin :

$$\underline{V}_2 = 0; \quad \underline{V}_1 = \underline{U}_{12}; \quad \underline{V}_3 = \underline{U}_{32} = -\underline{U}_{23}; \quad \underline{V}_N = \underline{U}_{N2} = -\underline{U}_{2N}. \quad (41.19)$$

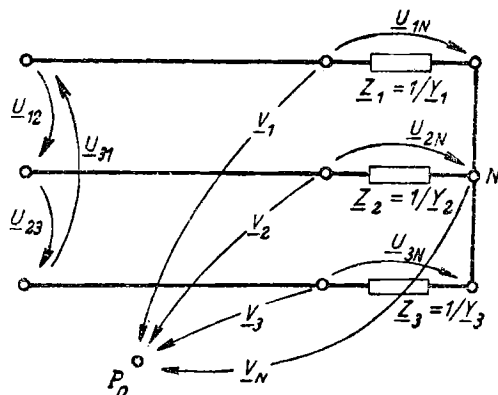


Fig. 41.6

Relația (41.16) ne dă atunci chiar tensiunea pe fază a doua a receptorului (după schimbarea semnului). Pentru tensiunile de fază ale receptorului se obțin expresiile generale :

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_{2N} &= \frac{\underline{U}_{23}\underline{Y}_3 - \underline{U}_{13}\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \\ \underline{U}_{3N} &= \frac{\underline{U}_{31}\underline{Y}_1 - \underline{U}_{21}\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \\ \underline{U}_{1N} &= \frac{\underline{U}_{12}\underline{Y}_2 - \underline{U}_{31}\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \end{aligned} \right\} \quad (41.20)$$

Curenții rezultă imediat cu relațiile (41.15).

Aplicații. 1. Dispozitiv pentru identificarea succesiunii fazelor. Considerăm un receptor înștea (fig. 41.7, a), avînd pe fazele 1 și 2 cite o lampă cu incandescență de rezistență R , iar pe faza 3 un condensator de capacitate C . Se cere că se determine raportul valorilor efective ale curenților din fazele 1 și 2, știind că tensiunile de alimentare sînt simetrice : $\underline{U}_{33} = a^2 \underline{U}_{13}$, $\underline{U}_{31} = a \underline{U}_{13}$.

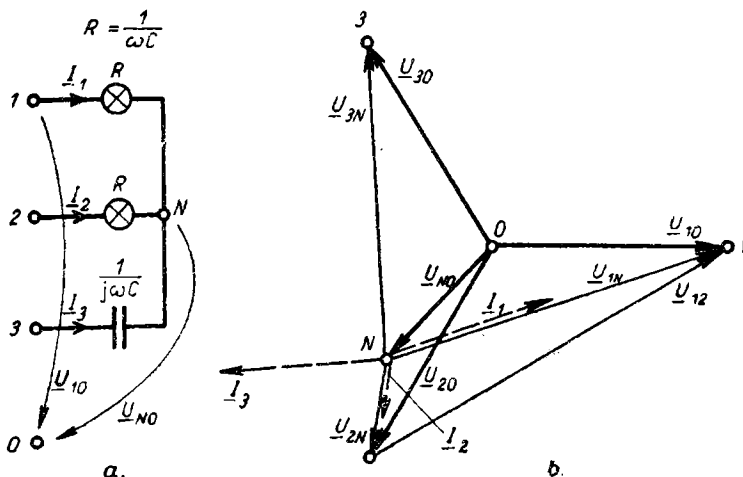


Fig. 41.7

Alegem drept referință borna fazei 2, astfel că potențialele sînt (41.19). În acest caz, $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = 1/R$, $\underline{Y}_3 = j\omega C$ și cu relațiile (41.20) rezultă tensiunea pe fază 2 a receptorului :

$$\underline{U}_{2N} = \frac{\underline{U}_{23}j\omega C - \underline{U}_{13}\frac{1}{R}}{\frac{2}{R} + j\omega C} = \underline{U}_{13} \frac{a^2 \cdot j\omega CR - 1}{2 + j\omega CR}.$$

Tensiunea pe fază 1 a receptorului rezultă :

$$\underline{U}_{1N} = \frac{\underline{U}_{12}\frac{1}{R} - \underline{U}_{31}j\omega C}{\frac{2}{R} + j\omega C} = \underline{U}_{13} \frac{1 - a \cdot j\omega CR}{2 + j\omega CR},$$

iar raportul cerut al curenților rezultă :

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\left| \frac{U_{1N}}{R} \right|}{\left| \frac{U_{2N}}{R} \right|} = \left| \frac{U_{1N}}{U_{2N}} \right| = \left| \frac{1 - e^{j \frac{2\pi}{3}} \cdot j \omega CR}{-1 + e^{-j \frac{2\pi}{3}} \cdot j \omega CR} \right| = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3} \omega CR + \omega^2 C^2 R^2}{1 - \sqrt{3} \omega CR + \omega^2 C^2 R^2}} > 1.$$

Raportul I_1/I_2 e totdeauna supraunitar, adică lampa de pe faza 1 e mai luminoasă decât lampa de pe faza 2. De aceea, acest dispozitiv se poate folosi pentru identificarea succesiunii fazelor : dacă această ordine nu e cunoscută, conectăm receptorul la cele trei borne neidentificate ale rețelei și vom ști că fazele se succed în ordinea : lampa aprinsă puternic, lampa aprinsă slab, condensatorul. Căutînd maximul raportului la R variabil, se obține condiția $R = \frac{1}{\omega C}$ pentru

care

$$\frac{I_1}{I_2} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}} = 2 + \sqrt{3} \approx 3,73$$

$$\underline{U}_{2N} = \underline{U}_{12} \frac{ja^2 - 1}{2 + j} = -(0,154 + j 0,173) \underline{U}_{12}.$$

În figura 41.7 e desenată diagrama vectorială corespunzătoare cazului $R = 1/\omega C$.

2. *Receptor dezechilibrat cu curenți simetrici.* Determinăm condiția generală pe care trebuie să o satisfacă impedanțele neegale $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$ ale unui receptor în stea, fără fir neutru, pentru ca fiind alimentat cu tensiuni simetrice, să absoarbă curenți simetrici. Cu relațiile (41.20) și (41.15), curenții au expresiile generale (care rezultă unele din altele, prin permutări circulare ale indicilor 1, 2, 3).

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{12}\underline{Y}_2\underline{Y}_1 - \underline{U}_{31}\underline{Y}_3\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \quad \underline{I}_2 = \dots \quad \underline{I}_3 = \dots \quad (41.21)$$

Dacă tensiunile sînt simetrice $\underline{U}_{23} = a^2 \underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{31} = a \underline{U}_{12}$, curenții $\underline{I}_1$ și $\underline{I}_2$ se scriu :

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_{12} \frac{\underline{Y}_1(\underline{Y}_2 - a\underline{Y}_3)}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}; \quad \underline{I}_2 = a^2 \underline{U}_{12} \frac{\underline{Y}_2(\underline{Y}_3 - a\underline{Y}_1)}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}, \quad (41.22)$$

Deoarece $\underline{I}_3 = -\underline{I}_1 - \underline{I}_2$, pentru ca acești curenți să fie simetrici e necesar și suficient ca $\underline{I}_2 = a^2 \underline{I}_1$, adică

$$\underline{Y}_1(\underline{Y}_2 - a\underline{Y}_3) = \underline{Y}_2(\underline{Y}_3 - a\underline{Y}_1)$$

sau

$$a^2 \underline{Y}_1 \underline{Y}_3 + a \underline{Y}_3 \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 \underline{Y}_3 = 0. \quad (41.23)$$

Introducînd impedanțele cu $\underline{Y}_k = 1/\underline{Z}_k$ ($k = 1, 2, 3$), rezultă condiția :

$$a^2 \underline{Z}_3 + a \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 = 0. \quad (41.24)$$

Această condiție e evident satisfăcută dacă $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3$, deoarece $1 + a + a^2 = 0$. Acesta e cazul banal al sarcinii echilibrate. Dar ea poate fi satisfăcută și cu impedanțe neegale, adică există receptoare dezechilibrate, alimentate cu tensiuni simetrice, care absorb curenți simetrici.

Condiția (41.24) se satisface, de exemplu, cu $\underline{Z}_2 = j \omega L = j \frac{R}{\sqrt{3}}$ (o bobină ideală), $\underline{Z}_3 =$

$= \frac{1}{j \omega C} = -j L \omega = -j \frac{R}{\sqrt{3}}$ (un condensator ideal a cărui capacitate e legată de inductivitatea bobinei prin condiția de rezonanță $1 - \omega^2 LC = 0$) și $Z_1 = R$ (v. fig. 41.8, a). Rezultă :

$$\underline{U}_{NO} = \frac{\underline{U}_{1O} \frac{1}{R} + \underline{U}_{2O} \frac{1}{j \omega L} + \underline{U}_{3O} j \omega C}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j \omega L} + j \omega C} = \underline{U}_{1O} (1 - ja^2 \sqrt{3} + ja \sqrt{3}) = -2 \underline{U}_{1O}.$$

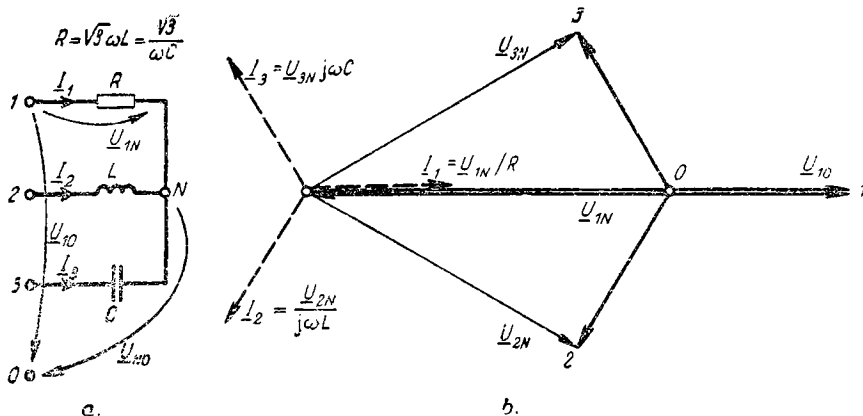


Fig. 41.8

Curenții sînt

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= (\underline{U}_{1O} - \underline{U}_{NO})/R = 3\underline{U}_{1O}/R \\ \underline{I}_2 &= (\underline{U}_{2O} - \underline{U}_{NO})/j \omega L = 3\underline{U}_{2O}/R = a^2 \underline{I}_1 \\ \underline{I}_3 &= (\underline{U}_{3O} - \underline{U}_{NO}) \cdot j \omega C = 3\underline{U}_{3O}/R = a \underline{I}_1 \end{aligned}$$

și formează un sistem trifazat simetric direct ca și tensiunile de fază ale rețelei. De observat că tensiunile de fază ale receptorului $\underline{U}_{1N} = 3\underline{U}_{1O}$, $\underline{U}_{2N} = j\sqrt{3} \underline{U}_{2O}$ și $\underline{U}_{3N} = -j\sqrt{3} \underline{U}_{3O}$ nu sînt simetrice (fig. 41.8, b).

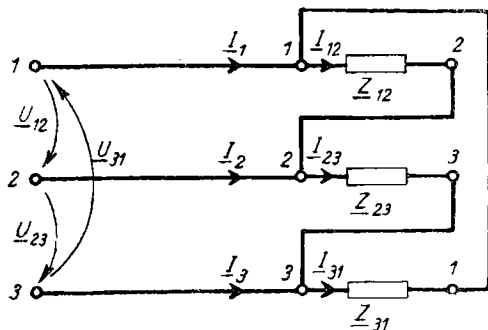


Fig. 41.9

41.4. Receptor dezechilibrat în triunghi (fig. 41.9).

Și în acest caz sînt date tensiunile dintre faze (41.13) ale rețelei de alimentare. În reprezentarea geometrică aceste tensiuni (nesimetrice) trebuie să formeze un triunghi (fig. 41.10), deoarece suma lor e nulă

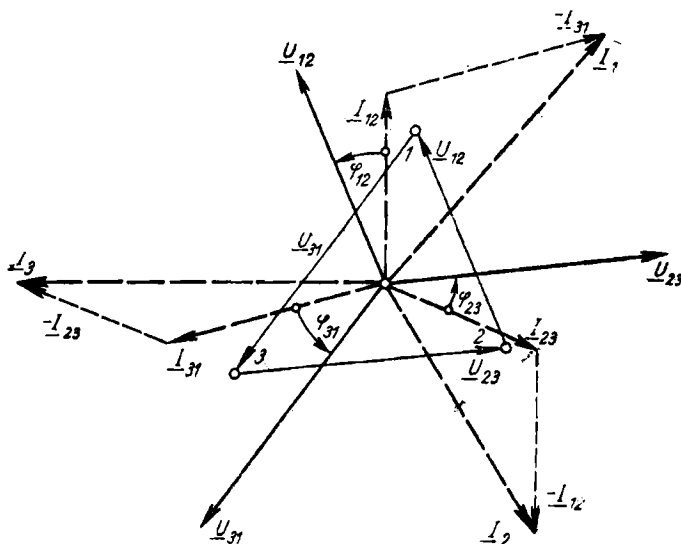


Fig. 41.10

(rel. 41.14). Cum aceste tensiuni se aplică direct laturilor triunghiului, curenții din aceste laturi — care reprezintă fazele receptorului — sînt :

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{Z_{12}}, \quad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{Z_{23}}, \quad \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{Z_{31}}, \quad (41.25)$$

iar curenții de linie sînt (v. și fig. 41.10)

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}, \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}, \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}. \quad (41.26)$$

Aplicație : Considerăm un receptor trifazat în triunghi (fig. 41.11, a) avînd :

$$Z_{12} = Z_{23} = \frac{1}{j \omega C}, \quad Z_{31} = j \omega L = \frac{j}{2 \omega C} \quad (\text{adică, } 2LC \omega^2 - 1 = 0),$$

căruia i se aplică tensiunile simetrice de succesiune directă

$$\underline{U}_{12}, \quad \underline{U}_{23} = a^2 \underline{U}_{12}, \quad \underline{U}_{31} = a \underline{U}_{12}. \quad (41.27)$$

Se obțin curenții :

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= j \omega C \underline{U}_{12} - \frac{1}{j \omega L} a^2 \underline{U}_{12} = -\omega C \sqrt{3} \underline{U}_{12} \\ \underline{I}_2 &= a^2 j \omega C \underline{U}_{12} - j \omega C \underline{U}_{12} = -\omega C \sqrt{3} \underline{U}_{12} e^{j \frac{2\pi}{3}} = a \underline{I}_1 \\ \underline{I}_3 &= \frac{1}{j \omega L} a \underline{U}_{12} - j \omega C a^2 \underline{U}_{12} = -\omega C \sqrt{3} \underline{U}_{12} e^{j \frac{4\pi}{3}} = a^2 \underline{I}_1. \end{aligned} \quad (41.28)$$

Se observă că în acest caz cei trei curenți formează un sistem simetric, dar de succesiune inversă (v. fig. 41.11, b).

Observații privitoare la receptoarele dezechilibrate

a) Dacă impedanțele echivalente serie ale liniei de alimentare a unui receptor în triunghi nu sînt neglijabile, trebuie să se ia în considerare căderile de tensiune pe linie. În acest scop, recep-

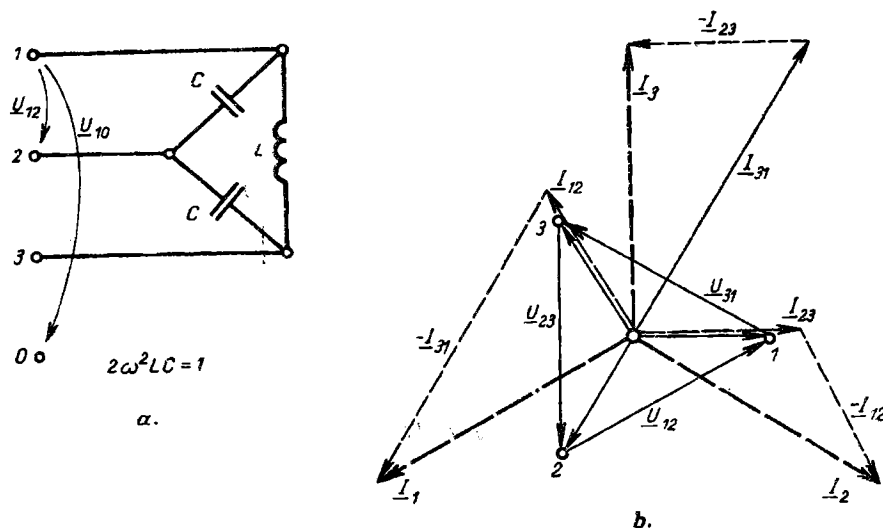


Fig. 41.11

torul în triunghi (fig. 41.12, a) trebuie transformat într-un receptor în stea (fig. 41.12, b), pentru a putea calcula impedanțe echivalente pe fiecare fază, prin însumarea celor două impedanțe în serie: a liniei și a receptorului echivalent. Se obține un receptor dezechilibrat în stea, care se studiază cu teorema potențialului punctului neutru.

b) Dacă există impedanțe mutuale între laturile receptorului, metodele prezentate în acest capitol nu sînt, în general, aplicabile și trebuie să se utilizeze teoremele lui Kirchhoff.

c) Dacă un generator alimentează mai multe receptoare dezechilibrate în stea, cu neutrele izolate, potențialele acestor neutre nu coincid și stelele nu pot fi conectate cu laturile omologe în paralel. În acest caz se pot transfigura stelele în triunghiuri, laturile omologe ale tuturor acestor triunghiuri fiind în paralel, ceea ce permite să se găsească un receptor echivalent în triunghi pentru întreaga rețea.

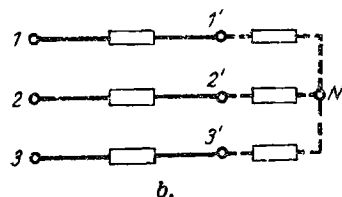
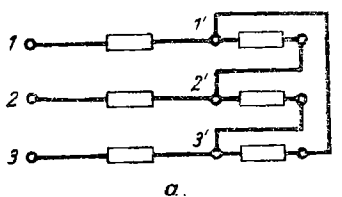


Fig. 41.12

41.5. Puteri în rețele trifazate dezechilibrate

41.5.1. Rețele trifazate cu fir neutru. În cazul sistemelor de transmisiune trifazate cu fir neutru, zise „cu patru fire” (v. fig. 41.13), puterea complexă (37.22) este:

$$S_b = \underline{V}_1 \underline{I}_1^* + \underline{V}_2 \underline{I}_2^* + \underline{V}_3 \underline{I}_3^* + \underline{V}_0 (-\underline{I}_N^*) \quad (41.29)$$

și, cum

$$\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3, \text{ iar } \underline{V}_k - \underline{V}_O = \underline{U}_{kO} \ (k = 1, 2, 3),$$

se obține expresia :

$$\underline{S}_b = \underline{U}_{1O} \underline{I}_1^* + \underline{U}_{2O} \underline{I}_2^* + \underline{U}_{3O} \underline{I}_3^*. \quad (41.30)$$

Puterea activă e partea reală a acestei expresii,

$$P_b = U_{1O} I_1 \cos (\widehat{\underline{U}_{1O} \underline{I}_1}) + U_{2O} I_2 \cos (\widehat{\underline{U}_{2O} \underline{I}_2}) + U_{3O} I_3 \cos (\widehat{\underline{U}_{3O} \underline{I}_3}), \quad (41.31)$$

iar puterea reactivă e partea imaginară a acestei expresii,

$$Q_b = U_{1O} I_1 \sin (\widehat{\underline{U}_{1O} \underline{I}_1}) + U_{2O} I_2 \sin (\widehat{\underline{U}_{2O} \underline{I}_2}) + U_{3O} I_3 \sin (\widehat{\underline{U}_{3O} \underline{I}_3}). \quad (41.32)$$

În relațiile (41.30), (41.31), (41.32) numai sumele au o semnificație determinată : puterea primită pe la borne de receptorul considerat. În cazul general, fiecare termen în parte al acestor sume nu este localizabil, în sensul că nu se poate asocia unei anumite faze. Unii dintre termenii puterii active, de exemplu, pot fi negativi, întreaga putere fiind pozitivă așa cum e necesar, dacă receptorul e pasiv. Expresia (41.32) a puterii active corespunde măsurării acestei puteri cu trei wattmetri (fig. 41.13).

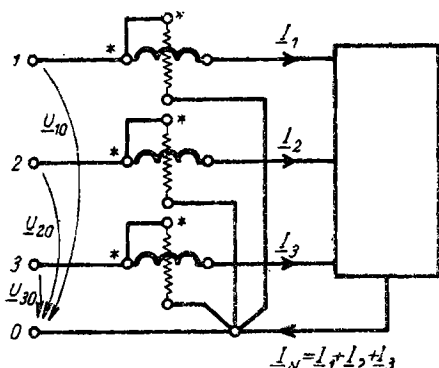


Fig. 41.13

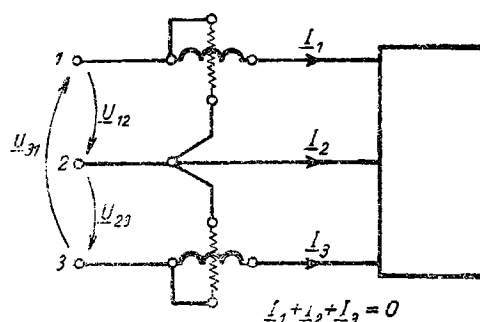


Fig. 41.14

41.5.2. Rețele trifazate fără fir neutru. În cazul sistemelor de transmisiune fără fir neutru, zise „cu trei fire” (fig. 41.14), puterea complexă este :

$$\underline{S}_b = \underline{V}_1 \underline{I}_1^* + \underline{V}_2 \underline{I}_2^* + \underline{V}_3 \underline{I}_3^*, \quad (41.33)$$

cu punct de referință arbitrar pentru potențiale. În montajul de măsurare a puterii active cu trei wattmetri, punctul comun al bobinelor lor de tensiune

poate fi legat oriunde în rețea sau poate fi lăsat liber. Dacă se alege una dintre faze, de exemplu faza 2, ca referință, se obțin expresiile :

$$S_b = \underline{U}_{12} \underline{I}_1^* + \underline{U}_{32} \underline{I}_3^* = \underline{U}_{12} \underline{I}_1^* - \underline{U}_{23} \underline{I}_3^* \quad (41.34)$$

$$P_b = U_{12} I_1 \cos(\widehat{U_{12}, I_1}) + U_{32} I_3 \cos(\widehat{U_{32}, I_3}) \quad (41.35)$$

$$Q_b = U_{12} I_1 \sin(\widehat{U_{12}, I_1}) + U_{32} I_3 \sin(\widehat{U_{32}, I_3}). \quad (41.36)$$

Expresia (41.35) a puterii active corespunde măsurării acestei puteri cu doi wattmetri (fig. 41.14).

42. || METODA COMPONENTELOR SIMETRICE

Calculul regimurilor trifazate nesimetrice¹ prezintă importanță practică în construcția și exploatarea sistemelor electroenergetice. Dimensionarea și protejarea rețelelor electrice trifazate necesită calculul unor regimuri de avarie nesimetrice (scurtcircuite între o fază și pământ, scurtcircuite între două faze și pământ, întreruperea unei faze etc.). Regimuri nesimetrice se creează uneori și în mod intenționat, de exemplu pentru pornirea sau reglarea turației la motoarele asincrone trifazate.

Studiul acestor regimuri nesimetrice într-o rețea cu un număr mare de linii, transformatoare electrice, generatoare și motoare electrice trifazate conduce la necesitatea rezolvării unui sistem de ecuații cu un număr mare de necunoscute. Rezolvarea unui astfel de sistem este îngreuiată considerabil de faptul că în prezența cuplajelor magnetice, mai ales între elementele mobile ale mașinilor electrice, relațiile dintre tensiuni și intensitățile curenților sînt complicate.

Pentru a simplifica aceste ecuații și schemele electrice echivalente corespunzătoare, electrotehnicienii au elaborat metode de calcul bazate pe utilizarea unor noi necunoscute, auxiliare. Aceste mărimi necunoscute auxiliare sînt numite componente (ale tensiunilor, curenților etc.). Prin trecerea la noile necunoscute, sistemul de ecuații se simplifică. Schemele electrice echivalente corespunzătoare se simplifică și ele. Cele mai răspîndite metode pentru calculul regimurilor trifazate nesimetrice ale unor circuite liniare sînt cele care utilizează ca mărimi de calcul auxiliare „componentele simetrice“, „componentele α , β , O “ sau „componentele d , q , O “. În cele care urmează se expune *metoda componentelor simetrice*, care este cea mai răspîndită.

¹ În acest curs, termenii *simetric* și *nesimetric* se referă exclusiv la sistemele trifazate de mărimi sinusoidale (tensiuni, curenți etc.), respectiv la regimurile caracterizate prin aceste mărimi; iar termenii *echilibrat* și *dezechilibrat* se referă exclusiv la elementele trifazate de rețea : receptoare, generatoare, linii etc. (adică la sistemele de impedanțe).

Metoda componentelor simetrice se bazează pe descompunerea sistemelor de mărimi trifazate nesimetrice (tensiuni electromotoare etc.) în trei sisteme componente trifazate simetrice și pe principiul suprapunerii efectelor (ea se poate aplica deci numai circuitelor liniare sau practice liniare). Astfel, calculul unui regim trifazat nesimetric se reduce, pentru circuite echilibrate sau porțiuni echilibrate de circuit, la calculul a trei regimuri simetrice (corespunzătoare câte unuiia dintre cele trei sisteme simetrice componente). Calculul regimurilor simetrice fiind mai simplu decât calculul regimurilor nesimetrice, metoda e avantajoasă atunci când numărul de elemente dezechilibrate e mic față de numărul de elemente echilibrate.

Când circuitul studiat conține mașini electrice, metoda componentelor simetrice e singura practic utilizabilă, deoarece ecuațiile și schemele electrice echivalente ale mașinilor se exprimă mult mai simplu pentru componentele simetrice decât pentru sistemele nesimetrice de curenți și tensiuni. În particular, un generator electric trifazat, echilibrat, admite o schemă echivalentă (de ex. în stea) cu trei generatoare monofazate, cu impedanțe interne egale, necuplate inductiv între ele numai pentru curenți de fază simetrici (v. Observația b de la par. 42.1.4, b).

42.1. Descompunerea unui sistem trifazat de mărimi în trei sisteme componente trifazate simetrice

42.1.1. Teorema lui Fortescue. La baza metodei componentelor simetrice stă ideea descompunerii unui sistem trifazat, ordonat de mărimi sinusoidale (nesimetric) în trei sisteme de mărimi sinusoidale trifazate simetrice, adică avînd amplitudini egale și defazaje relative egale, de valoare $+\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{2\pi}{3}$ sau 0.

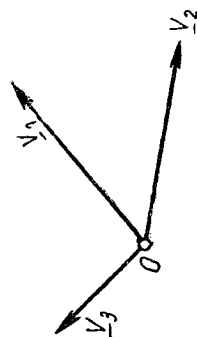
Cele trei sisteme se numesc: sistemul de succesiune directă sau *sistemul direct* (în care fiecare dintre mărimi e defazată înaintea celei care îi succede cu $\frac{2\pi}{3}$), introdus în paragraful 39.1; sistemul de succesiune inversă sau *sistemul invers* (în care fiecare dintre mărimi e defazată în urma celei care îi succede cu $\frac{2\pi}{3}$), introdus, de asemenea, în paragraful 39.1; *sistemul omopolar*, care e un sistem ordonat de mărimi sinusoidale, cu amplitudini egale și în fază.

În figura 42.1 e prezentată simbolic această descompunere, fiecare în reprezentare geometrică, sistemul oarecare nesimetric (a) are fiecare fazor egal cu suma fazorilor corespunzători ai unui sistem omopolar (b), direct (c), și invers (d).

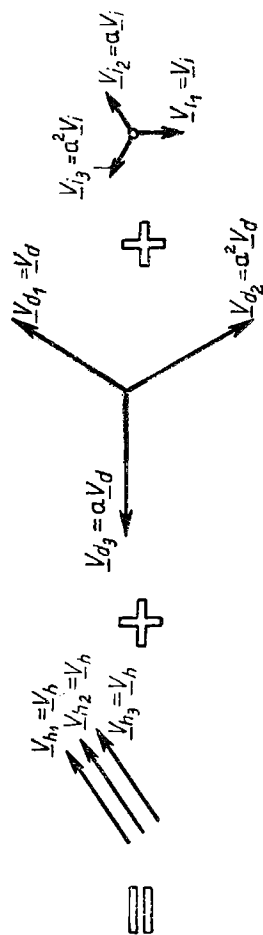
Descompunerea unui sistem ordonat trifazat nesimetric ($\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$) în sistemele sale componente simetrice este definită în complex de următoarele relații între mărimile acestor sisteme:

$$\begin{aligned}\underline{V}_1 &= \underline{V}_{b1} + \underline{V}_{d1} + \underline{V}_{i1}^1 \\ \underline{V}_2 &= \underline{V}_{b2} + \underline{V}_{d2} + \underline{V}_{i2} \\ \underline{V}_3 &= \underline{V}_{b3} + \underline{V}_{d3} + \underline{V}_{i3}\end{aligned}\tag{42.1}$$

¹ Indicele *h* pentru „omopolar“ provine de la grafia originară „homopolar“.



a.



b.

d.

c.

Fig. 42.1

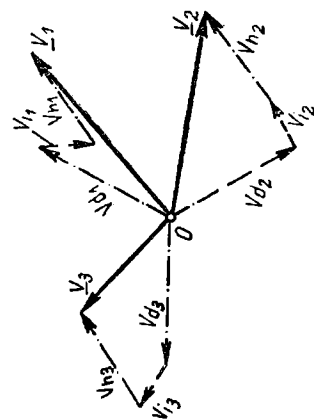


Fig. 42.2

Posibilitatea obținerii unui sistem de mărimi trifazat nesimetric prin compunerea a trei sisteme componente simetrice este ilustrată în figura 42.2, în care se prezintă operațiile grafice corespunzătoare relațiilor (42.1).

Cele trei mărimi ale fiecăruia dintre sistemele componente simetrice se pot exprima simplu, cu ajutorul operatorului $a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$, în funcție de mărimea corespunzătoare fazei 1 a sistemului respectiv, numită mărime fundamentală a sistemului :

$$\underline{V}_{b1} = \underline{V}_b; \quad \underline{V}_{b2} = \underline{V}_b; \quad \underline{V}_{b3} = \underline{V}_b \quad (42.2)$$

$$\underline{V}_{d1} = \underline{V}_d; \quad \underline{V}_{d2} = a^2 \underline{V}_d; \quad \underline{V}_{d3} = a \underline{V}_d \quad (42.3)$$

$$\underline{V}_{i1} = \underline{V}_i; \quad \underline{V}_{i2} = a \underline{V}_i; \quad \underline{V}_{i3} = a^2 \underline{V}_i. \quad (42.4)$$

Mărimile fundamentale $\underline{V}_b$, $\underline{V}_d$, $\underline{V}_i$ se numesc respectiv componenta omopolară, componenta directă și componenta inversă a sistemului de mărimi trifazat nesimetric dat ($\underline{V}_1$, $\underline{V}_2$, $\underline{V}_3$).

Descompunerea unui sistem de mărimi trifazat în trei sisteme componente simetrice (42.1) se exprimă cu ajutorul componentelor simetrice sub forma :

$$\begin{aligned} \underline{V}_1 &= \underline{V}_b + \underline{V}_d + \underline{V}_i \\ \underline{V}_2 &= \underline{V}_b + a^2 \underline{V}_d + a \underline{V}_i \\ \underline{V}_3 &= \underline{V}_b + a \underline{V}_d + a^2 \underline{V}_i. \end{aligned} \quad (42.5)$$

Deoarece determinantul sistemului de ecuații (42.5) este

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix} = 3 \sqrt{3} j,$$

diferit de zero, rezultă că se poate determina întotdeauna un sistem, și numai unul, de valori $\underline{V}_b$, $\underline{V}_d$, $\underline{V}_i$, care să satisfacă aceste ecuații.

Ca urmare, descompunerea oricărui sistem trifazat ordonat de mărimi sinusoidale în trei sisteme componente simetrice, unul omopolar, unul direct și unul invers, este unică și totdeauna posibilă (Teorema lui Fortescue, 1918).

42.1.2. Calculul componentelor simetrice. Calculul componentelor simetrice, corespunzătoare unui sistem dat de mărimi trifazat nesimetric, se face pe baza relațiilor (42.6). Aceste relații :

$$\begin{aligned} \underline{V}_b &= \frac{1}{3} (\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3) \\ \underline{V}_d &= \frac{1}{3} (\underline{V}_1 + a \underline{V}_2 + a^2 \underline{V}_3) \\ \underline{V}_i &= \frac{1}{3} (\underline{V}_1 + a^2 \underline{V}_2 + a \underline{V}_3) \end{aligned} \quad (42.6)$$

se obțin prin rezolvarea sistemului de ecuații (42.5) în raport cu $\underline{V}_b$, $\underline{V}_d$ și $\underline{V}_i$. Prima din ecuațiile (42.6) se obține adunând cele trei ecuații (42.5) și observând că $a^2 + a + 1 = 0$. A doua ecuație (42.6) se obține înmulțind a doua și a

treia ecuație din (42.5) cu $\underline{a}$, respectiv $\underline{a}^2$, și apoi adunând ecuațiile astfel obținute. A treia ecuație se obține analog.

Aplicații : Să se determine componentele simetrice ale sistemului de mărimi cu imaginile complexe :

$$\underline{V}_1 = V, \quad \underline{V}_2 = 0, \quad \underline{V}_3 = 0. \quad (42.7)$$

Aplicând relațiile (42.6), se obține :

$$\underline{V}_b = \underline{V}_d = \underline{V}_i = \frac{V}{3}. \quad (42.8)$$

Acest caz corespunde, în particular, sistemului de curenți dintr-o linie care are fazele 2 și 3 întrerupte. Se recomandă ca exercițiu să se determine componentele simetrice ale curenților dintr-o linie la care se întrerup fazele 1 și 2.

2. Să se calculeze componentele simetrice ale sistemului de tensiuni electrice cu valorile instantanee :

$$\begin{aligned} u_1 &= 10 \sqrt{2} \sin 2\pi \cdot 50 t \text{ V} \\ u_2 &= u_3 = 10 \sqrt{2} \sin \left(2\pi \cdot 50 t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ V.} \end{aligned}$$

Reprezentarea în complex a acestor tensiuni este :

$$\underline{V}_1 = 10 \text{ V}, \quad \underline{V}_2 = \underline{V}_3 = j 10 \text{ V.}$$

Valorile complexe ale componentelor simetrice se calculează cu ajutorul relațiilor (42.6) :

$$\begin{aligned} \underline{V}_b &= \frac{1}{3} (10 + j 10 + j 10) = \frac{10}{3} (1 + j 2) \text{ V} \\ \underline{V}_d &= \frac{1}{3} (10 + a \cdot j 10 + a^2 \cdot j 10) = \frac{10}{3} (1 - j) \text{ V} \\ \underline{V}_i &= \frac{1}{3} (10 + a^2 \cdot j 10 + a \cdot j 10) = \frac{10}{3} (1 - j) \text{ V.} \end{aligned}$$

Valorile instantanee ale componentelor simetrice ale tensiunilor sînt :

$$\begin{aligned} u_b &= \frac{10}{3} \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \sin (2\pi \cdot 50 t + \arctg 2) \text{ V} \\ u_d &= u_i = \frac{10}{3} \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \sin \left(2\pi \cdot 50 t - \frac{\pi}{4} \right) \text{ V.} \end{aligned}$$

Valorile instantanee ale tuturor mărimilor sistemelor componente simetrice se obțin simplu, pe baza definiției acestor sisteme. De exemplu, sistemul de componente simetrice de succesiune directă este format din următoarele mărimi :

$$\begin{aligned} u_{d1} &= \frac{10}{3} \sqrt{2} \sqrt{2} \sin \left(2\pi \cdot 50 t - \frac{\pi}{4} \right) \text{ V} \\ u_{d2} &= \frac{10}{3} \sqrt{2} \sqrt{2} \sin \left(2\pi \cdot 50 t - \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} \right) \text{ V} \\ u_{d3} &= \frac{10}{3} \sqrt{2} \sqrt{2} \sin \left(2\pi \cdot 50 t - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} \right) \text{ V.} \end{aligned}$$

42.1.3. **Determinarea grafică a componentelor simetrice.** Fazorii componentelor simetrice se pot determina simplu și intuitiv prin realizarea grafică a operațiilor de însumare și rotire corespunzătoare relațiilor (42.6) sau a unor operații echivalente cu acestea.

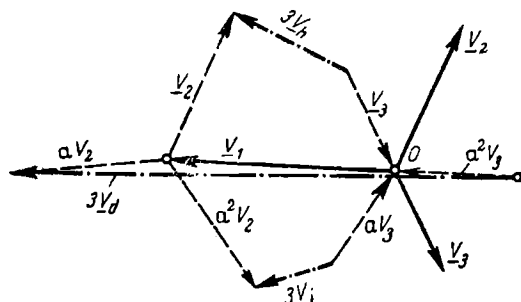


Fig. 42.3

În figura 42.3 se indică obținerea fazorilor $3\underline{V}_0$, $3\underline{V}_d$ și $3\underline{V}_i$, pe baza unor operații care corespund respectiv cu prima, a doua și a treia ecuație din (42.6). S-au elaborat însă și metode grafice simplificate.

1. *Metodă grafică simplificată pentru determinarea componentelor directă și inversă:* Această metodă se bazează pe exprimarea componentelor simetrice directe și inverse

ale unui sistem $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$, în funcție de mărimile diferență:

$$\underline{V}_{12} = \underline{V}_1 - \underline{V}_2, \quad \underline{V}_{23} = \underline{V}_2 - \underline{V}_3. \quad (42.9)$$

Utilizând expresiile lui $\underline{V}_1$ și $\underline{V}_3$ care rezultă din relațiile precedente, a doua și a treia ecuație (42.6) se pot pune sub forma:

$$3\underline{V}_d = (\underline{V}_{12} + \underline{V}_2) + a\underline{V}_2 + a^2(\underline{V}_2 - \underline{V}_{23}) = \underline{V}_{12} + e^{j\frac{\pi}{3}} \underline{V}_{23} \quad (42.10)$$

$$3\underline{V}_i = (\underline{V}_{12} + \underline{V}_2) + a^2\underline{V}_2 + a(\underline{V}_2 - \underline{V}_{23}) = \underline{V}_{12} + e^{-j\frac{\pi}{3}} \underline{V}_{23}$$

(s-a folosit identitatea $1 + a + a^2 = 0$).

Aceste relații arată că suma dintre fazorul diferență $\underline{V}_{12}$ și fazorul $\underline{V}_{23}$, rotit cu $\frac{\pi}{3}$ (în sens trigonometric direct), este egală cu $3\underline{V}_d$. Dacă la același

fazor diferență $\underline{V}_{12}$ se adună fazorul $\underline{V}_{23}$, rotit cu $-\frac{\pi}{3}$ (adică în sens invers), se obține fazorul $3\underline{V}_i$. Construcțiile grafice respective sînt realizate în figura 42.4, a. Observînd că punctele M' și M'' sînt vîrfurile celor două triunghiuri echilaterale, care au segmentul $\overline{23}$ ca bază, construcția se reduce practic (fig. 42.4, b) la trasarea a două arce de cerc necesare determinării acestor vîrfuri și la construirea vectorilor $M'1$, $M''2$, care reprezintă mărimile $3\underline{V}_d$ și $3\underline{V}_i$. Pentru a distinge cei doi vectori, remarcăm că originea vectorului $3\underline{V}_d$ se află în originea vectorului $\underline{V}_{23}$, rotit în jurul extremității sale cu 60° în sens trigonometric.

2. *Metodă grafică simplificată pentru determinarea componentei omopolare:* Utilizînd mărimile diferență, prima ecuație din (42,6) se poate pune sub forma:

$$\underline{V}_b = \frac{1}{3} [(\underline{V}_{12} + \underline{V}_2) + \underline{V}_2 + (\underline{V}_2 - \underline{V}_{23})] = \underline{V}_2 + \frac{1}{3} (\underline{V}_{12} - \underline{V}_{23}). \quad (42.11)$$

Examinînd figura 42.5, se observă că vectorul BG , care reprezintă mărimea $\frac{1}{3} (\underline{V}_{12} - \underline{V}_{23})$, are extremitatea în centrul de greutate G al triunghiului ABC (Deoarece BG reprezintă o treime din diagonala paralelogramului $ABCD$).

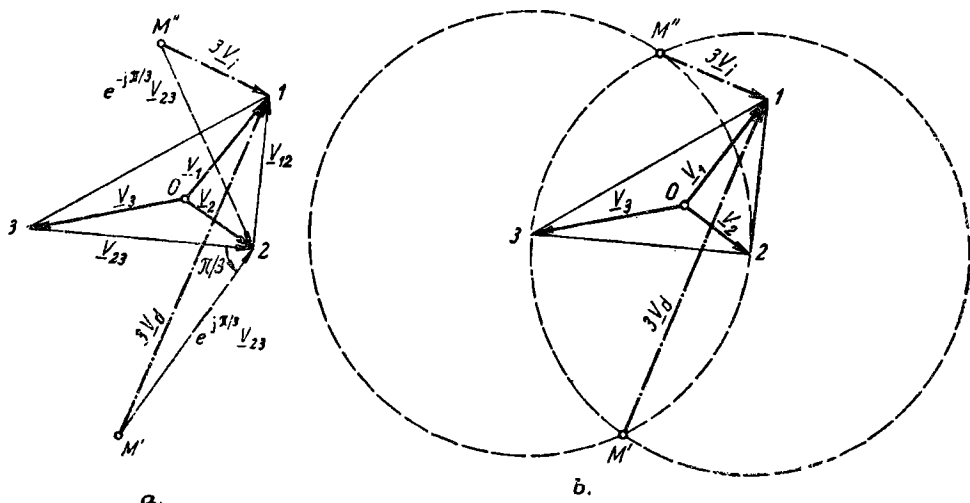


Fig. 42.4

Rezultă că pentru determinarea componentei omopolare $\underline{V}_0$ a unui sistem $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$ este suficient să se unească originea comună a acestor vectori cu centrul de greutate G al triunghiului, avînd ca vîrfuri extremitățile vectorilor dați.

42.1.4. Filtre de componente simetrice. În acest paragraf se vor prezenta cîteva exemple de circuite electrice, la a căror borne de ieșire se obțin componentele simetrice ale sistemului trifazat de mărimi, aplicat la bornele lor de intrare. Astfel de circuite electrice se numesc *filtre de componente simetrice*.

Mai general, acest nume se dă tuturor circuitelor electrice, la ale căror borne de ieșire se obțin mărimi sinusoidale cu valori efective proporționale cu valoarea efectivă a unei componente simetrice (corespunzătoare mărimilor aplicate la bornele de intrare).

Filtrele de componente simetrice se utilizează în numeroase instalații de protecție automată împotriva regimurilor nesimetrice de avarie, precum și în măsurări.

1. Filtre de componente omopolare. Cel mai simplu filtru pentru obținerea componentei omopolare a unui sistem de curenți e format din trei transformatoare de curent, cu înfășurările secundare legate în paralel (de ex. la bornele unui ampermetru) (fig. 42.6, a).

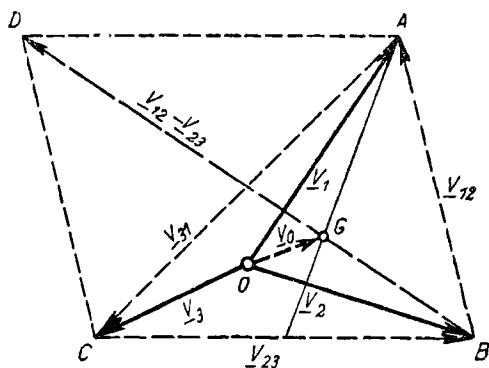


Fig. 42.5

În figura 42.6, *b* se reprezintă un filtru pentru măsurarea componentei omopolare a unui sistem de tensiuni, format din trei transformatoare de tensiune, cu secundarele legate în serie. În aceste scheme, *k* este raportul de transformare al transformatoarelor respective.

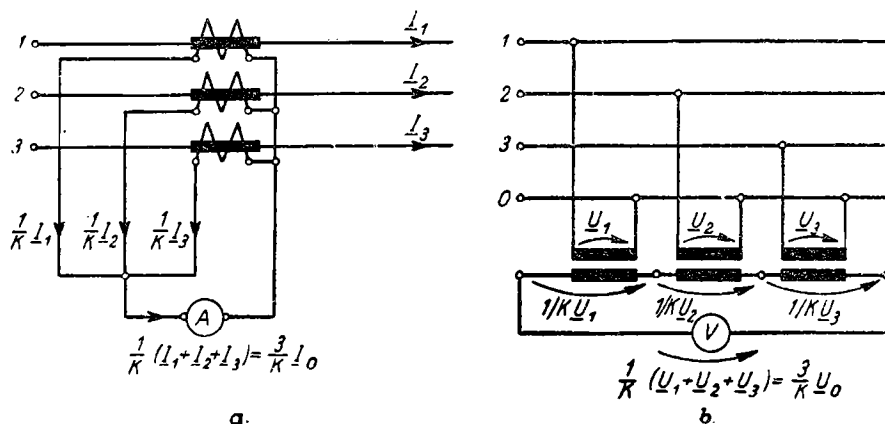


Fig. 42.6

2. Filtru pentru componenta inversă (sau directă) a unui sistem de curenți fără componentă omopolară: În figura 42.7 este reprezentată schema unui filtru care permite determinarea componentei inverse a unui sistem de curenți. Acest filtru funcționează corect numai dacă componenta omopolară a sistemului de curenți e nulă, adică dacă suma intensităților celor trei curenți e nulă $i_1 + i_2 + i_3 = 3 i_b = 0$ (de ex. curenții de linie la un sistem trifazat fără fir neutru). Curentul măsurat de ampermetrul *A* se poate stabili cu teorema lui Thévenin.

Tensiunea în gol între bornele *M* și *N* este egală cu

$$\underline{U}_{MN0} = \underline{Z}_1 I_1 + \underline{Z}_3 I_3.$$

În ipoteza făcută ($I_b = 0$), exprimând curenții în funcție de componentele lor simetrice, conform relațiilor (42.5), se obține:

$$\underline{U}_{MN0} = \underline{Z}_1 (\underline{I}_d + \underline{I}_i) + \underline{Z}_3 (a \underline{I}_d + a^2 \underline{I}_i) = (\underline{Z}_1 + a \underline{Z}_3) \underline{I}_d + (\underline{Z}_1 + a^2 \underline{Z}_3) \underline{I}_i.$$

Dacă impedanțele sînt astfel alese încît să satisfacă relația:

$$\underline{Z}_1 + a \underline{Z}_3 = 0, \quad (42.12)$$

circuitul funcționează ca filtru, care dă o tensiune $\underline{U}_{MN0}$, proporțională cu componenta inversă $\underline{I}_i$. Conform teoremei lui Thévenin, intensitatea curentului $\underline{I}_A$ din ampermetrul conectat între bornele *MN* va fi proporțională cu $\underline{U}_{MN0}$, și deci cu componenta inversă $\underline{I}_i$.

Practic, un astfel de filtru se poate realiza, de exemplu, luînd un rezistor ca element de impedanță $\underline{Z}_1 = r$ și ca element de impedanță $\underline{Z}_3 = \frac{1}{2} r + j \frac{\sqrt{3}}{2} r$, un rezistor de rezistență $\frac{r}{2}$ legat în serie cu o bobină de reactanță $X = \frac{\sqrt{3}}{2} r$.

Dacă se asigură satisfacerea egalității $\underline{Z}_1 + a^2 \underline{Z}_3 = 0$, tensiunea de mers în gol $\underline{U}_{MN0}$, și deci curentul $\underline{I}_A$, sînt proporționale cu componenta directă $\underline{I}_d$. Același rezultat se obține cu filtrul din figura 42.7, dacă se intervertesc fazele 2 și 3 (v. observația de la sfîrșitul acestui paragraf).

3. *Filtru pentru componenta directă (inversă) a unui sistem de tensiuni de linie*: Determinarea componentei inverse a unui sistem de tensiuni de linie se realizează adesea cu filtrul cu patru elemente, reprezentat în figura 42.8.

Tensiunea în gol între punctele M și N are expresia :

$$\underline{U}_{MN0} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{Z}_2 + \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} \underline{Z}_3.$$

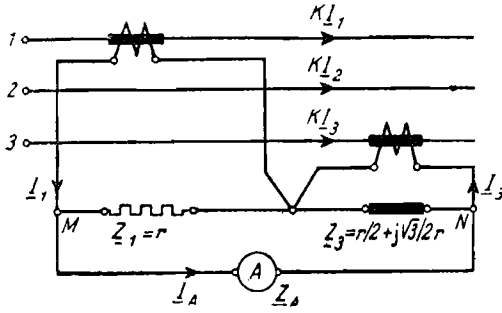


Fig. 42.7

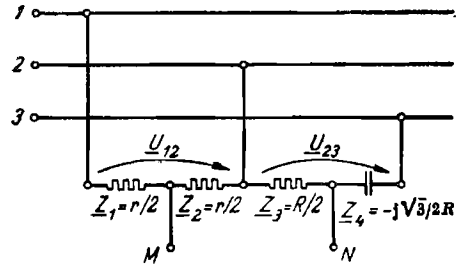


Fig. 42.8

Suma tensiunilor de linie fiind nulă, componenta lor omopolară e nulă și deci :

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_d + \underline{U}_i, \quad \underline{U}_{23} = a^2 \underline{U}_d + a \underline{U}_i.$$

Ca urmare, tensiunea $\underline{U}_{MN0}$ se poate scrie sub forma :

$$\underline{U}_{MN0} = \left(\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + a^2 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} \right) \underline{U}_d + \left(\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + a \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} \right) \underline{U}_i.$$

Dacă cele patru impedanțe satisfac condiția :

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + a \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} = 0 \quad (42.13)$$

(care se verifică ușor pentru schema din fig. 42.8), tensiunea la ieșirea filtrului e proporțională cu $\underline{U}_d$.

În sarcină, conform teoremei lui Thévenin, curentul și tensiunea la ieșirea filtrului vor fi proporționali cu $\underline{U}_d$.

Observație: Din relația (42.6) rezultă că componenta directă $\underline{V}_d$ a sistemului trifazat ($\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$),

$$\underline{V}_d = \frac{1}{3} (\underline{V}_1 + a \underline{V}_2 + a^2 \underline{V}_3),$$

e egală cu componenta inversă $\underline{V}_i$ a sistemului ($\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$),

$$\underline{V}_i = \frac{1}{3} (\underline{V}_1 + a^2 \underline{V}_2 + a \underline{V}_3).$$

Ca urmare, orice filtru care servește la măsurarea componentelor directe permite și măsurarea componentelor inverse : pentru aceasta e suficient să se inverseze, la intrarea filtrului, fazele 2 cu 3.

42.1.5. *Cîteva proprietăți ale componentelor simetrice ale tensiunilor și curenților.* a) Prima ecuație din (42.6) arată că sistemele de mărimi trifazate, a căror sumă este zero, au o componentă omopolară egală cu zero.

Din aceasta rezultă, în particular, că :

— sistemele de curenți din elemente de circuit trifazate cu conexiunea în stea cu punct neutru izolat (fără conductor neutru sau punere la pământ) au o componentă omopolară nulă;

— sistemele de tensiuni de linie au componentă omopolară nulă.

b) În cele ce urmează, pentru a stabili unele proprietăți ale componentelor simetrice ale tensiunilor și curenților, vom calcula componentele simetrice directe și inverse V_{ld} , V_{li} ale unui sistem de mărimi diferențe de forma :

$$\underline{V}_{12} = \underline{V}_1 - \underline{V}_2, \quad \underline{V}_{23} = \underline{V}_2 - \underline{V}_3, \quad \underline{V}_{31} = \underline{V}_3 - \underline{V}_1, \quad (42.14)$$

în funcție de componentele simetrice $\underline{V}_d$, $\underline{V}_i$ ale sistemului de mărimi $\underline{V}_1$, $\underline{V}_2$, $\underline{V}_3$.

Cu ajutorul relației (42.6) se obține :

$$\underline{V}_{ld} = \frac{1}{3} [(\underline{V}_1 - \underline{V}_2) + a(\underline{V}_2 - \underline{V}_3) + a^2(\underline{V}_3 - \underline{V}_1)]$$

$$\underline{V}_{li} = \frac{1}{3} [(\underline{V}_1 - \underline{V}_2) + a^2(\underline{V}_2 - \underline{V}_3) + a(\underline{V}_3 - \underline{V}_1)].$$

Exprimând mărimile $\underline{V}_1$, $\underline{V}_2$, $\underline{V}_3$, în funcție de componentele lor simetrice, relațiile (42.5), se obține :

$$\underline{V}_{ld} = (1 - a^2) \underline{V}_d = \sqrt{3} e^{j\frac{\pi}{6}} \underline{V}_d$$

$$\underline{V}_{li} = (1 - a) \underline{V}_i = \sqrt{3} e^{-j\frac{\pi}{6}} \underline{V}_i. \quad (42.15)$$

Relațiile precedente se pot pune sub forma :

$$\underline{V}_d = \frac{1}{\sqrt{3}} \underline{V}_{ld} e^{-j\frac{\pi}{6}} \quad \underline{V}_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \underline{V}_{li} e^{j\frac{\pi}{6}} \quad (42.16)$$

Aceste ultime relații exprimă, în particular, relațiile dintre componentele simetrice directe și inverse ale tensiunilor de fază și de linie la un circuit trifazat cu conexiunea în stea.

Pentru valorile efective ale acestor mărimi rezultă :

$$U_d = \frac{U_{ld}}{\sqrt{3}}, \quad U_i = \frac{U_{li}}{\sqrt{3}}. \quad (42.17)$$

Ca urmare :

Toate circuitele trifazate conectate în stea la un același sistem de tensiune de linie au aceleași componente simetrice directe și inverse de tensiune, oricare ar fi punctul neutru la care se raportează.

c) Aceeași relație (42.15) se utilizează la calcularea componentelor simetrice directe și inverse ale curenților de linie, în funcție de curenții de fază la un circuit cu conexiunea în triunghi.

Pentru valorile efective ale acestor mărimi rezultă :

$$I_{ld} = \sqrt{3} I_d, \quad I_{li} = \sqrt{3} I_i. \quad (42.18)$$

d) Nesimetria sistemelor trifazate de mărimi se apreciază prin :

— *gradul de disimetrie* definit ca raportul dintre valoarea efectivă a componentei inverse și valoarea efectivă a componentei directe a sistemului de mărimi :

$$\varepsilon_i = \frac{V_i}{V_d} \quad (42.19)$$

— *gradul de asimetrie* definit ca raportul dintre valoarea efectivă a componentei omopolare și valoarea efectivă a componentei directe a sistemului de mărimi :

$$\varepsilon_h = \frac{V_h}{V_d} \quad (42.20)$$

În practică, un sistem de curenți sau de tensiuni este considerat simetric, dacă are atît gradul de disimetrie cît și gradul de asimetrie mai mici decît 0,05.

42.2. Circuite trifazate echilibrate alimentate cu tensiuni nesimetrice

Dacă unui circuit trifazat echilibrat i se aplică un sistem de tensiuni trifazat simetric, atunci (v. par. 40) sistemul de curenți din circuit va fi și el simetric și va avea aceeași succesiune a fazelor ca și echilibrat de tensiuni. Este adevărată și afirmația inversă : într-un circuit echilibrat, un sistem de curenți simetric de o succesiune oarecare determină un sistem de tensiuni simetric și cu o aceeași succesiune ca și sistemul de curenți.

Calculul regimurilor nesimetrice al circuitelor liniare trifazate echilibrate se face pe baza teoremei superpoziției. Se studiază separat fiecare din regimurile corespunzătoare cîte unuia din sistemele componente simetrice ale tensiunilor, și apoi se suprapun efectele acestor sisteme de tensiuni.

Rezultă că în orice circuit echilibrat sistemele componente simetrice de succesiuni diferite sînt independente între ele.

Suprapunerea lor corespunde compunerii componentelor simetrice conform relațiilor (42.5).

Este important de remarcat că, datorită caracterului echilibrat al circuitelor studiate, este suficient să se considere cîte o singură fază (și conductorul neutru). Aceasta permite, după cum se va vedea mai jos, utilizarea unor scheme echivalente simple corespunzătoare relațiilor existente între componentele simetrice de o aceeași succesiune.

42.2.1. Circuit trifazat echilibrat în stea fără cuplaje magnetice. Considerăm un circuit trifazat echilibrat, format din trei elemente de impedanță $\underline{Z}$ legate în stea. Impedanța firului neutru o notăm cu $\underline{Z}_N$ (fig. 42.9, a).

Descompunînd sistemul de tensiuni în trei sisteme componente trifazate simetrice, aplicarea teoremei superpoziției conduce la studierea regimurilor simetrice (par. 40.1) corespunzătoare schemelor (b), (c), (d). Pentru aceste trei scheme, tensiunea fazei 1 a rețelei de alimentare $\underline{V}_{10}$ se exprimă, respectiv, prin relațiile :

$$\underline{U}_d = \underline{Z} \underline{I}_d, \quad \underline{U}_i = \underline{Z} \underline{I}_i, \quad \underline{U}_0 = (\underline{Z} + 3\underline{Z}_N) \underline{I}_h. \quad (42.21)$$

Aceste trei relații le corespund, respectiv, schemele (rețele), echivalente monofazate (a), (b), (c), reprezentate în figura 42.10. Aceste scheme redau simplu și intuitiv relațiile dintre componentele simetrice de aceeași succesiune ale

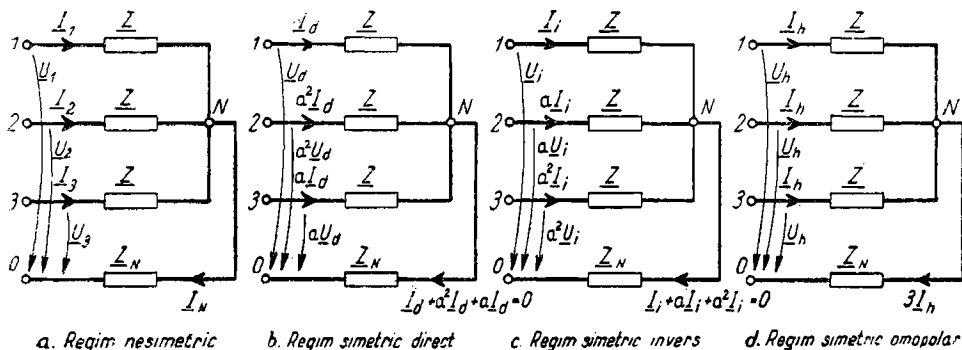


Fig. 42.9

curenților și tensiunilor; ele se numesc schema de succesiune directă, schema de succesiune inversă și schema de succesiune omopolară.

Impedanțele corespunzătoare sistemelor simetrice de curenți de succesiune directă, inversă și omopolară se numesc scurt impedanță directă $\underline{Z}_d$, impedanță inversă $\underline{Z}_i$ și impedanță omopolară $\underline{Z}_h$. Valorile lor sînt :

$$\underline{Z}_d = \underline{Z}, \quad \underline{Z}_i = \underline{Z}, \quad \underline{Z}_h = \underline{Z} + 3\underline{Z}_N. \quad (42.22)$$

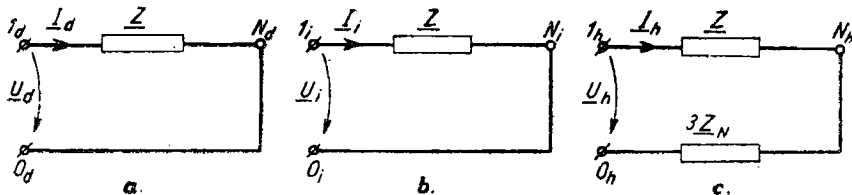


Fig. 42.10

Se remarcă faptul că impedanța firului neutru intervine numai în cea de-a treia ecuație din (42.21). Termenul $3\underline{Z}_N I_h = \underline{Z}_N I_N$ reprezintă căderea de tensiune de pe firul neutru.

Practic, rezolvarea circuitului studiat (fig. 42.9, a) pe baza metodei componentelor simetrice se face în felul următor :

a) se determină componentele simetrice ale tensiunilor aplicate (rel. 42.6);
b) se formează schemele rețelor de succesiune directă, inversă și omopolară;

c) se determină componentele simetrice ale curenților și ale căderilor de tensiune pe baza utilizării acestor scheme;

d) se calculează curenții și căderile de tensiune căutate în funcție de componentele lor simetrice (rel. 42.5).

42.2.2. Circuit trifazat echilibrat cu cuplaje magnetice între faze. Considerăm un element trifazat de circuit, echilibrat, format din trei elemente monofazate, avînd fiecare o rezistență

R , o inductivitate proprie L și o inductivitate mutuală M între faze (fig. 42.11) (conexiunea elementelor monofazate rămâne arbitrară: stea, triunghi etc.). Ne propunem să determinăm schemele de succesiune directă, inversă și omopolară corespunzătoare. În acest scop presupunem că se stabilește succesiv sistemul de curenți direct, invers și omopolar.

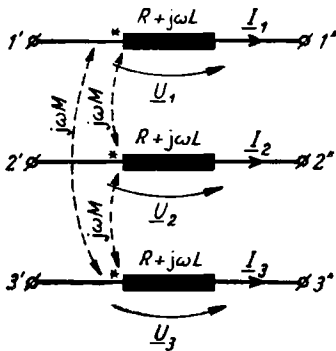


Fig. 42.11

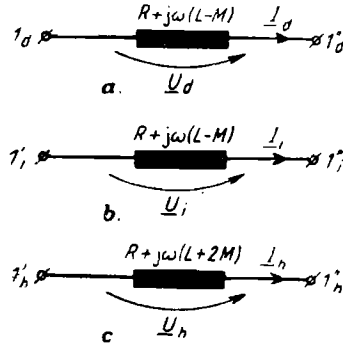


Fig. 42.12

Notînd impedanțele proprii cu $\underline{Z} = r + j\omega L$ și impedanțele mutuale cu $\underline{Z}_m = j\omega M$ expresiile corespunzătoare căderilor de tensiune de pe faza 1 sînt:

$$\begin{aligned}\underline{U}_d &= \underline{Z} \underline{I}_d + \underline{Z}_m a^2 \underline{I}_d + \underline{Z}_m a \underline{I}_d \\ \underline{U}_i &= \underline{Z} \underline{I}_i + \underline{Z}_m a \underline{I}_i + \underline{Z}_m a^2 \underline{I}_i \\ \underline{U}_b &= \underline{Z} \underline{I}_b + \underline{Z}_m \underline{I}_b + \underline{Z}_m \underline{I}_b.\end{aligned}\quad (42.23)$$

Observînd că $a^2 + a = -1$, relațiile de mai sus se pot scrie sub forma:

$$\begin{aligned}\underline{U}_d &= (\underline{Z} - \underline{Z}_m) \underline{I}_d \\ \underline{U}_i &= (\underline{Z} - \underline{Z}_m) \underline{I}_i \\ \underline{U}_b &= (\underline{Z} + 2\underline{Z}_m) \underline{I}_b.\end{aligned}\quad (42.23')$$

Ca urmare, impedanțele corespunzătoare celor trei succesiuni sînt:

$$\underline{Z}_d = \underline{Z}_i = \underline{Z} - \underline{Z}_m, \quad \underline{Z}_b = \underline{Z} + 2\underline{Z}_m. \quad (42.24)$$

Schemele corespunzătoare de succesiune directă, inversă și omopolară sînt reprezentate în figura 42.12.

Observații: a) Datorită existenței impedanțelor simetrice de cuplaj, impedanța omopolară are o valoare diferită de valoarea comună $\underline{Z}_d = \underline{Z}_i$ a impedanțelor directă și inversă.

b) În relațiile (42.23) a intervenit aceeași impedanță de cuplaj $\underline{Z}_m$ atât pentru curenții de succesiune directă (prima relație) cît și pentru curenții de succesiune inversă (a doua relație). Aceasta se datorește faptului că am considerat un circuit static cu inductivități mutuale constante. În cazul circuitelor electrice ale mașinilor electrice rotative — numite *elemente dinamice* — apar, în realitate, inductivități variabile în timp. Pentru regimul sinusoidal, mașina admite scheme echivalente cu inductivități mutuale constante; dar valorile acestora depind de ordinea în care se succed înfășurările fazelor interesate, față de sensul de rotație al rotorului. Ca urmare, căderea de tensiune produsă într-o fază (r , respectiv s) de curenții din altă fază (s , respectiv r) depinde și de sensul mișcării rotorului față de așezarea înfășurărilor celor două faze și rezultă:

$$\underline{U}_r = \underline{Z}_{m_{rs}} \underline{I}_s \quad \text{respectiv} \quad \underline{U}_s = \underline{Z}_{m_{sr}} \underline{I}_r,$$

cu impedanțe de cuplaj neegale:

$$\underline{Z}_{m_{rs}} \neq \underline{Z}_{m_{sr}} \quad (s, r = 1, 2, 3) \quad (42.25)$$

Acest rezultat arată că la astfel de elemente dinamice *teorema reciprocității* (demonstrată numai pentru rețele cu elemente de circuit dipolare) nu mai e valabilă. Sistemul de trei impedanțe echivalente cu cuplaje neregulate ale mașinii admit însă, la curenți simetrici, o schemă echivalentă cu impedanțe egale necuplate. Dar valoarea comună a celor trei impedanțe egale

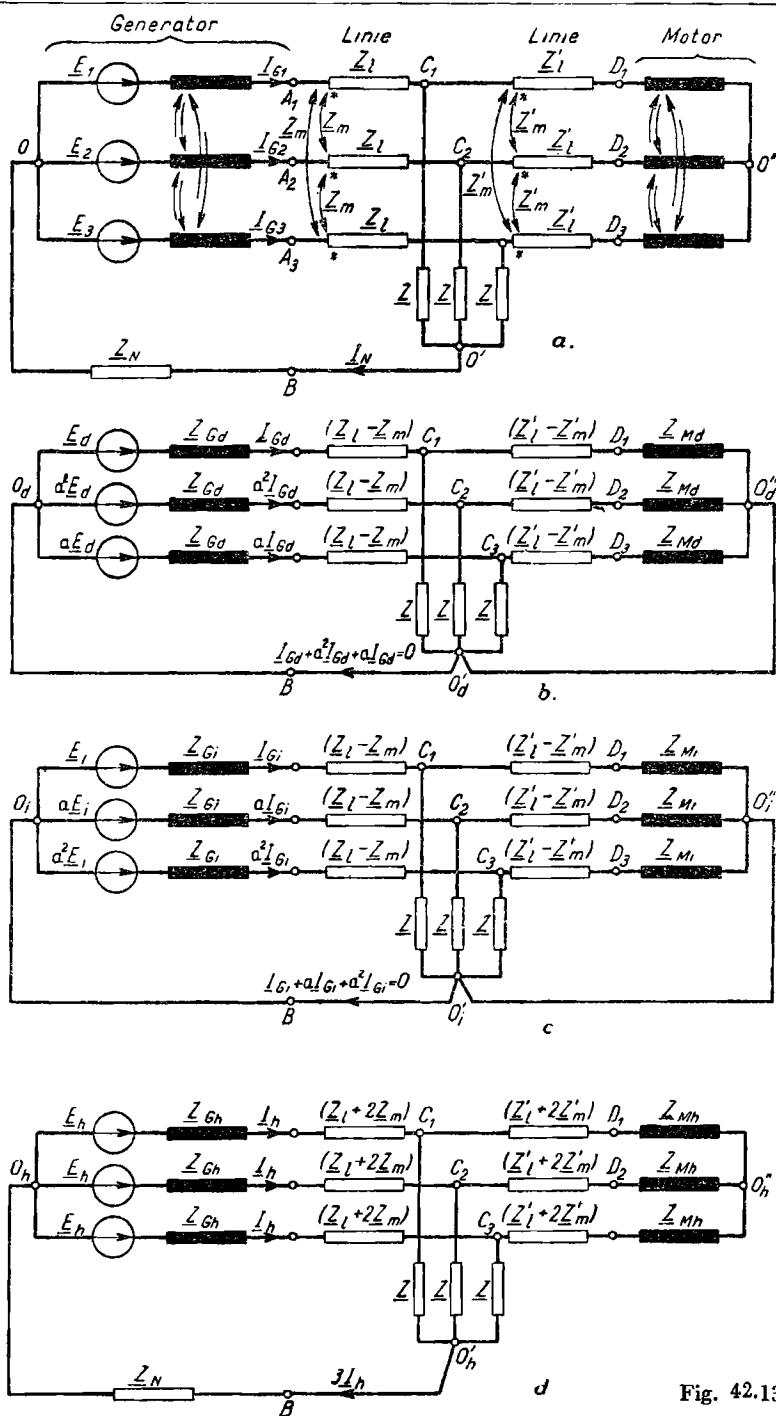


Fig. 42.13.

necuplate depinde de natura sistemului simetric de curenți considerat. De aceea, la mașinile electrice rotative trifazate (generatoare, motoare etc.), în schemele directe, inverse și omopolare apar impedanțe diferite $Z_d \neq Z_i \neq Z_h$. Acest rezultat se explică intuitiv și prin faptul că cele trei sisteme de curenți, direct, invers și omopolar produc cîmpuri magnetice diferite: cîmp învîrtitor, în sensul de rotație al rotorului, cîmp învîrtitor în sens opus rotorului și cîmp alternativ „imobil”.

42.2.3. Formarea schemelor de succesiune directă, inversă și omopolară. În cazul unui circuit complicat trifazat (de ex. fig. 42.13, a), echilibrat, schemele de succesiune directă, inversă și omopolară se pot obține simplu, pornind de la comportarea sistemului în regimurile simetrice de diferite succesiuni (schemele b, c și d).

În regimurile simetrice înlăturăm cuplajele magnetice prin înlocuirea părților de circuit cuplate cu elemente echivalente necuplate, conform celor prezentate în paragraful 42.3.2.

Pentru obținerea unor scheme monofazate pentru calculul componentelor simetrice directe și inverse, observăm că, în rețelele b, respectiv c, unirea tuturor

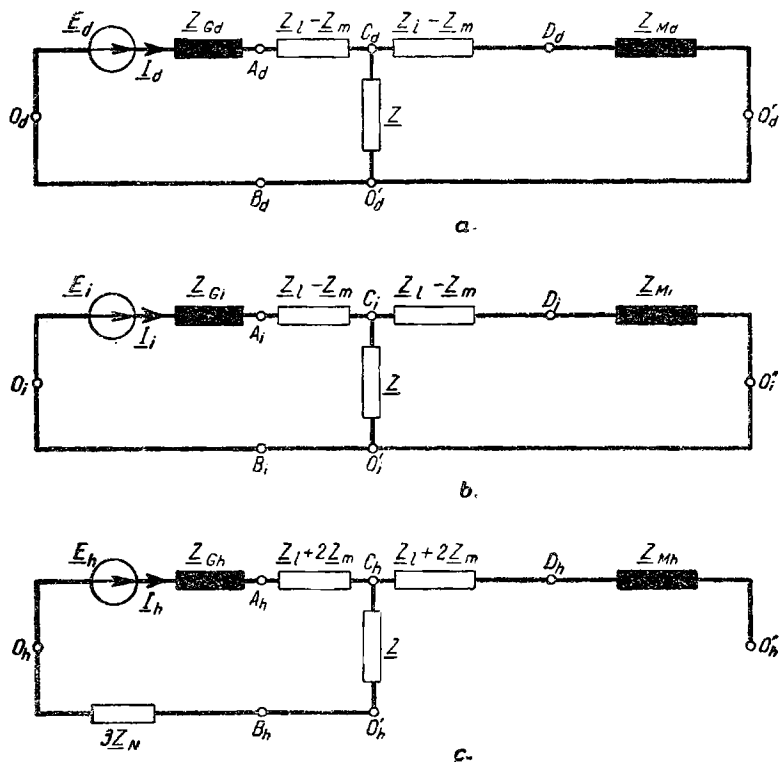


Fig. 42.14.

punctelor neutre printr-un conductor de impedanță nulă și apoi înlăturarea fazelor 2 și 3 nu modifică curenții din elementele fazei 1. Schemele astfel obținute le numim *schema de succesiune directă*, respectiv *schema de succesiune inversă* a rețelei date (fig. 42.14, a, respectiv b).

Pentru obținerea schemei monofazate corespunzătoare componentelor omopolare, observăm că, în rețeaua d (din fig. 42.13), triplarea impedanțelor de pe conductorul neutru și înlăturarea fazelor 2 și 3 nu modifică curenții din faza 1 a acestei rețele. Schema astfel obținută (fig. 42.14, c) o numim *schemă omopolară* a rețelei date.

Posibilitatea utilizării rețelelor directe, inverse și omopolare, formate așa cum s-a indicat mai sus, se poate demonstra și direct, scriind ecuațiile care decurg din aplicarea teoremelor lui Kirchhoff pentru rețelele trifazate, pentru schemele directă, inversă și omopolară (se constată că rezultă aceleași valori pentru componentele simetrice).

42.3. Circuite trifazate dezechilibrate

42.3.1. Reducerea problemei circuitelor trifazate dezechilibrate la problema rezolvării unor circuite echilibrate. Într-un element trifazat de circuit dezechilibrat, un sistem de curenți trifazat simetric produce căderi de tensiune care formează, în general, un sistem nesimetric.

Ca urmare, componentele simetrice de succesiuni diferite nu sînt independente. Relațiile dintre componentele simetrice sînt mult mai complicate decît în cazul elementelor echilibrate.

Din acest motiv, calculul regimurilor nesimetrice într-un circuit conținînd mai multe receptoare dezechilibrate se face, de obicei, echilibrînd circuitul pe baza teoremei compensației (par. 38.2.5), prin înlocuirea impedanțelor care produc nesimetrie prin tensiuni corespunzătoare. Aceste tensiuni apar ca necunoscute auxiliare, ale căror valori se determină astfel încît să fie satisfăcute ecuațiile de funcționare scrise separat, atît pentru partea simetrică de circuit cît și pentru partea nesimetrică de circuit.

42.3.2. Calculul unei rețele echilibrate care alimentează un singur receptor trifazat static nesimetric. Considerăm o rețea echilibrată (R), care alimentează un receptor static dezechilibrat fără cuplaje inductive între faze. În figura 42.15 s-a reprezentat rețeaua echilibrată prin dreptunghiul notat cu (R) și receptorul nesimetric prin impedanțele sale de fază Z_1, Z_2, Z_3 (fără a face vreo supoziție privitoare la modul de conexiune al acestor impedanțe: stea, triunghi etc.).

Înlocuind pe baza teoremei compensației cele trei impedanțe prin surse ideale, avînd tensiunile la borne :

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1, \quad \underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2, \quad \underline{U}_3 = \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_3, \quad (42.26)$$

se obține circuitul trifazat echilibrat reprezentat în figura 42.16.

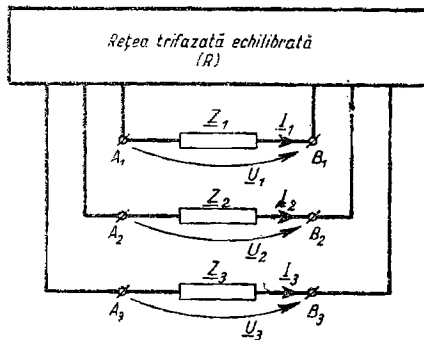


Fig. 42.15.

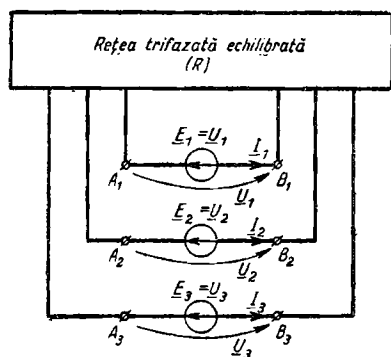


Fig. 42.16.

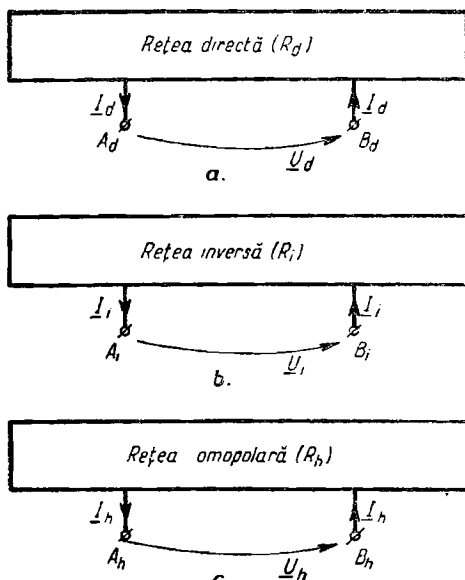


Fig. 42.17.

Determinarea relațiilor dintre componentele simetrice ale tensiunilor și curenților și în general, studiul rețelei simetrice (R) se face cu ajutorul schemelor de succesiune simetrice R_d , R_i , R_h ale acestei rețele (R). Aceste scheme sînt reprezentate în figura 42.17.

Relațiile dintre curent și tensiune la bornele acestor scheme se calculează prin oricare din metodele cunoscute din studiul circuitelor electrice monofazate și sînt de forma :

$$\underline{I}_d = -\underline{Y}_{ABd} \cdot \underline{U}_d + \underline{I}_{dsc}$$

$$\underline{I}_i = -\underline{Y}_{ABi} \cdot \underline{U}_i + \underline{I}_{isc}$$

$$\underline{I}_h = -\underline{Y}_{ABh} \cdot \underline{U}_h + \underline{I}_{hsc}$$

(42.27)

Mărimile $\underline{Y}_{ABd}$, $\underline{Y}_{ABi}$, $\underline{Y}_{ABh}$ reprezintă respectiv admitanțele echivalente ale schemelor de succesiune directă, inversă și omopolară pasivizate, iar $\underline{I}_{dsc}$, $\underline{I}_{isc}$, $\underline{I}_{hsc}$ sînt curenții de scurtcircuit debitați de aceste scheme, dacă se scurtcircuitază bornele $A_d - B_d$, $A_i - B_i$, $A_h - B_h$. Aceste admitanțe și acești curenți de scurtcircuit se determină în funcție de structura părții simetrice de rețea.

Pe de altă parte, un calcul simplu arată că din ecuațiile (42.26), cu aju-

torul relațiilor (42.6), se obțin alte trei relații între componentele simetrice ale tensiunilor și ale curenților la bornele elementelor dezechilibrate :

$$\underline{U}_d = \xi_b \underline{I}_d + \xi_i \underline{I}_i + \xi_d \underline{I}_h$$

$$\underline{U}_i = \xi_d \underline{I}_d + \xi_b \underline{I}_i + \xi_i \underline{I}_h \quad (42.28)$$

$$\underline{U}_h = \xi_i \underline{I}_d + \xi_d \underline{I}_i + \xi_h \underline{I}_h$$

În aceste ecuații s-au notat cu ξ_d , ξ_i , ξ_b coeficienții (de natura unor impedențe) ale căror expresii în funcție de impedențele $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$ care formează receptorul nesimetric sînt :

$$\begin{aligned}\xi_b &= \frac{1}{3} (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3), \\ \xi_d &= \frac{1}{3} (\underline{Z}_1 + a\underline{Z}_2 + a^2\underline{Z}_3), \\ \xi_i &= \frac{1}{3} (\underline{Z}_1 + a^2\underline{Z}_2 + a\underline{Z}_3).\end{aligned}\quad (42.29)$$

Sistemele de ecuații (42.27) și (42.28) formează împreună un sistem de ecuații cu șase necunoscute, $\underline{U}_d$, $\underline{U}_i$, $\underline{U}_b$, $\underline{I}_d$, $\underline{I}_i$, $\underline{I}_b$, care reprezintă componentele simetrice ale tensiunilor și curenților la bornele receptorului nesimetric. Prin rezolvarea acestui sistem (42.27), (42.28), se pot determina deci aceste componente. Utilizînd relațiile (42.5), se calculează curenții și tensiunile la bornele receptorului nesimetric.

În continuare, cunoscînd tensiunile $\underline{U}_d$, $\underline{U}_i$, $\underline{U}_b$ de la bornele schemelor de succesiune R_d , R_i , R_b , reprezentate în figura. 42.16, determinarea componentelor simetrice ale curenților și tensiunilor din laturile rețelei simetrice (R) se face simplu, rezolvînd separat fiecare din aceste scheme.

42.3.3. **Calculul regimurilor de avarie nesimetrice ale unor rețele trifazate echilibrate.** În cazul unor scurtcircuite între o fază și pămînt, între două faze — cu sau fără punere la pămînt, ca în cazul întreruperii unei faze sau a două faze, apar regimuri de funcționare nesimetrică. Calculul unor astfel de regimuri prezintă importanță deosebită pentru protecția și dimensionarea sistemelor electrice trifazate.

Nesimetria corespunzătoare acestor scurtcircuite și întreruperi este echivalentă cu prezența unor receptoare statice simple, pentru care, în locul relațiilor (42.28), se obțin relații mult mai simple. Satisfacerea unor astfel de relații simple între componentele simetrice ale tensiunilor, respectiv curenților la locul nesimetriei, se face, de regulă, prin interconectarea adecvată a schemelor de succesiuni simetrice R_b , R_d , R_i .

Studiem unele exemple tipice care se pot aplica la diferite situații practice.

1. **Scurtcircuit pe faza 1, cu întreruperea fazelor 2 și 3.** Pentru a putea aplica metoda componentelor simetrice, pe lângă perechea de borne A_1 și B_1 (între care se realizează scurtcircuitul), s-au considerat și perechile de borne analoge $A_2 - B_2$ și $A_3 - B_3$, obținîndu-se un receptor trifazat dezechilibrat echivalent (fig. 42.18). Acest receptor are un conductor

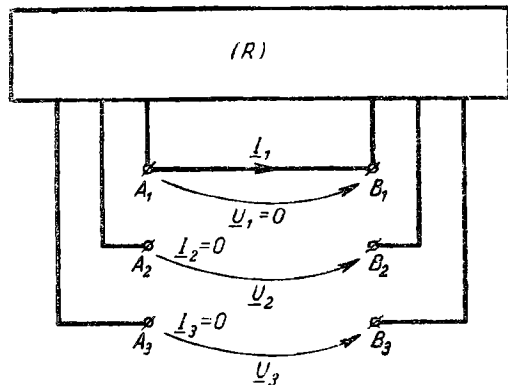


Fig. 42.18.

de impedanță nulă ($\underline{Z}_1 = 0$) pe faza 1 și două întreruperi pe fazele 2 și 3 (deci $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \infty$); ca urmare

$$\underline{U}_1 = 0; \underline{I}_2 = \underline{I}_3 = 0. \quad (42.30)$$

Cu ajutorul relațiilor (42.5) și (42.6) se deduc relațiile corespunzătoare dintre componentele simetrice:

$$\underline{U}_b + \underline{U}_d + \underline{U}_i = 0 \quad \underline{I}_b = \underline{I}_d = \underline{I}_i. \quad (42.31)$$

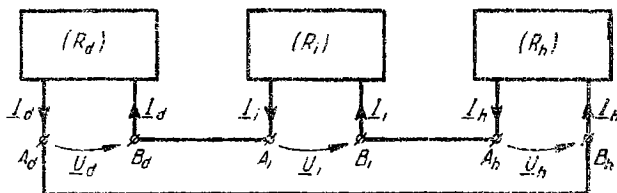


Fig. 42.19.

Se observă ușor că satisfacerea ultimelor ecuații de către curenții de la bornele schemelor R_d, R_i, R_h se poate asigura prin legarea în serie a dipolilor R_d, R_i, R_h (fig. 42.19). Pentru a satisface și prima ecuație de către tensiunile de la bornele acelorasi scheme, este suficient să unim punctele A_d și B_h printr-un conductor de impedanță nulă.

Ca urmare, calculind curenții din acest circuit, se obțin componentele simetrice ale curenților și tensiunilor.

2. *Scurtcircuit pe fazele 2 și 3, cu întreruperea fazei 1.* În figura 42.20 s-au notat cu $A_2 - B_2$, respectiv cu $A_3 - B_3$, perechile de borne scurtcircuitate și cu $A_1 - B_1$ bornele omologe (în gol) de pe faza 1. Ecuațiile acestui receptor dezechilibrat sînt:

$$\underline{I}_1 = 0; \underline{U}_2 = \underline{U}_3 = 0. \quad (42.32)$$

Cu ajutorul relațiilor (42.5), respectiv (42.6), aceste condiții se exprimă în funcție de componentele simetrice corespunzătoare, astfel:

$$\begin{aligned} \underline{I}_b + \underline{I}_d + \underline{I}_i &= 0; \\ \underline{U}_b &= \underline{U}_d = \underline{U}_i. \end{aligned} \quad (42.33)$$

Se verifică ușor că satisfacerea acestor ecuații de către tensiunile și curenții ex stenți la bornele corespunzătoare ale rețelelor de succesiune directă, inversă și omopolară ale rețelei simetrice se poate face simplu, interconectînd aceste rețele în derivație, așa cum se indică în figura 42.21.

Prin urmare, curenții și tensiunile din rețelele de succesiuni simetrice ale părții echilibrate de rețea satisfac, datorită interconectării, și ecuațiile cores-

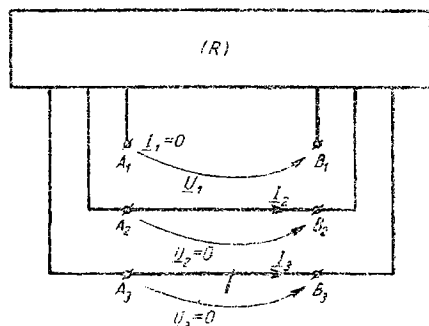


Fig. 42.20.

punzătoare părții dezechilibrată; ca urmare, acești curenți reprezintă componentele simetrice corespunzătoare regimului nesimetric studiat.

Pentru calculul unui scurtcircuit între două faze vom utiliza o conexiune echivalentă în stea, ca și pentru orice element trifazat cu conexiune în triunghi. Aceasta se poate obține, considerând suprapuse punctele B_1, B_2, B_3 , într-un punct neutru, artificial izolat 0.

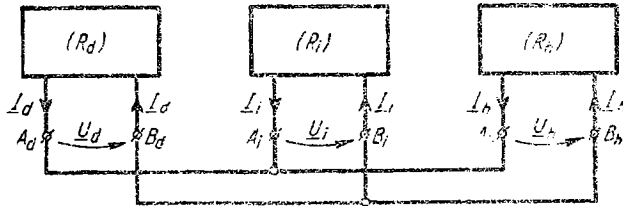


Fig. 42.21.

42.3.4. Aplicații: 1. Scurtcircuit bifazat la bornele unui generator, fără punere la pământ. Considerăm un generator cu tensiuni electromotoare de fază simetrice $\underline{E}_d, a^2\underline{E}_d, a\underline{E}_d$, astfel că $\underline{E}_d = \underline{E}, \underline{E}_i = 0, \underline{E}_h = 0$ și cu impedanțele: directă $\underline{Z}_d$, inversă $\underline{Z}_i$ și omopolară $\underline{Z}_h$ (fig. 42.22, a), la care se produce un scurt circuit net între bornele 2 și 3 fără legătură la pământ.

Scurtcircuitul e echivalent cu un receptor trifazat dezechilibrat în stea, cu $\underline{Z}_1 = \infty, \underline{Z}_2 = 0, \underline{Z}_3 = 0, \underline{Z}_N = \infty$, ca în figura 42.22, b. Se obține astfel cazul studiat în paragraful

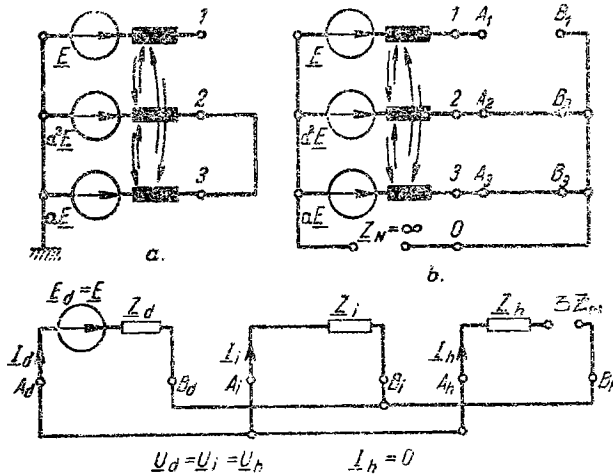


Fig. 42.22.

precedent, punctul 2, în care sînt valabile relațiile (42.33) pentru componentele simetrice ale tensiunilor și curenților receptorului și schema echivalentă din figura 42.22, c, cu cele trei rețele de succesiune directă, inversă și omopolară, conectate în paralel (cu $\underline{Z}_{h \text{ tot}} = \underline{Z}_h + + 3 \underline{Z}_N = \infty$). Rezultă:

$$\underline{I}_d = -\underline{I}_i = \frac{\underline{E}_d}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_i}; \quad \underline{I}_h = 0$$

și cu relația (42.5):

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_b + \underline{I}_d + \underline{I}_i = 0$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_b + a^2 \underline{I}_d + a \underline{I}_i = (a^2 - a) \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_i} = -j \frac{\sqrt{3} \underline{E}}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_i}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_b + a \underline{I}_d + a^2 \underline{I}_i = (a - a^2) \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_i} = j \frac{\sqrt{3} \underline{E}}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_i} = -\underline{I}_2.$$

2. Punere la pământ monofazată la bornele unui generator, printr-o impedanță $\underline{Z}_p$. Considerăm același generator de mai sus, la care borna fazei 1 e conectată la pământ printr-o impedanță $\underline{Z}_p$ (fig. 42.23, a).

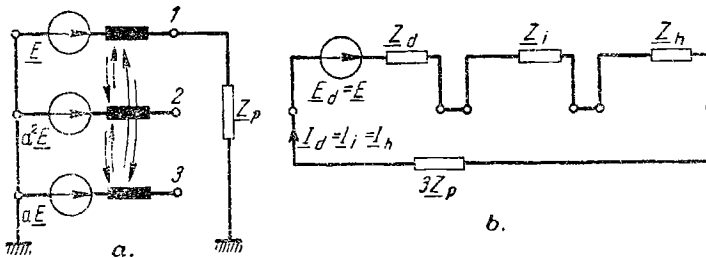


Fig. 42.23.

Relațiile (42.26) sînt, în acest caz:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_p \underline{I}_1, \quad \underline{I}_2 = 0, \quad \underline{I}_3 = 0.$$

Înlocuind tensiunile și curenții, în funcție de componentele lor simetrice, se obțin relațiile:

$$\underline{I}_d = \underline{I}_i = \underline{I}_b = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_p} = \frac{\underline{U}_d + \underline{U}_i + \underline{U}_b}{3 \underline{Z}_p},$$

corespunzătoare schemei echivalente de interconexiune din figura 42.23, b, din care rezultă:

$$\underline{I}_d = \underline{I}_i = \underline{I}_b = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_i + \underline{Z}_d + \underline{Z}_b + 3\underline{Z}_p}.$$

3. Regim trifazat nesimetric al unei rețele complexe. Vom presupune că în rețeaua simetrică, reprezentată în figura 42.13, a se realizează un scurtcircuit între punctul A, care reprezintă o bornă a generatorului și punctul B de pe conductorul neutru, legat la pământ.

Presupunind cunoscute t.e.m. ale generatorului și impedanțele circuitului (pentru elementele dinamice, impedanțele directe, inverse și omopolare), urmărim determinarea curenților și căderilor de tensiune. Observăm că scurtcircuitul de pe faza 1 e echivalent cu un receptor dezechilibrat, de tipul din figura 42.18, conectat în stea la bornele generatorului (fig. 42.24). Conform observației de la sfîrșitul paragrafului precedent, punctele B_1 , B_2 , B_3 le presupunem suprapuse și formînd un punct neutru B.

Conform celor expuse în paragraful precedent, rețelele directe, inverse și omopolare (reprezentate în fig. 42.14) pentru acest tip de nesimetrie se leagă în serie (fig. 42.19), obținîndu-se rețeaua de calcul monofazată din figura 42.25.

Determinarea componentelor simetrice ale curenților și căderile de tensiune ale rețelei se reduce astfel la determinarea curenților și căderilor de tensiune din această rețea de calcul. Această operație se poate face și experimental, pe modele ale rețelei de calcul obținute, realizate în laborator, ale căror tensiuni și curenți se măsoară direct. Compunînd componentele simetrice ale diferitelor curenți sau tensiuni, cu ajutorul relației (42.5), se obțin curenții și căderile de tensiune căutate din rețeaua cu scurtcircuit nesimetric. În generatoarele obișnuite, de construcție echilibrată, $\underline{E}_d = \underline{E}$ și $\underline{E}_i = 0$, $\underline{E}_b = 0$.

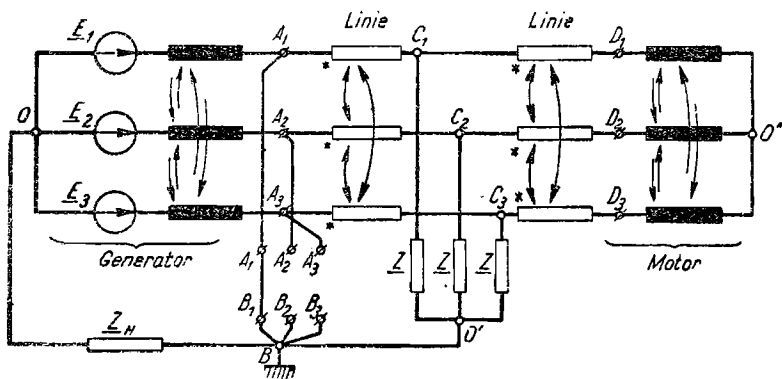


Fig. 42.24.

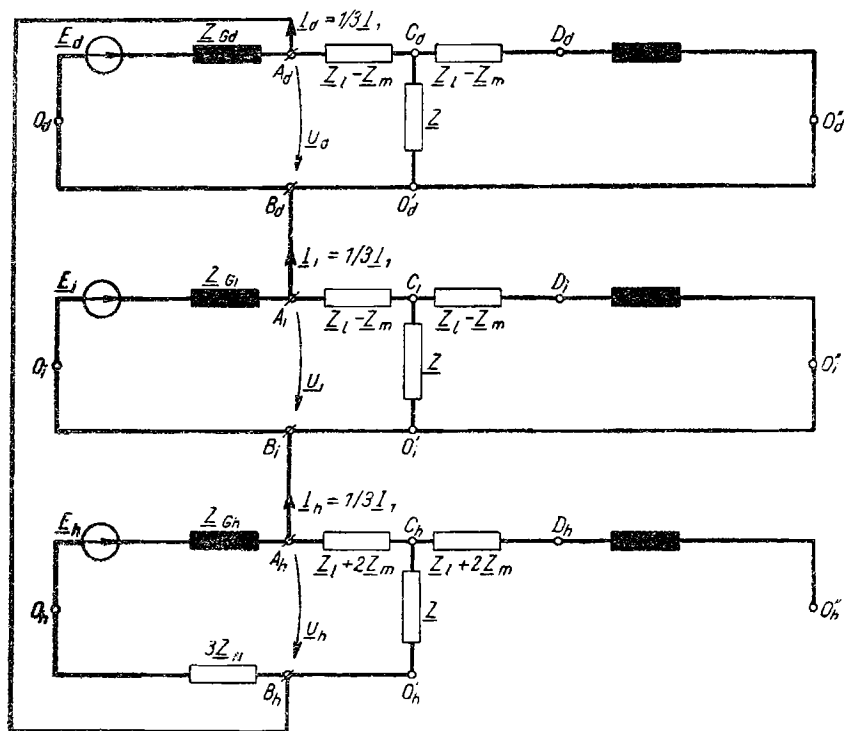


Fig. 42.25.

42.4. Calculul puterii cu ajutorul componentelor simetrice

Se știe că puterea complexă totală a unui sistem trifazat, avînd tensiunile de fază $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$ și curenții de fază $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$, se calculează pe baza unei expresii de forma 41.30 :

$$\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \underline{I}_2^* + \underline{U}_3 \underline{I}_3^*, \quad (42.34)$$

unde, cu $\underline{I}_1^*, \underline{I}_2^*, \underline{I}_3^*$ s-au notat valorile complexe conjugate ale lui $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$.

Puterea complexă $\underline{S} = P + jQ$ se poate exprima în funcție de componentele simetrice, utilizînd relațiile (42.5) :

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_h + \underline{U}_d + \underline{U}_i; \quad \underline{U}_2 = \underline{U}_b + a^2 \underline{U}_d + a \underline{U}_i; \quad \underline{U}_3 = \underline{U}_b + a \underline{U}_d + a^2 \underline{U}_i$$

După gruparea termenilor din (42.34), rezultă :

$$\underline{S} = \underline{U}_b (\underline{I}_1^* + \underline{I}_2^* + \underline{I}_3^*) + \underline{U}_d (\underline{I}_1^* + a^2 \underline{I}_2^* + a \underline{I}_3^*) + \underline{U}_i (\underline{I}_1^* + a \underline{I}_2^* + a^2 \underline{I}_3^*).$$

Deoarece $a^2 = a^*$ și $a = a^{2*}$, rezultă :

$$\underline{S} = 3 \underline{U}_b \underline{I}_h^* + 3 \underline{U}_d \underline{I}_d^* + 3 \underline{U}_i \underline{I}_i^*, \quad (42.35)$$

unde s-au notat cu $\underline{I}_h^*, \underline{I}_d^*, \underline{I}_i^*$ și $\underline{I}_i^*$ valorile complexe conjugate ale componentelor simetrice $\underline{I}_h, \underline{I}_d, \underline{I}_i$ ale curenților $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$.

Notînd cu $\varphi_b, \varphi_d, \varphi_i$ defazajele dintre componentele simetrice de același nume ale tensiunilor și curenților, se obțin expresiile :

$$P = \operatorname{Re} \{ \underline{S} \} = 3 \underline{U}_b \underline{I}_h \cos \varphi_b + 3 \underline{U}_d \underline{I}_d \cos \varphi_d + 3 \underline{U}_i \underline{I}_i \cos \varphi_i.$$

$$Q = \operatorname{Im} \{ \underline{S} \} = 3 \underline{U}_b \underline{I}_h \sin \varphi_b + 3 \underline{U}_d \underline{I}_d \sin \varphi_d + 3 \underline{U}_i \underline{I}_i \sin \varphi_i. \quad (42.36)$$

Ultimele relații arată că puterea activă, respectiv reactivă, a unui circuit trifazat este egală cu suma puterilor active, respectiv reactive, corespunzătoare sistemelor componente simetrice de același nume ale curenților și tensiunilor.

43. || CUADRIPOLI ELECTRICI

43.1. Cuadripoli generali

Un multipol electric (v. par. 38.2) cu patru borne de acces se numește *cuadripol general* sau *tetrapol*. Prin urmare, un cuadripol general este o rețea electrică cu patru borne de acces, ale cărei laturi interioare nu prezintă cuplaje inductive (inductivități mutuale) cu exteriorul (fig. 43.1). Un cuadripol general e o rețea neizolată, care constituie o parte a unei rețele mai mari, eventual izolată. Curenții și tensiunile din rețeaua exterioară sînt complet determinați de structura ei și de potențialele și curenții bornelor de acces ale cuadripolului. Interacțiunea cuadripolului cu exteriorul e deci complet caracterizată de cele patru potențiale ale bornelor și de cei patru curenți primiți din exterior. Alegerea originii potențialelor fiind arbitrară, se poate alege egal cu zero potențialul unei borne; suma curenților care intră într-o suprafață închisă fiind nulă [teorema continuității curentului electric de conducție — (31.10) — valabilă în regim cuasistaționar], unul dintre cei patru curenți se poate exprima în funcție de ceilalți trei. Există deci numai șase variabile (trei potențiale și trei curenți) necesare și suficiente pentru caracterizarea funcționării unui cuadripol general în rețeaua din care face parte.

În regimul permanent sinusoidal, studiat cu reprezentarea în complex, se pot alege drept variabile caracteristice curenții $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$ a trei dintre borne și tensiunile $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$ dintre aceste borne și borna a patra. Dacă se aplică anumite tensiuni la borne, curenții sînt determinați și se pot calcula, ținînd seama de structura interioară a cuadripolului. Se obțin astfel trei relații:

$$\underline{I}_1 = f_1(\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3); \underline{I}_2 = f_2(\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3); \underline{I}_3 = f_3(\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3), \quad (43.1)$$

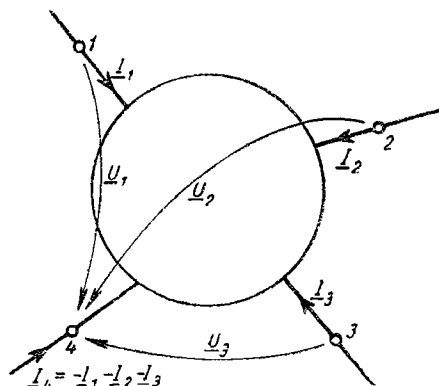


Fig. 43.1.

numite *ecuațiile caracteristice ale cuadripolului*, care sînt necesare și suficiente pentru studiul rețelei din care el face parte. Dacă se cunosc aceste ecuații, structura de detaliu a cuadripolului nu prezintă importanță. Un receptor trifazat cu fir neutru e un exemplu de cvadripol general.

Multipolii — și, în particular, cuadripolii generali — se pot clasifica din mai multe puncte de vedere. Multipolii pot fi *liniari*, *parametrici* sau *neliniari*, după cum parametrii elementelor de circuit ale schemelor echivalente sînt invariabili, sînt funcțiuni date de timp, sau depind de valorile curenților și tensiunilor; la multipolii liniari se aplică teorema superpoziției și ecuațiile caracteristice sînt ecuații liniare. Multipolii pot fi *activi* sau *pasivi*, după cum conțin sau nu surse de energie electromagnetică; la multipolii liniari și pasivi, curenții de regim permanent se anulează o dată cu tensiunile aplicate și ecuațiile caracteristice sînt liniare și omogene. Multipolii pot fi *disipativi* sau *nedisipativi*, după cum conțin sau nu elemente de circuit, care sînt sediul unei transformări ireversibile de energie în căldură (de ex. prin efect Joule-Lenz); multipolii disipativi au schemele echivalente, cu rezistențe nenule în laturi. Multipolii pot fi *reciproci* sau *nereciproci*, după cum admit sau nu proprietatea de reciprocitate: curentul $\underline{I}_i$ — care intră prin borna i cînd toate bornele sînt legate conductiv între ele, afară de borna j la care se aplică tensiunea $\underline{U}_j = U$ față de celelalte — este egal cu curentul $\underline{I}_j$ — care intră prin borna j cînd toate bornele sînt legate conductiv între ele, afară de borna i la care se aplică tensiunea $\underline{U}_i = U$ față de celelalte. În paragraful 38.3.5. am demonstrat această proprietate (teorema reciprocității) pentru rețele electrice liniare, constituite din elemente de circuit dipolare: generatoare, bobine, rezistoare, condensatoare, *Pentru rețele care conțin elemente de circuit multipolare* (de ex. mașini electrice trifazate), *proprietatea de reciprocitate poate să nu fie verificată, chiar dacă rețeaua este liniară*. În cazul multipolilor neliniari, teorema reciprocității nu are loc decît accidental, chiar dacă toate elementele de circuit sînt dipolare.

Se numește *poartă* a unui multipol o grupare de borne de acces pentru care suma algebrică a curenților e nulă oricare ar fi potențialele bornelor multipolului. O astfel de situație poate fi impusă numai de structura topologică a multipolului sau a rețelei exterioare la care e conectat, ca o consecință a teoremei continuității curentului electric de conducție (respectiv a primei teoreme a lui Kirchhoff). Fiecărei porți i se poate asocia în mod unic o anumită putere instantanee, definită de suma produselor dintre potențialele și curenții bornelor respective (v. rel. 37.1). Deoarece suma curenților e nulă, schimbarea originii potențialelor nu afectează această putere. Din acest motiv se consideră că transmitența puterii se face pe la bornele porții — deși în realitate e localizată în câmpul electromagnetic ca flux al vectorului Poynting. O poartă concretizează, deci, una dintre căile de transfer a energiei electromagnetice între exteriorul și interiorul multipolului. În numeroase aplicații interesează porțile cu două borne, avînd curenți egali și opuși, care pot fi porți de intrare sau porți de ieșire.

Se numește *poartă de intrare* o poartă cu două borne (de ex. 1, 1' în fig. 43.2), la care tensiunea aplicată $\underline{U}_1$ și curentul $\underline{I}_1$ sînt asociați după regula de la receptoare. La o poartă de intrare, puterea complexă S_1 calculată cu aceste mărimi e o putere primită:

$$S_1 = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* = \underline{V}_1 \underline{I}_1^* - \underline{V}_1' \underline{I}_1^* = \underline{V}_1 \underline{I}_1^{(ex)*} + \underline{V}_1' \underline{I}_1'^{(ex)*} \quad (43.2)$$

(curenții primiți din exterior fiind $\underline{I}_1^{(ex)} = \underline{I}_1$ și $\underline{I}_1'^{(ex)} = -\underline{I}_1$).

Se numește *poartă de ieșire* o poartă cu două borne (de ex. 2, 2' în fig. 43.2) la care tensiunea aplicată $\underline{U}_2$ și curentul $\underline{I}_2$ sînt asociați după regula de la generatoare. La o poartă de ieșire, puterea complexă S_2 calculată cu aceste mărimi e o putere cedată,

$$\begin{aligned} S_2 &= \underline{U}_2 \underline{I}_2^* = \underline{V}_2 \underline{I}_2^* - \underline{V}_2' \underline{I}_2^* =, \\ &= -(\underline{V}_2 \underline{I}_2^{(ex)*} + \underline{V}_2' \underline{I}_2'^{(ex)*}) \quad (43.3) \end{aligned}$$

(curenții primiți din exterior fiind

$$\underline{I}_2^{(ex)} = -\underline{I}_2 \text{ și } \underline{I}_2'^{(ex)} = \underline{I}_2).$$

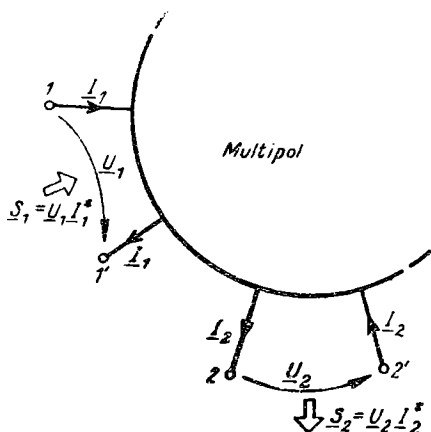


Fig. 43.2.

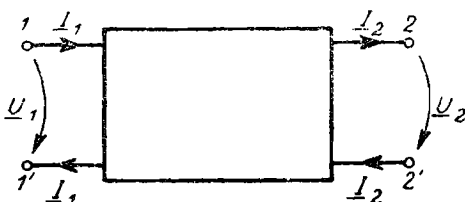


Fig. 43.3.

43.2 Cuadripoli diport

Se numește *cuadripol diport*, sau numai *cuadripol*, un cuadripol general ale cărui borne sînt grupate în două porți. Prin urmare, în acest sens, un cuadripol e o rețea neizolată, fără cuplaje inductive cu exteriorul, cu patru borne de acces grupate în două perechi de borne (sau porți), avînd fiecare curenții egali și opuși (fig. 43.3).

În cele ce urmează ne vom ocupa numai de cuadripolii diport, deoarece aceștia sînt elementele fundamentale ale lanțurilor de transmisiune a energiei electromagnetice sau a semnalelor electromagnetice. Ținînd seama de această utilizare, una din porți e poarta de intrare (1, 1' în fig. 43.3) — cu convenția de asociere a sensurilor de la receptoare — iar cealaltă e poarta de ieșire (2, 2' în fig. 43.3) — cu convenția de asociere a sensurilor de la generatoare.

Interacțiunea unui astfel de cuadripol cu exteriorul e complet caracterizată de numai patru variabile:

$\underline{U}_1$ — tensiunea de la intrare (tensiunea primară),

$\underline{I}_1$ — curentul de la intrare (curentul primar),

$\underline{U}_2$ — tensiunea de la ieșire (tensiunea secundară),

$\underline{I}_2$ — curentul de la ieșire (curentul secundar).

În aplicații este foarte important să se verifice dacă cuadripolul e efectiv diport, adică dacă cei doi curenți de la bornele de intrare (sau de la cele de ieșire) sînt egali și de sens opus. Această condiție e sigur realizată, oricare ar fi

structura internă a cuadripolului, dacă rețeaua conectată la intrare și rețeaua conectată la ieșire sînt izolate una de alta (fără legături conductoare — fig. 43.4). În adevăr, în acest caz există o suprafață închisă Σ , care conține una din aceste rețele și e dusă numai prin dielectric, cu excepția a două puncte, unde e înțepată

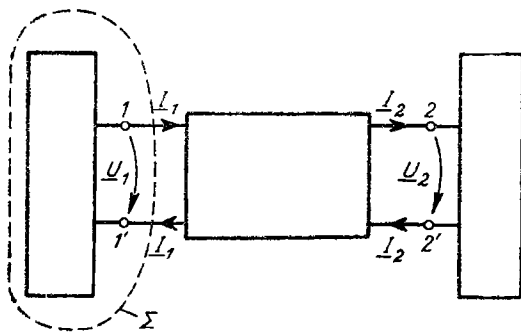


Fig. 43.4.

de cele două conductoare ale bornelor uneia dintre porți. Conform teoremei continuității, suma curenților care ies din această suprafață e nulă și deci cei doi curenți ai unei porți sînt egali și opuși. Dacă rețeaua conectată la intrare și rețeaua conectată la ieșire nu sînt izolate una de alta (au cel puțin o legătură conductoare între ele), numai prin analiza structurii lor sau a cuadripolului se poate stabili dacă cei doi curenți ai unei porți sînt în mod necesar (adică, exclusiv ca urmare a primei teo-

reme a lui Kirchhoff) egali și opuși. Această condiție e sigur satisfăcută, de exemplu, ori de cîte ori cuadripolul conține un transformator, care asigură separarea conductivă a porții de intrare de poarta de ieșire.

43.3. Ecuațiile și parametrii cuadripolilor liniari, pasivi și reciproci

Dintre cele patru variabile $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{U}_1$ și $\underline{U}_2$ care caracterizează interacțiunea cuadripolului cu exteriorul, numai două sînt independente din punctul de vedere al structurii interioare a cuadripolului. Dacă, de exemplu, se aplică la borne tensiuni $\underline{U}_1$ și $\underline{U}_2$ cunoscute, teoremele lui Kirchhoff permit determinarea unică a curenților $\underline{I}_1$ și $\underline{I}_2$. Există deci între aceste patru variabile, două relații de forma :

$$F_1(\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{U}_1, \underline{U}_2) = 0 \quad F_2(\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{U}_1, \underline{U}_2) = 0, \quad (43.4)$$

numite *ecuațiile cuadripolului sub formă implicită*, a căror cunoaștere e suficientă pentru studiul comportării cuadripolului în rețeaua mai mare din care face parte.

Cuadripolul fiind prin ipoteză liniar și pasiv, aceste ecuații sînt neapărat liniare și omogene. Dacă ecuațiile nu ar fi liniare, nu s-ar verifica teorema superpoziției caracteristică rețelelor liniare. Dacă nu ar fi omogene, curenții nu s-ar anula pentru $\underline{U}_1 = 0$, $\underline{U}_2 = 0$, ceea ce ar implica existența unor surse interioare, care nu există în cuadripolii pasivi.

Coeficienții ecuațiilor liniare și omogene ale cuadripolilor reciproci mai trebuie să satisfacă teorema reciprocității (par. 38.3.5) aplicată rețelei izolate, obținută scurtcircuitînd bornele fiecăreia dintre cele două porți. Curențul secundar $\underline{I}_2'$ produs de o sursă ideală de t.e.m. $\underline{E}$ conectată între bornele primare cu sensul lui $\underline{I}_1$ (astfel că $\underline{U}_1' = \underline{E}$), bornele secundare fiind scurtcircuitate

($\underline{U}'_2 = 0$, v. fig. 43.5, a), trebuie să fie egal cu curentul primar $\underline{I}'_1$ produs de aceeași sursă ideală de t.e.m. $\underline{E}$, conectată între bornele secundare cu sensul $\underline{I}_2$ (astfel că $\underline{U}'_2 = -\underline{E}$, v. fig. 43.5, b), bornele primare fiind scurtcircuitate ($\underline{U}'_1 = 0$),

$$\underline{I}'_2 = (\underline{I}_2)_{\substack{\underline{U}_1=\underline{E} \\ \underline{U}_2=0}} = (\underline{I}_1)_{\substack{\underline{U}_1=0 \\ \underline{U}_2=-\underline{E}}} = \underline{I}'_1. \quad (43.5)$$

Relația dintre coeficienți impusă de această egalitate (valabilă pentru orice valoare a tensiunii $\underline{E}$) se numește *condiția de reciprocitate*.

Ecuatiile cuadripolilor (43.4) au diferite forme explicite, obținute alegând cite o anumită pereche de variabile ca variabile independente: $\underline{U}_2$ și $\underline{I}_2$, $\underline{U}_1$ și $\underline{I}_1$, $\underline{I}_1$ și $\underline{I}_2$, $\underline{U}_1$ și $\underline{U}_2$ etc. În aceste forme explicite, celelalte două variabile sînt exprimate ca funcții liniare și omogene de cele două variabile independente, cei patru coeficienți complecși ai acestor funcții numindu-se *parametrii cuadripolului* sau *constantele cuadripolului*. Condiția de reciprocitate (43.5) impune o relație între acești patru parametri: Un cuadripol diport, liniar, pasiv și reciproc e caracterizat prin numai trei parametri complecși independenți (sau prin șase parametri reali). Toți cuadripolii care au aceiași parametri sînt echivalenți între ei și pot fi substituiți unul altuia, fără ca această substituție să afecteze starea rețelei mai mari din care fac parte.

Caracterul pasiv al cuadripolului (asociat valorilor pozitive sau nule ale rezistențelor laturilor lui) mai impune satisfacerea condiției ca puterea activă totală primită de cuadripol să nu fie negativă, oricare ar fi valorile variabilelor independente :

$$\underline{P} = \underline{P}_1 - \underline{P}_2 = \text{Re} \{ \underline{U}_1 \underline{I}_1^* - \underline{U}_2 \underline{I}_2^* \} \geq 0, \quad (43.6)$$

egalitatea corespunzînd cuadripolilor nedisipativi.

Cei trei parametri complecși independenți nu pot avea deci valori arbitrare, ci numai valorile compatibile cu *condiția de pasivitate* (43.6).

43.3.1. Forma fundamentală a ecuațiilor cuadripolului și parametrii fundamentali. Deoarece funcțiunea cea mai importantă a cuadripolilor e aceea de element al unui lanț de transmisiune a energiei electromagnetice sau a semnalelor electromagnetice, forma fundamentală a ecuațiilor cuadripolilor e aceea în care mărimile de intrare $\underline{U}_1$, $\underline{I}_1$ sînt exprimate în funcțiune de mărimile de ieșire $\underline{U}_2$, $\underline{I}_2$ prin relații liniare și omogene de forma :

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A} \underline{U}_2 + \underline{B} \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = \underline{C} \underline{U}_2 + \underline{D} \underline{I}_2 \end{cases} \quad (43.7)$$

Coeficienții $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$ ai acestor relații se numesc *parametrii fundamentali* ai cuadripolului. $\underline{A}$ și $\underline{D}$ sînt coeficienți adimensionali, $\underline{B}$ e o impedanță, iar

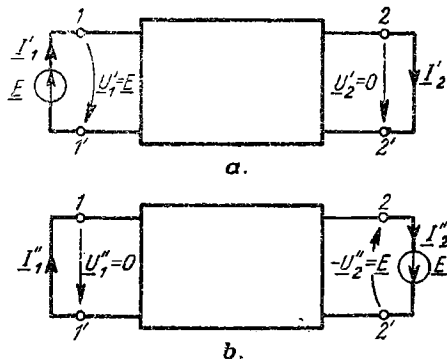


Fig. 43.5.

C o admitanță. Parametrii fundamentali au următoarele interpretări experimentale :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{A} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \right)_{\underline{I}_2=0} & = \text{raportul de transformare al tensiunilor la mersul în gol} \\ \underline{B} = \frac{1}{\left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} \right)_{\underline{U}_2=0}} & = \text{valoarea inversă a admitanței de transfer de scurt-circuit} \\ \underline{C} = \frac{1}{\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1} \right)_{\underline{I}_2=0}} & = \text{valoarea inversă a impedanței de transfer la mers în gol} \\ \underline{D} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{U}_2=0} & = \text{raportul de transformare al curenților la mersul în scurtcircuit.} \end{array} \right. \quad (43.8)$$

Cu ajutorul ecuațiilor (43.7), condiția (43.5) impune egalitatea :

$$(\underline{I}_2)_{\substack{\underline{U}_1=\underline{E} \\ \underline{U}_2=0}} = \frac{1}{\underline{B}} \underline{E} = (\underline{I}_1)_{\substack{\underline{U}_1=0 \\ \underline{U}_2=-\underline{E}}} = \frac{\underline{AD} - \underline{BC}}{\underline{B}} \underline{E}$$

și cum $\underline{E}$ e arbitrar, rezultă *condiția de reciprocitate* :

$$\Delta \equiv \boxed{\underline{AD} - \underline{BC} = 1} \quad , \quad (43.9)$$

exprimată cu parametrii fundamentali. Se observă că Δ e chiar determinantul sistemului (43.7) și conform cu (43.9) acest determinant nu poate fi nul. Ecuațiile (43.7) au deci o soluție unică, dacă sînt explicitate în raport cu $\underline{U}_2$ și $\underline{I}_2$. Folosind regula lui Cramer, se obține o altă formă fundamentală a ecuațiilor cuadripolilor, în care mărimile de ieșire $\underline{U}_2$, $\underline{I}_2$ sînt exprimate în funcție de cele de intrare $\underline{U}_1$, $\underline{I}_1$:

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 &= \underline{D}\underline{U}_1 - \underline{B}\underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 &= -\underline{C}\underline{U}_1 + \underline{A}\underline{I}_1. \end{aligned} \quad (43.10)$$

43.3.2. Parametrii impedanță. Dacă ecuațiile fundamentale (43.7) se pot explicita în raport cu tensiunile $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$ (adică dacă $\underline{C} \neq 0$), se obține o altă formă a ecuațiilor cuadripolilor liniari și pasivi :

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2 \end{aligned}} \quad , \quad (43.11)$$

în care coeficienții sînt *parametrii impedanță* ai cuadripolului

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{11} &= \left(\frac{U_1}{I_1} \right)_{I_2=0} = \frac{A}{C} = \text{impedanța de intrare la mers în gol} \\ \underline{Z}_{12} &= \left(\frac{U_1}{I_2} \right)_{I_1=0} = \frac{AD-BC}{C} \\ \underline{Z}_{21} &= \left(\frac{U_2}{I_1} \right)_{I_2=0} = \frac{1}{C} = \text{impedanța de transfer la mers în gol} \\ \underline{Z}_{22} &= \left(\frac{U_2}{I_2} \right)_{I_1=0} = -\frac{D}{C}.\end{aligned}\quad (43.12)$$

Ținînd seama de aceste expresii, *condiția de reciprocitate* exprimată cu parametrii impedanță se scrie :

$$\boxed{\underline{Z}_{12} = -\underline{Z}_{21}} \quad (43.13)$$

Determinantul sistemului (43.11) este :

$$\Delta_z = \underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21} = \underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{12}^2. \quad (43.14)$$

Cu ajutorul parametrilor impedanță, *condiția de pasivitate* (43.6) se scrie :

$$\begin{aligned}P &= \operatorname{Re} \{ \underline{Z}_{11} I_1^2 - \underline{Z}_{22} I_2 + \underline{Z}_{12} (I_2 I_1^* - I_1 I_2^*) \} = \\ &= \operatorname{Re} \{ \underline{Z}_{11} I_1^2 - \underline{Z}_{22} I_2^2 + 2 \underline{Z}_{12} I_1 I_2 \cos(\widehat{I_1, I_2}) \} \geq 0.\end{aligned}$$

Această condiție poate fi satisfăcută pentru orice valori efective I_1, I_2 și pentru orice defazaj al curenților, dacă

$$\operatorname{Re} \{ \underline{Z}_{11} \} \geq 0; \operatorname{Re} \{ \underline{Z}_{22} \} \geq 0; \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{22} \} \geq |\operatorname{Re} \{ \underline{Z}_{12} \}| \geq 0. \quad (43.15)$$

43.3.3. Parametrii admitanță. Dacă ecuațiile fundamentale (43.7) se pot explicita în raport cu curenții $\underline{I}_1, \underline{I}_2$ (adică dacă $\underline{B} \neq 0$), se obține o altă formă a ecuațiilor cuadripolilor liniari și pasivi :

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2\end{aligned}}, \quad (43.16)$$

în care coeficienții sînt *parametrii admitanță* ai cuadripolului :

$$\begin{aligned}\underline{Y}_{11} &= \left(\frac{I_1}{U_1} \right)_{U_2=0} = \frac{D}{B} = \text{admitanța de intrare de scurtcircuit} \\ \underline{Y}_{12} &= \left(\frac{I_1}{U_2} \right)_{U_1=0} = -\frac{AD-BC}{B} \\ \underline{Y}_{21} &= \left(\frac{I_2}{U_1} \right)_{U_2=0} = \frac{1}{B} = \text{admitanța de transfer de scurtcircuit} \\ \underline{Y}_{22} &= \left(\frac{I_2}{U_2} \right)_{U_1=0} = -\frac{A}{B}.\end{aligned}\quad (43.17)$$

Ținând seama de aceste expresii, condiția de reciprocitate (43.9) exprimată cu parametrii admitanță se scrie :

$$\boxed{\underline{Y}_{12} = -\underline{Y}_{21}} \quad (43.18)$$

Determinantul sistemului (43.16) este :

$$\Delta_y = \underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21} = \underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{12}^2. \quad (43.19)$$

Cu ajutorul parametrilor admitanță, condiția de pasivitate (43.6) conduce la relațiile :

$$\operatorname{Re}\{\underline{Y}_{11}\} \geq 0; \operatorname{Re}\{\underline{Y}_{22}\} \leq 0; \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\underline{Y}_{11} - \underline{Y}_{22}\} \geq |\operatorname{Re}\{\underline{Y}_{12}\}| \geq 0. \quad (43.20)$$

43.3.4. Relații între diferitele categorii de parametri. Dacă determinantul $\Delta_z \neq 0$, parametrii admitanță se pot exprima în funcție de parametrii impedanță prin relațiile :

$$\underline{Y}_{11} = \frac{\underline{Z}_{22}}{\Delta_z}; \underline{Y}_{12} = -\frac{\underline{Z}_{12}}{\Delta_z}; \underline{Y}_{21} = -\frac{\underline{Z}_{21}}{\Delta_z}; \underline{Y}_{22} = \frac{\underline{Z}_{11}}{\Delta_z}, \quad (43.21)$$

iar dacă determinantul $\Delta_y \neq 0$, parametrii impedanță se pot exprima în funcție de parametrii admitanță prin relațiile :

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{Y}_{22}}{\Delta_y}; \underline{Z}_{12} = -\frac{\underline{Y}_{12}}{\Delta_y}; \underline{Z}_{21} = -\frac{\underline{Y}_{21}}{\Delta_y}; \underline{Z}_{22} = \frac{\underline{Y}_{11}}{\Delta_y}. \quad (43.22)$$

Se observă imediat că

$$\Delta_z \cdot \Delta_y = 1. \quad (43.23)$$

Dacă se dau parametrii admitanță, respectiv impedanță, și dacă $\underline{Y}_{21} \neq 0$, respectiv $\underline{Z}_{21} \neq 0$, se pot calcula parametrii fundamentali :

$$\underline{A} = -\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} = \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}}; \underline{B} = \frac{1}{\underline{Y}_{21}} = -\frac{\Delta_z}{\underline{Z}_{21}}; \underline{C} = -\frac{\Delta_y}{\underline{Y}_{21}} \frac{1}{\underline{Z}_{21}}; \underline{D} = \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}} = -\frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}} \quad (43.24)$$

Se numește cuadripol degenerat un cuadripol pentru care unul din determinanții Δ_z , respectiv Δ_y , este nul. Pentru cuadripolii degenerați au sens numai unii dintre parametrii definiți mai sus pentru un cuadripol oarecare, ceilalți parametri fiind infiniți sau nedeterminați (v. și par. 43.4.1.).

43.3.5. Cuadripoli simetrici. Un cuadripol poate fi alimentat pe la bornele secundare, care constituie, în acest caz, bornele de intrare și poate debita pe la bornele primare, care constituie, în acest caz, bornele de ieșire. Aceasta e alimentarea inversă a cuadripolului (fig. 43.6), care corespunde, în ecuații, schimbării sensului de referință al curentului

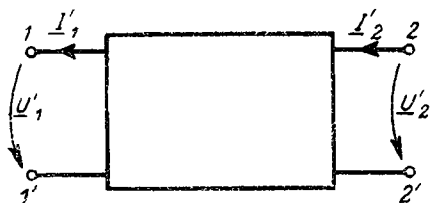


Fig. 43.6.

$$\underline{U}_1' = \underline{U}_1; \underline{U}_2' = \underline{U}_2; \underline{I}_1' = -\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = -\underline{I}_2. \quad (43.25)$$

Ecuațiile cuadripolului la alimentare inversă se obțin cu (43.25) din (43.10) :

$$\underline{U}_2' = \underline{D}\underline{U}_1' + \underline{B}\underline{I}_1' \quad (43.26)$$

$$\underline{I}_2' = \underline{C}\underline{U}_1' + \underline{A}\underline{I}_1'.$$

Se numește *cuadripol simetric* un cuadripol la care intervertirea porților de intrare și de ieșire nu afectează exteriorul. Pentru aceasta e necesar și suficient ca prin substituția $1 \rightleftharpoons 2$, ecuațiile la alimentarea inversă să coincidă cu ecuațiile obișnuite (43.7). Condiția de simetrie necesară și suficientă rezultă a fi

$$\boxed{\underline{A} = \underline{D}}. \quad (43.27)$$

Cu ajutorul parametrilor impedanță, respectiv admitanță, condiția de simetrie se scrie (v. 43.24):

$$\underline{Z}_{22} = -\underline{Z}_{11}, \text{ respectiv } \underline{Y}_{22} = -\underline{Y}_{11}. \quad (43.27')$$

Un cuadripol simetric reciproc are numai doi parametri independenți, iar condiția de reciprocitate pentru cuadripoli simetrici se scrie:

$$\underline{A}^2 = 1 + \underline{B}\underline{C}. \quad (43.28)$$

43.4. Determinarea parametrilor cuadripolilor

Principalul obiectiv al studiului unui cuadripol consistă în determinarea parametrilor, care sînt suficienți și necesari pentru caracterizarea funcționării cuadripolului în rețeaua mai mare din care face parte. Această determinare se face analitic sau experimental. În paragraful 44.3 vom prezenta metode matriceale pentru determinarea parametrilor unui cuadripol de structură mai complicată, care poate fi prezentat ca o asociație de cuadripoli mai simpli, cu parametri cunoscuți.

43.4.1. Determinarea analitică. Dacă se cunoaște structura interioară a cuadripolului, ecuațiile fundamentale (sau altele) se pot obține cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff, eliminînd succesiv curenții laturilor interioare și presupunînd date tensiunile $\underline{U}_1$ și $\underline{U}_2$. Parametrii cuadripolului rezultă atunci prin identificare. Se pot folosi și direct relațiile (43.8), (43.12), (43.17), studiînd regimuri particulare de mers în gol și scurtcircuit.

Aplicații: 1. Cuadripolul în T (fig. 43.7,a). Scriînd ecuațiile lui Kirchhoff pe cele două ochiuri, se obțin relațiile:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{Z}_1 I_1 + \underline{Z}(I_1 - I_2) = (\underline{Z}_1 + \underline{Z})I_1 - \underline{Z}I_2 \\ \underline{U}_2 = -\underline{Z}I_2 + \underline{Z}(I_1 - I_2) = \underline{Z}I_1 - (\underline{Z}_2 + \underline{Z})I_2 \end{cases}$$

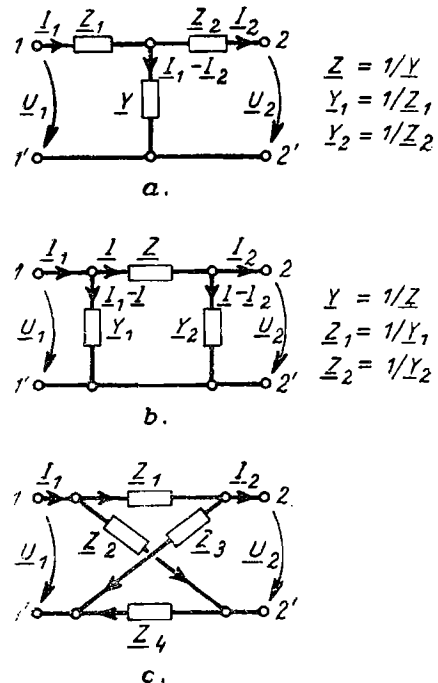


Fig. 43.7.

în care apar direct parametrii impedanță

$$Z_{11} = Z_1 + Z, \quad Z_{12} = -Z, \quad Z_{21} = Z, \quad Z_{22} = -(Z_2 + Z). \quad (43.29)$$

Cu relația (43.24), parametrii fundamentali sînt (cu $\underline{Y} = 1/Z$):

$$\underline{A} = 1 + Z_1 \underline{Y}, \quad \underline{B} = Z_1 + Z_2 + \underline{Y} Z_1 Z_2, \quad \underline{C} = \underline{Y}, \quad \underline{D} = 1 - Z_2 \underline{Y}, \quad (43.30)$$

iar cu relația (43.21) se pot obține parametrii admitanță.

2. *Cuadripol în Π* (fig. 43.7, b). Scriind ecuația a doua a lui Kirchhoff pe ochiul central, rezultă:

$$0 = -\underline{U}_1 + \underline{Z}\underline{I} + \underline{U}_2, \quad \underline{I} = \underline{Y}(\underline{U}_1 - \underline{U}_2)$$

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{Y}_1 \underline{U}_1 + \underline{I} = (\underline{Y}_1 + \underline{Y}) \underline{U}_1 - \underline{Y} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 = \underline{I} - \underline{Y}_2 \underline{U}_2 = \underline{Y} \underline{U}_1 - (\underline{Y}_2 + \underline{Y}) \underline{U}_2. \end{cases}$$

Acestea sînt ecuațiile în care apar parametrii admitanță:

$$\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}, \quad \underline{Y}_{12} = -\underline{Y}, \quad \underline{Y}_{21} = \underline{Y}, \quad \underline{Y}_{22} = -(\underline{Y}_2 + \underline{Y}). \quad (43.31)$$

Cu relația (43.24), parametrii fundamentali sînt (cu $\underline{Z} = 1/\underline{Y}$):

$$\underline{A} = 1 + \underline{Y}_2 \underline{Z}, \quad \underline{B} = \underline{Z}, \quad \underline{C} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Z} \underline{Y}_1 \underline{Y}_2, \quad \underline{D} = 1 + \underline{Y}_1 \underline{Z}, \quad (43.32)$$

iar cu relația (43.22) se pot obține parametrii impedanță.

3. *Cuadripolul în punte* (fig. 43.7, c). La structuri mai complicate e preferabil să studiem direct regimuri particulare de gol ($\underline{I}_2 = 0$ sau $\underline{I}_1 = 0$) și scurtcircuit ($\underline{U}_2 = 0$ sau $\underline{U}_1 = 0$), folosind relațiile (43.8), (43.12), (43.17). În cazul cuadripolului în punte, dacă secundarul e în gol ($\underline{I}_2 = 0$), rezultă:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{Z_1 + Z_3} + \frac{\underline{U}_1}{Z_2 + Z_4} = \underline{U}_1 \left(\frac{1}{Z_1 + Z_3} + \frac{1}{Z_2 + Z_4} \right)$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 - Z_1 \frac{\underline{U}_1}{Z_1 + Z_3} - Z_4 \frac{\underline{U}_1}{Z_2 + Z_4} = \underline{U}_1 \frac{Z_2 Z_3 - Z_1 Z_4}{(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_4)}.$$

Se obține:

$$\underline{A} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \right)_{\underline{I}_2=0} = \frac{(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_4)}{Z_2 Z_3 - Z_1 Z_4}; \quad \underline{C} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \right)_{\underline{I}_2=0} = \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4}{Z_2 Z_3 - Z_1 Z_4} \quad (43.33)$$

Dacă secundarul e în scurtcircuit ($\underline{U}_2 = 0$), rezultă:

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_1 \frac{1}{\frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} + \frac{Z_3 Z_4}{Z_3 + Z_4}} = \underline{U}_1 \frac{(Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4)}{Z_1 Z_2 (Z_3 + Z_4) + Z_3 Z_4 (Z_1 + Z_2)}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} - \underline{I}_1 \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4} = \underline{U}_1 \frac{Z_2 Z_3 - Z_1 Z_4}{Z_1 Z_2 (Z_3 + Z_4) + Z_3 Z_4 (Z_1 + Z_2)}.$$

Se obține

$$\underline{B} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{U}_2=0} = \frac{Z_1 Z_2 (Z_3 + Z_4) + Z_3 Z_4 (Z_1 + Z_2)}{Z_2 Z_3 - Z_1 Z_4}; \quad \underline{D} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{U}_2=0} = \frac{(Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4)}{Z_2 Z_3 - Z_1 Z_4}. \quad (43.33)$$

Ca verificare, se poate utiliza condiția de reciprocitate (43.9). Ceilalți parametri rezultă cu relațiile (43.12) și (43.17).

4. *Transformatorul liniar* (fără miez de fier). Considerăm transformatorul studiat în paragraful 36.3.2, și care constituie un cuadripol cu ecuațiile (36.24), care se pot scrie :

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1) I_1 - j\omega L_{12} I_2 \\ \underline{U}_2 = j\omega L_{21} I_1 - (R_2 + j\omega L_2) I_2 \end{cases}$$

Se constată imediat că acestea sînt ecuațiile care conțin parametrii impedanță :

$$\underline{Z}_{11} = R_1 + j\omega L_1, \quad \underline{Z}_{12} = -j\omega L_{12}, \quad \underline{Z}_{21} = j\omega L_{21}, \quad \underline{Z}_{22} = -(R_2 + j\omega L_2). \quad (43.34)$$

Cu relația (43.24) rezultă parametrii fundamentali :

$$\underline{A} = \frac{R_1 + j\omega L_1}{j\omega L_{21}}; \quad \underline{B} = \frac{\omega^2 L_{12}^2 + (R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2)}{j\omega L_{21}}; \quad \underline{C} = \frac{1}{j\omega L_{21}}; \quad \underline{D} = \frac{R_2 + j\omega L_2}{j\omega L_{21}}. \quad (43.35)$$

5. *Cuadripoli degenerați*. În figura 43.8 sînt indicate cîteva tipuri de cuadripoli degenerați, împreună cu parametrii corespunzători (care au sens). Parametrii au fost deduși din ecua-

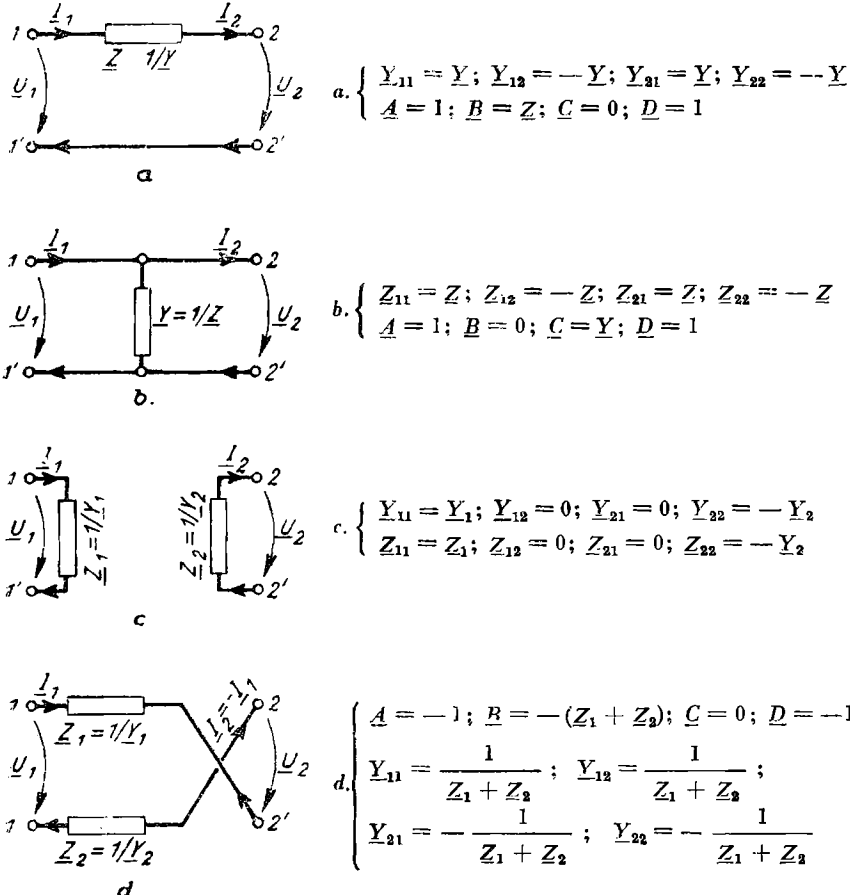


Fig. 43.8

țiile de mai jos, scrise pentru schemele a, b, c, d , în ipoteza că cei doi curenți ai fiecărei perechi de borne sînt egali și opuși (cuadripoli diporți).

$$a) \underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{Z}I_2; \quad I_1 = I_2 \quad (\text{ecuațiile fundamentale})$$

$$b) \underline{U}_1 = \underline{U}_2; \quad I_1 = \underline{Y}\underline{U}_2 + I_2 \quad (\text{ecuațiile fundamentale})$$

(43.36)

$$c) \underline{U}_1 = \underline{Z}_1 I_1; \quad \underline{U}_2 = -\underline{Z}_2 I_2 \quad (\text{ecuațiile cu parametrii impedanță})$$

$$d) \underline{U}_1 = -\underline{U}_2 - (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)I_2; \quad I_1 = -I_2 \quad (\text{ecuațiile fundamentale})$$

În cazurile a și d nu au sens (sînt infiniți) parametrii impedanță, deoarece $\underline{C} = 0$ și $\underline{\Delta}_y = 0$; în cazul b nu au sens (sînt infiniți) parametrii admitanță, deoarece $\underline{B} = 0$ și $\underline{\Delta}_z = 0$; în cazul c nu au sens parametrii fundamentali, deoarece $\underline{Y}_{12} = 0$ și $\underline{Z}_{12} = 0$, iar cuadripolul nu poate realiza nici un transfer de energie între primar și secundar.

43.4.2. Determinarea experimentală. Fără a cunoaște structura internă a cuadripolului, valorile numerice ale parametrilor săi (la o frecvență dată) se pot determina experimental. De obicei se fac următoarele încercări :

— o încercare de mers în gol ($\underline{I}_2 = 0$), cu alimentare directă (pe la bornele primare);

— o încercare de scurtcircuit ($\underline{U}_2 = 0$), cu alimentare directă;

— o încercare de mers în gol ($\underline{I}'_1 = -\underline{I}_1 = 0$), cu alimentare inversă (pe la bornele secundare);

— o încercare de scurtcircuit ($\underline{U}'_1 = \underline{U}_1 = 0$), cu alimentare inversă.

Sînt suficiente trei din aceste patru încercări, în care se măsoară trei dintre următoarele impedanțe complexe :

Impedanța primară de mers în gol (v. și 43.12)

$$\underline{Z}_{10} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \right)_{\underline{I}_2=0} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}} = \underline{Z}_{11}. \quad (43.37)$$

Impedanța primară de scurtcircuit (v. și 43.17)

$$\underline{Z}_{1,c} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \right)_{\underline{U}_2=0} = \frac{\underline{B}}{\underline{D}} = \frac{1}{\underline{Y}_{11}}. \quad (43.38)$$

Impedanța secundară de mers în gol (v. 43.26 și 43.12)

$$\underline{Z}_{20} = \left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{I}'_1=0} = \frac{\underline{D}}{\underline{C}} = -\underline{Z}_{22}. \quad (43.39)$$

Impedanța secundară de scurtcircuit (v. 43.26 și 43.17)

$$\underline{Z}_{2,c} = \left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{U}'_1=0} = \frac{\underline{B}}{\underline{A}} = -\frac{1}{\underline{Y}_{22}}. \quad (43.40)$$

Măsurările se fac cu puntea de impedanțe (puntea Wheatstone de curent alternativ); sau cu voltmetrul și ampermetrul (pentru măsurarea valorilor efective și deci a modulelor acestor impedanțe) și cu wattmetrul (pentru măsurarea argumentului acestor impedanțe, prin intermediul factorului de putere $\cos \varphi = P/UI$).

Din (43.38...43.40) rezultă că cele patru impedanțe sînt legate prin relația

$$|\underline{Z}_{10}\underline{Z}_{2,c} = \underline{Z}_{20}\underline{Z}_{1,c}, \quad (43.40')$$

din care cauză numai trei valori independente. Parametrii fundamentali se determină din relațiile de mai sus și din condiția de reciprocitate $\underline{A}\underline{D} - \underline{B}\underline{C} = 1$. Se obțin expresiile :

$$\left. \begin{aligned} \underline{C} &= \pm \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{20}(\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{1,c})}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{10}(\underline{Z}_{20} - \underline{Z}_{2,c})}}; \quad \underline{A} = \underline{C}\underline{Z}_{10} \\ \underline{D} &= \underline{C}\underline{Z}_{20}; \quad \underline{B} = \underline{C}\underline{Z}_{20}\underline{Z}_{1,c} = \underline{C}\underline{Z}_{10}\underline{Z}_{2,c} \end{aligned} \right\} \quad (43.41)$$

Cele două semne de mai sus arată că există doi cuadripoli — cu parametrii fundamentali diferiți prin semn — care au aceleași impedanțe de gol și scurtcircuit. Această ambiguitate provine din faptul că, la măsurarea impedanțelor complexe, bornele de intrare respective pot fi intervertite, fără ca rezultatul măsurării să fie afectat. Ambiguitatea se poate înlătura, dacă se măsoară și defazajul tensiunilor la mersul în gol, adică

$$\alpha = \arg \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \right)_{I_2=0} \quad (43.42)$$

după marcarea prealabilă a bornelor cu 1, 1' și 2, 2'.

Observație : La cuadripoli simetrici, $\underline{A} = \underline{D}$, $\underline{Z}_{10} = \underline{Z}_{20}$, $\underline{Z}_{1,c} = \underline{Z}_{2,c}$ și relațiile (43.41) capătă forma :

$$\underline{A} = \underline{D} = \pm \sqrt{\frac{\underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_{1,c} - \underline{Z}_{1,c}}} = \pm \sqrt{\frac{1}{1 - \underline{Y}_{10}\underline{Z}_{1,c}}}; \quad \underline{C} = \frac{\underline{A}}{\underline{Z}_{10}}; \quad \underline{B} = \underline{A}\underline{Z}_{1,c}. \quad (43.43)$$

Pentru exemplificare, a se vedea paragraful 43.6.3, aplicația 2.

43.5. Impedanțe caracteristice

Un cuadripol alimentat direct (pe la bornele primare), care funcționează în sarcină cu o impedanță $\underline{Z}_2 = \underline{U}_2/\underline{I}_2$, conectată la bornele secundare (v. fig. 43.9, a), prezintă la bornele de alimentare o impedanță echivalentă complexă (v. rel. 43.7) :

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{e1} &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2}{\underline{C}\underline{U}_2 + \underline{D}\underline{I}_2} = \\ &= \frac{\underline{A}\underline{Z}_2 + \underline{B}}{\underline{C}\underline{Z}_2 + \underline{D}}, \end{aligned} \quad (43.44)$$

numită *impedanță de intrare primară* și dependentă de impedanța de sarcină $\underline{Z}_2$.

Un cuadripol alimentat invers (pe la bornele secundare), care funcționează în sarcină cu o impe-

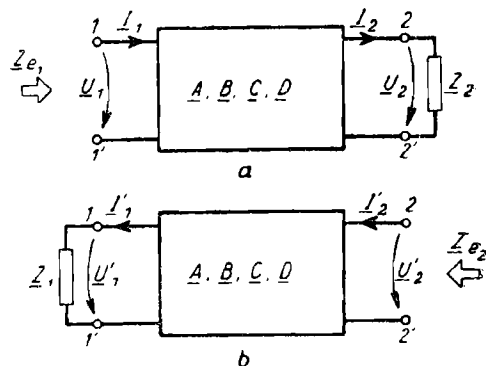


Fig. 43.9

dacă $\underline{Z}_1 = \underline{U}'_1 / \underline{I}'_1$, conectată la bornele primare (v. fig. 43.9, b), prezintă la bornele de alimentare o impedanță echivalentă complexă (v. rel. 43.26) :

$$\underline{Z}_{e2} = \frac{\underline{U}'_2}{\underline{I}_2} = -\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \frac{D\underline{U}'_1 + B\underline{I}'_1}{C\underline{U}'_1 + A\underline{I}'_1} = \frac{D\underline{Z}_1 + B}{C + A} \quad (43.45)$$

numită *impedanță de intrare secundară* și dependentă de impedanța de sarcină $\underline{Z}_1$. În general, $\underline{Z}_{e1} \neq \underline{Z}_2$ și $\underline{Z}_{e2} \neq \underline{Z}_1$.

43.5.1. Impedanțe caracteristice (iterative). Se numesc *impedanțe caracteristice iterative* ale unui cuadripol o pereche de impedanțe $\underline{Z}_{c1}$ și $\underline{Z}_{c2}$, definite cum urmează :

Impedanța caracteristică directă $\underline{Z}_{c1}$ e impedanța de sarcină, care trebuie conectată la bornele secundare, pentru ca impedanța de intrare primară să fie egală cu ea (fig. 43.10, a) :

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{c1} \longrightarrow \underline{Z}_{e1} = \underline{Z}_{c1} \quad (43.46)$$

Înlocuind aceste valori în relația (43.44) și rezolvînd ecuația obținută în raport cu $\underline{Z}_{c1}$, se obține cu relația (43.9).

$$\underline{Z}_{c1} = \frac{A - D \pm \sqrt{(A + D)^2 + 4}}{2C} \quad (43.47)$$

și în funcție de impedanțele de gol și scurtcircuit, cu relațiile (43.41),

$$\underline{Z}_{c1} = \frac{1}{2} [\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{20} \pm \sqrt{(\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{20})^2 + 4\underline{Z}_{20}\underline{Z}_{1sc}}] \quad (43.48)$$

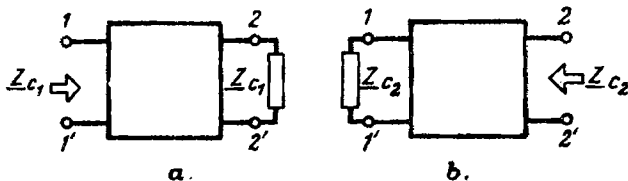


Fig. 43.10

Impedanța caracteristică inversă $\underline{Z}_{c2}$ e impedanța de sarcină, care trebuie conectată la bornele primare, pentru ca impedanța de intrare secundară să fie egală cu ea (fig. 43.10, b),

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{c2} \longrightarrow \underline{Z}_{e2} = \underline{Z}_{c2} \quad (43.49)$$

Înlocuind aceste valori în relația (43.45) și rezolvînd ecuația obținută în raport cu $\underline{Z}_{c2}$, se obține cu relația (43.9),

$$\underline{Z}_{c2} = \frac{D - A \pm \sqrt{(A + D)^2 + 4}}{2C} \quad (43.50)$$

și în funcție de impedanțele de gol și scurtcircuit, cu relațiile (43.41),

$$\underline{Z}_{c2} = \frac{1}{2} [\underline{Z}_{20} - \underline{Z}_{10} \pm \sqrt{(\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{20})^2 + 4\underline{Z}_{20}\underline{Z}_{1sc}}] \quad (43.51)$$

În expresiile de mai sus se alege semnul care asigură valori pozitive sau nule pentru părțile reale ale impedanțelor caracteristice. Numai astfel aceste impedanțe sînt realizabile în concret. Impedanțele caracteristice iterative prezintă importanță în problema *conservării* condițiilor de adaptare a sarcinii la generator, cînd între sarcină și generator trebuie să se intercaleze un cuadripol cu anumite funcțiuni (de exemplu, pentru separarea componentelor de curent continuu din circuitele generatorului și sarcinii). Pentru ca intercalarea unui cuadripol să nu modifice condițiile de adaptare dintre sarcină și generator, e necesar ca impedanța lui caracteristică directă să fie egală cu impedanța de sarcină (în care caz impedanța lui de intrare va fi de asemenea egală cu impedanța de sarcină, iar generatorul va funcționa în exact aceleași condiții ca în prezența sarcinii conectată direct), iar impedanța caracteristică inversă să fie egală cu impedanța interioară a generatorului (în care caz impedanța interioară a generatorului de tensiune echivalent ansamblului generator + cuadripol va fi de asemenea egală cu impedanța interioară a generatorului dat, iar sarcina va fi alimentată în aceleași condiții de adaptare ca în prezența generatorului conectat direct).

Aplicație: Considerăm cuadripolul din figura 43.11, la care $\omega L = R$. Impedanțele de gol și scurtcircuit sînt:

$$\underline{Z}_{1_0} = j\omega L + R = R(1 + j); \quad \underline{Z}_{2_0} = R$$

$$\underline{Z}_{1_{sc}} = j\omega L = jR; \quad \underline{Z}_{2_{sc}} = j\omega LR / (R + j\omega L) = \frac{R}{2} (1 + j),$$

iar impedanțele caracteristice rezultă:

$$\underline{Z}_{c_1} = \frac{1}{2} (j\omega L \pm \sqrt{4j\omega LR - \omega^2 L^2}) = R \left[\frac{j}{2} + \sqrt{j - \frac{1}{2}} \right] \approx R(0,556 + j1,4)$$

$$\underline{Z}_{c_2} = \frac{1}{2} (-j\omega L \pm \sqrt{4j\omega LR - \omega^2 L^2}) = R \left[-\frac{j}{2} + \sqrt{j - \frac{1}{2}} \right] \approx R(0,556 + j0,4).$$

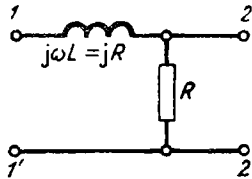


Fig. 43.11

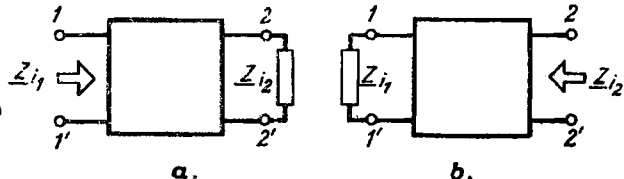


Fig. 43.12

43.5.2. Impedanțe imagini. Se numesc *impedanțe imagini* ale unui cuadripol o pereche de impedanțe $\underline{Z}_{i_1}$ și $\underline{Z}_{i_2}$, astfel încît prima e impedanța primară de intrare, dacă a doua e impedanța de sarcină conectată la bornele secundare, iar a doua e impedanța secundară de intrare, dacă prima e impedanța de sarcină conectată la bornele primare (fig. 43.12):

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{i_2} \rightarrow \underline{Z}_{e_1} = \underline{Z}_{i_1} \text{ și } \underline{Z}_1 = \underline{Z}_{i_1} \rightarrow \underline{Z}_{e_2} = \underline{Z}_{i_2}. \quad (43.52)$$

Introducînd aceste condiții în relațiile (43.44) (43.45), se obține cu relația (43.9) *impedanța imagine primară*:

$$\underline{Z}_{i_1} = \pm \sqrt{\frac{\underline{A}\underline{B}}{\underline{C}\underline{D}}} = \pm \sqrt{\underline{Z}_{1_0}\underline{Z}_{1_{sc}}}. \quad (43.53)$$

și *impedanța imagine secundară*:

$$\underline{Z}_{i_2} = \pm \sqrt{\frac{\underline{D}\underline{B}}{\underline{C}\underline{A}}} = \pm \sqrt{\underline{Z}_{2_0}\underline{Z}_{2_{sc}}}. \quad (43.54)$$

Semnul se alege astfel ca partea reală a acestor impedanțe să nu fie negativă, asigurându-se astfel posibilitatea de a le realiza în concret. Impedanțele imagini prezintă importanță în problema realizării condiției de adaptare a sarcinii la generator din punctul de vedere al egalității impedanței de sarcină cu impedanța interioară a generatorului, prin intercalarea unui cuadripol între generator și sarcină. Pentru aceasta e suficient ca impedanța imagine primară să fie egală cu impedanța interioară a generatorului, iar impedanța imagine secundară să fie egală cu impedanța de sarcină.

Aplicație: În cazul cuadripolului din figura 43.12 se obține:

$$Z_{i_1} = \pm \sqrt{(R + j\omega L)j\omega L} = R(0,453 + j1,098);$$

$$Z_{i_2} = \pm \sqrt{\frac{j\omega LR^2}{R + j\omega L}} = \frac{R}{\sqrt{2}}(1,098 + j0,453).$$

43.5.3. Impedanța caracteristică a unui cuadripol simetric. În cazul unui cuadripol simetric $\underline{A} = \underline{D}$, $\underline{Z}_{10} = \underline{Z}_{20}$, $\underline{Z}_{1c} = \underline{Z}_{2c}$ și toate impedanțele caracteristice și imagine, definite mai sus, coincid. Se obține astfel impedanța caracteristică $\underline{Z}_c$ a unui cuadripol simetric, egală cu impedanța de sarcină, care, fiind conectată la una dintre perechile de borne, asigură o impedanță de intrare egală cu ea la cealaltă pereche de borne. Din relația (43.48) rezultă:

$$\underline{Z}_c = \pm \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} = \pm \sqrt{\underline{Z}_{10}\underline{Z}_{1c}} \quad (43.55)$$

cu

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \underline{Z}_c \rightarrow \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_c. \quad (43.55')$$

43.6. Cuadripoli echivalenți și scheme echivalente

În regim permanent sinusoidal de frecvență dată, doi cuadripoli sînt complet echivalenți, *dacă pot fi substituiți unul altuia în rețeaua mai mare din care fac parte, fără ca să se modifice curenții și tensiunile din această rețea*. Determinarea unui cuadripol echivalent cu un cuadripol dat este o operație de *transfigurare* (v. par. 38.2). Pentru ca doi cuadripoli să fie complet echivalenți, e necesar și suficient să aibă aceleași ecuații caracteristice — adică aceiași parametri ($\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$) sau ($\underline{Z}_{11}$, $\underline{Z}_{12}$, $\underline{Z}_{21}$, $\underline{Z}_{22}$) sau ($\underline{Y}_{11}$, $\underline{Y}_{12}$, $\underline{Y}_{21}$, $\underline{Y}_{22}$), în cazul cuadripolilor diporți. Verificarea caracterului diport al cuadripolilor constituie în acest caz o operație strict necesară, prealabilă analizei valorilor parametrilor ¹.

Se numește *schemă echivalentă* a unui cuadripol dat reprezentarea în descn a structurii unui cuadripol fictiv, care ar avea acciași parametri, fără ca realizarea în concret a acestei structuri cu elemente dipolare pasive de circuit (rezistoare, bobine, condensatoare) să fie neapărat posibilă. În particular, nu e realizabilă în concret o schemă echivalentă, care conține impedanțe cu parte reală negativă. Dacă o schemă echivalentă este realizabilă în concret, pe baza ei se poate construi un *cuadripol echivalent* cuadripolului dat.

¹ Deoarece caracterul diport al unui cuadripol poate depinde de rețeaua exterioară în care e conectat (v. par. 43.2), echivalența a doi cuadripoli diporți e relativă la această rețea și poate să nu mai subsiste în cazul altei rețele exterioare. Din acest punct de vedere, numai echivalența cuadripolilor generali are un caracter absolut.

Echivalența cuadripolilor este considerată aici la o frecvență dată și poate să nu subsiste la o altă frecvență, dacă cei doi cuadripoli admit diferite dependențe de frecvență pentru parametrii corespunzători. Se pot considera și cuadripoli echivalenți la orice frecvență, după cum se pot considera echivalențe parțiale — valabile cu aproximație — în anumite limite de variație a condițiilor de funcționare. În sfârșit, în anumite cazuri (de ex. la transformatoare și mașini electrice), se pot considera scheme echivalente reduse, în care curenții, tensiunile și parametrii diferă de valorile lor reale prin anumiți factori numerici (de reducere) bine determinați.

Deoarece un cuadripol diport liniar, pasiv și reciproc are trei parametri complecși independenți, schemele echivalente, determinabile pentru orice cuadripol nedegenerat din această clasă trebuie să corespundă unor structuri cu cel puțin trei impedanțe complexe. Cele mai simple scheme de acest fel sînt cele în T și în π . În aplicații se mai folosesc și alte scheme mai complicate — de exemplu schema în punte (v. aplicația 3 de la par. 43.4.1), pentru care se poate demonstra că există o structură realizabilă în concret, oricare ar fi cuadripolul liniar pasiv și reciproc dat.

43.6.1. Schema echivalentă în T . În paragraful 43.4.1 am studiat cuadripolul în T (fig. 43.7, a), cu parametrii (43.29), (43.30). Dacă se consideră un cuadripol dat, cu parametrii fundamentali $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$, impedanțele și admitanțele schemei echivalente în T rezultă din relațiile (43.30) :

$$\underline{Y} = \underline{C}, \quad \underline{Z}_1 = \frac{\underline{A} - 1}{\underline{C}}, \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{D} - 1}{\underline{C}}. \quad (43.56)$$

Pentru cuadripolii simetrici $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$.

43.6.2. Schema echivalentă în Π . În paragraful 43.4.1. am studiat cuadripolul în Π (fig. 43.7, b), cu parametrii (43.31), (43.32). Dacă se consideră un cuadripol dat, cu parametrii fundamentali $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$, impedanțele și admitanțele echivalente în Π rezultă din relațiile (43.32) :

$$\underline{Z} = \underline{B}, \quad \underline{Y}_1 = \frac{\underline{D} - 1}{\underline{B}}, \quad \underline{Y}_2 = \frac{\underline{A} - 1}{\underline{B}}. \quad (43.57)$$

Pentru cuadripolii simetrici $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2$.

43.6.3. Aplicații : 1. Schemele echivalente ale unui transformator fără mișc de fier. Considerăm transformatorul din figura 43.13, a , la care presupunem că s-au ales astfel bornele 2, 2', încît $L_{12} > 0$ (dacă 1 și 2 sînt bornele polarizate ale înfășurărilor). Deoarece la orice transformator $L_{12} \leq \sqrt{L_1 L_2}$, mai admitem că, în acest caz, $L_1 > L_{12} > L_2$. Ecuațiile transformatorului sînt (36.24), iar parametrii impedanță sînt (43.34). Cu relațiile (43.57) și (43.24) rezultă parametrii schemei echivalente în T (notați aici cu accent, pentru a evita confuzia cu impedanțele transformatorului) din figura 43.13, b :

$$\begin{aligned} \underline{Z}'_1 &= \underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{21} = R_1 + j\omega(L_1 - L_{21}) & \underline{Z}'_2 &= -\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{21} = R_2 - j\omega(L_{21} - L_2) \\ \underline{Z}' &= \underline{Z}_{21} = j\omega L_{12}. \end{aligned} \quad (43.58)$$

În figura 43.13, d e indicată realizarea în concret a acestei scheme cu rezistoare, bobine (pentru reactanțe pozitive) și condensatoare (pentru reactanțe negative).

Cu relațiile (43.58) și (43.35) rezultă parametrii schemei echivalente în π (notați aici cu dublu accent), din figura 43.13, c. Calculăm numai impedanța ramurii din mijloc :

$$\underline{Z}'' = \underline{R} = - \frac{R_1 R_2 - \omega^2 (L_1 L_2 - L_{12}^2) + j \omega (L_1 R_2 + L_2 R_1)}{j \omega L_{21}} = - \frac{L_1 R_2 + L_2 R_1}{L_{21}} + j \omega \frac{R_1 R_2 - \omega^2 (L_1 L_2 - L_{12}^2)}{\omega^2 L_{21}}. \quad (43.59)$$

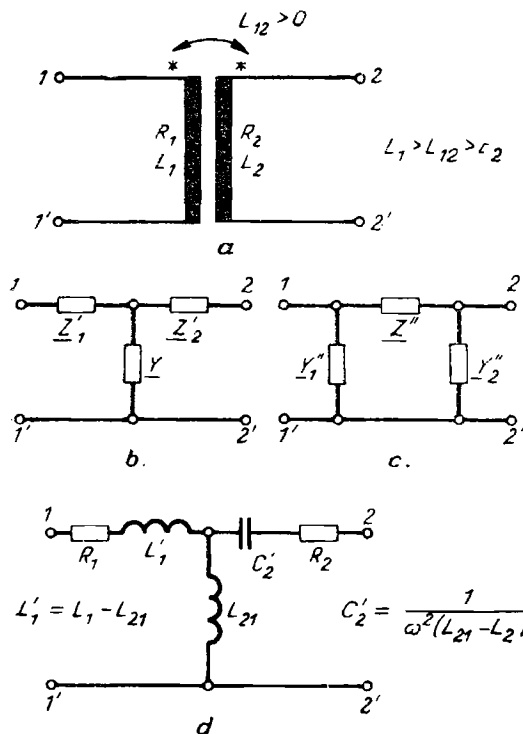


Fig. 43.13

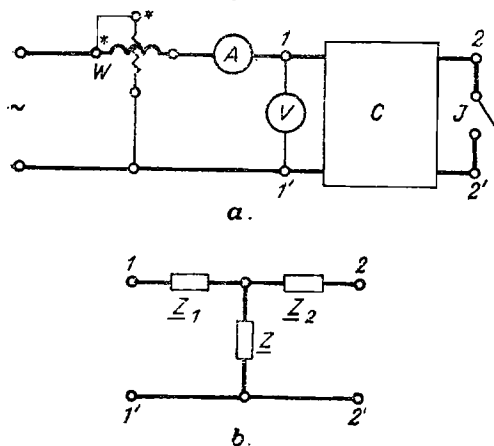


Fig. 43.14

Deoarece $\text{Re} \{ Z'' \} < 0$, schema echivalentă în π a unui transformator nu poate fi realizată în concret.

Observație Pentru transformatoare se folosesc frecvent scheme echivalente reduse.

2. Determinarea experimentală a parametrilor și schemei echivalente în T a unui cuadripol simetric. Cu montajul din figura 43.14, a s-au făcut încercări de mers în gol (§ deschis) și în scurtcircuit (§ închis) la un cuadripol simetric C, alimentat pe la bornele primare. La încercarea de mers în gol, s-au măsurat :

$$U_{10} = 200 \text{ V}, \quad I_{10} = 20 \text{ A},$$

$$P_{10} = 2400 \text{ W (inductiv)}$$

La încercarea de mers în scurtcircuit s-au măsurat :

$$U_{1sc} = 102,6 \text{ V}, \quad I_{1sc} = 10 \text{ A},$$

$$P_{1sc} = 984 \text{ W (inductiv)}.$$

$$\text{Rezultă : } Z_{10} = \frac{U_{10}}{I_{10}} = 10 \Omega ;$$

$$\cos \varphi_{10} = \frac{P_{10}}{U_{10} I_{10}} = 0,6$$

$$\sin \varphi_{10} = 0,8$$

$$Z_{1sc} = \frac{U_{1sc}}{I_{1sc}} = 10,26 \Omega$$

$$\cos \varphi_{1sc} = \frac{P_{1sc}}{U_{1sc} I_{1sc}} = 0,96 ;$$

$$\sin \varphi_{1sc} = 0,28.$$

Impedanțele complexe primare de mers în gol și în scurtcircuit sînt deci :

$$\underline{Z}_{10} = Z_{10} e^{j\varphi_{10}} = 6 + j8 \Omega,$$

$$\underline{Z}_{1sc} = Z_{1sc} e^{j\varphi_{1sc}} = 9,84 + j2,88 \Omega.$$

Cu relația (43.41), parametrii fundamentali sînt :

$$\underline{A} = \underline{D} = \pm \sqrt{\frac{6 + j8}{-3,84 + j5,12}} = \pm (1 - 0,75j);$$

$$\underline{B} = \underline{Z}_{1,c} \underline{A} = \pm (12,01 - 4,48j); \quad \underline{C} = \underline{A}/\underline{Z}_{1_0} = \mp 0,125j.$$

Cu relația (43.56), impedanțele cuadripolului în T echivalent din figura 43.14, b sînt :

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{C}} = \pm 8j; \quad \underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \begin{cases} 6 \\ 6 + j16 \end{cases}.$$

Există deci două scheme echivalente în T, ambele realizabile în concret (fig. 43.15, a și b), compatibile cu măsurările efectuate. Aceasta, deoarece măsurările de impedanțe au rezultate invariante la permutarea bornelor primare ($1 \rightarrow 1', 1' \rightarrow 1$). Cei doi cuadripoli din figura 43.15 au parametri egali și de semn schimbat și nu sînt echivalenți între ei decît după permutarea bornelor uneia dintre porți.

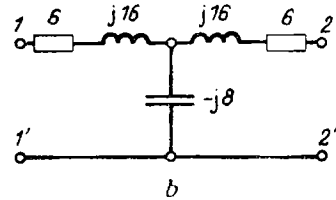
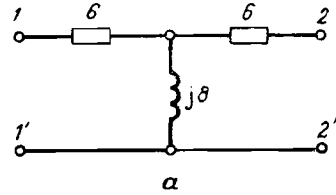


Fig. 43.15

43.7. Cuadripoli neregreci

Prezentăm mai jos exemple de cuadripoli neregreci, care au patru parametri independenți, relațiile (43.9), (43.13), (43.18) nefiind valabile. În cazul rețelelor liniare, astfel de cuadripoli nu se pot realiza cu elemente de circuit dipolare (pentru care s-a demonstrat teorema reciprocității), ci numai cu elemente de circuit multipolare.

43.7.1. **Giratorul.** Se numește *girator* un cuadripol pasiv și liniar zis „antirecroc”, pentru că admite relațiile de antirecrocitate :

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} \quad \underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}, \quad \underline{AD} - \underline{BC} = -1. \quad (43.60)$$

Se numește *girator ideal* (cu simbolul grafic din fig. 43.16) un girator cu ecuațiile caracteristice :

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \pm r_g \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= \pm r_g \underline{I}_1 \end{aligned} \right\} (r_g > 0), \quad (43.61)$$

în care semnul depinde de notarea bornelor. Giratorul ideal are deci parametri de cuadripol:

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_{11} &= 0; & \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} &= \pm r_g & \underline{Z}_{22} &= 0 \\ \underline{A} &= 0; & \underline{B} &= \pm r_g & \underline{C} &= \pm \frac{1}{r_g}; & \underline{D} &= 0 \\ \underline{Y}_{11} &= 0; & \underline{Y}_{12} &= \underline{Y}_{21} &= \pm \frac{1}{r_g}; & \underline{Y}_{22} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (43.62)$$

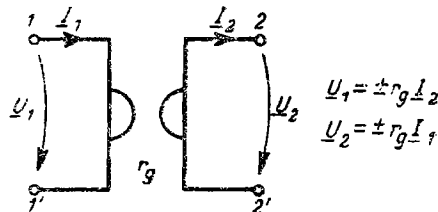


Fig. 43.16

care depind de un singur parametru distinct, rezistența de rotație $r_g > 0$.

43.7.2. Girator cu efect Hall. Se poate realiza un girator, dacă se utilizează efectul Hall, conform căruia, cînd un curent i străbate o plăcuță conductoare de grosime a (fig. 43.17, a), situată într-un cîmp magnetic transversal de inducție B_0 , apare o tensiune transversală u_H (tensiune Hall):

$$u_H = -k_H \frac{iB_0}{a} = r_g i, \quad (43.63)$$

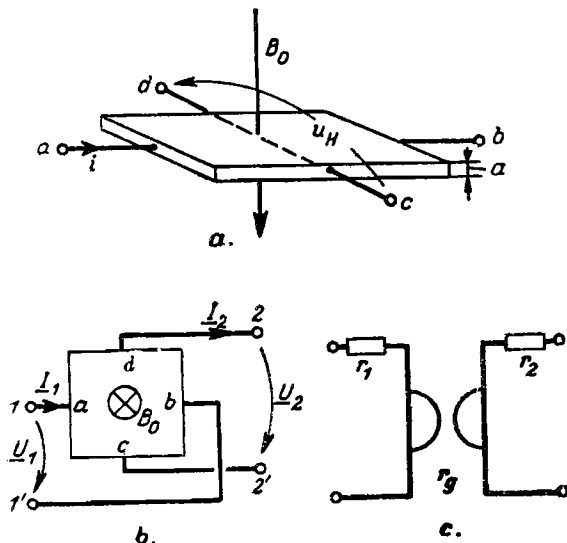


Fig. 43.17.

cu un astfel de sens de referință, încît cele trei sensuri ale mărimilor i , B_0 , u_H formează un triedru drept. Constanta k_H se numește *constanta Hall* și e negativă pentru efectul Hall normal, care se poate interpreta cu mijloacele fizicii clasice, ca fiind efectul forțelor pe care cîmpul magnetic le exercită asupra electorilor de conducție în mișcare.

Dacă vom considera acum o plăcuță Hall constituind un cuadripol, ca în figura 43.17, b, tensiunea primară $U_1 = U_a = U_{ab}$ va fi suma dintre căderea de tensiune $r_1 I_1$, în care $r_1 = r_{ab}$ e rezistența plăcuței în sensul ab și căderea de tensiune Hall $-r_g I_2$ (produsă de curentul $I_2 = I_{cd}$) cu sensul, determinat după regula de mai sus, de la b la a , adică opus curentului I_1 :

$$U_1 = r_1 I_1 - r_g I_2.$$

Tensiunea secundară $U_2 = U_{2'} = -U_{cd}$ va fi egală și de semn contrar cu suma dintre căderea de tensiune $r_2 I_2$ (în care $r_2 = r_{cd}$ e rezistența plăcuței în sensul cd) și căderea de tensiune Hall $r_g I_1$ (produsă de curentul I_1),

$$-U_2 = r_2 I_2 + r_g I_1.$$

Ecuatiile giratorului cu efect Hall sînt deci:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= r_1 I_1 - r_g I_2 \\ U_2 &= -r_g I_1 - r_2 I_2 \end{aligned} \right\} \quad (43.64)$$

și verifică condiția de antireciprocată $Z_{12} = Z_{21} = -r_g$. Schema echivalentă a giratorului cu efect Hall (fig. 43.17, c) cuprinde un girator ideal cu rezistențele r_1 , respectiv r_2 , în serie în circuitul primar, respectiv secundar.

43.7.3. Cuadripol neregiproc realizat cu o mașină asincronă. Considerăm un motor asincron, care reprezintă un receptor trifazat practic echilibrat, cu impedanța directă $Z_d = \frac{1}{Y_d}$ și impedanța inversă $Z_i = \frac{1}{Y_i}$,

conectat ca în figura 43.18, astfel încît să constituie un cuadripol diport. Tensiunea directă, respectiv inversă, rezultă cu relația (42.6):

$$U_d = \frac{1}{3} (U_1 + a U_2); \quad U_i = \frac{1}{3} (U_1 + a^2 U_2), \quad (43.65)$$

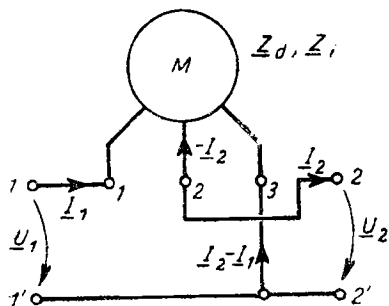


Fig. 43.18.

deoarece pentru calculul componentei *directă* și *inversă* a unui sistem de tensiuni stelate se poate alege un punct neutru arbitrar (v. 42.1.5, b), de exemplu borna 3, astfel că $\underline{U}_{13} = \underline{U}_1$, $\underline{U}_{23} = \underline{U}_2$, $\underline{U}_{33} = 0$.

Curentul direct, respectiv invers, rezultă :

$$\underline{I}_d = \frac{\underline{U}_d}{\underline{Z}_d} = \frac{\underline{U}_1 + a\underline{U}_2}{3} \underline{Y}_d; \quad \underline{I}_i = \frac{\underline{U}_i}{\underline{Z}_i} = \frac{\underline{U}_1 + a^2 \underline{U}_2}{3} \underline{Y}_i, \quad (\underline{I}_b = 0) \quad (43.66)$$

Curenții de fază sînt, în acest caz, $\underline{I}_1$, $-\underline{I}_2$, $\underline{I}_2 - \underline{I}_1$ și se pot calcula din relația (43.66) :

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}_d + \underline{I}_i = \underline{U}_1 \left(\frac{\underline{Y}_d + \underline{Y}_i}{3} \right) + \underline{U}_2 \left(\frac{a \underline{Y}_d + a^2 \underline{Y}_i}{3} \right) \\ \underline{I}_2 = -(-\underline{I}_2) = -(a^2 \underline{I}_d + a \underline{I}_i) = -\underline{U}_1 \left(\frac{a^2 \underline{Y}_d + a \underline{Y}_i}{3} \right) - \underline{U}_2 \left(\frac{\underline{Y}_d + \underline{Y}_i}{3} \right). \end{cases} \quad (43.67)$$

Se observă că parametrii admitanță ai acestui cuadripol sînt :

$$\left. \begin{aligned} \underline{Y}_{11} &= \frac{1}{3} (\underline{Y}_d + \underline{Y}_i); & \underline{Y}_{12} &= \frac{1}{3} (a \underline{Y}_d + a^2 \underline{Y}_i) \\ \underline{Y}_{21} &= -\frac{1}{3} (a^2 \underline{Y}_d + a \underline{Y}_i) & \underline{Y}_{22} &= -\frac{1}{3} (\underline{Y}_d + \underline{Y}_i) \end{aligned} \right\}. \quad (43.68)$$

Cuadripolul e simetric ($\underline{Y}_{11} = -\underline{Y}_{22}$), dar nerez reciproc ($\underline{Y}_{12} \neq -\underline{Y}_{21}$ (deoarece $\underline{Y}_d \neq \underline{Y}_i$).

44. UTILIZAREA CALCULULUI MATRICEAL

Studiul rețelelor electrice liniare — și în particular al cuadripolilor — se poate face în mod sistematic cu ajutorul calculului matriceal.

Deși relațiile fundamentale ale acestor rețele (teoremele lui Kirchhoff) sînt ecuații algebrice de gradul întâi, rezolvarea rețelelor devine foarte dificilă în cazul unui număr mare de ecuații și de necunoscute. Metodele în care se utilizează reducerea numărului de ecuații (v. par. 38.3 și 38.4) sau simplificarea lor, prin efectuarea unor schimbări de variabile — ca și metodele în care se utilizează interconexiunea unor rețele mai simple, cunoscute, pentru a deduce parametrii unei rețele mai complicate — se dezvoltă deosebit de sistematic în scrierea matriceală. Pe această cale, „mecanizarea“ calculului e atît de avansată, încît aplicarea unor reguli bine determinate de operare face inutilă urmărirea atentă a diferitelor convenții, utilizate în formularea relațiilor (de ex. a convențiilor de semne), sau referirea la figuri ajutătoare. De aceea, metodele matriceale sînt deosebit de apte pentru efectuarea operațiilor cu calculatoare electronice. Totodată, extrema conciziune și eleganța de formulare a raționamentelor în scrierea matriceală asigură eficacitatea acestei scrieri în cercetările teoretice. Fără a pierde din vedere aceste avantaje, trebuie însă să nu se uite că metodele matriceale nu aduc nimic nou din punctul de vedere al proprie-

tăților fundamentale ale rețelelor liniare. Orice problemă rezolvată matriceal e rezolvabilă și numai cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff. În cele ce urmează vom prezenta numai aplicațiile calculului matriceal la studiul cuadripolilor.

44.1. Matrice și operații algebrice cu matrice

44.1.1. Definiții. O matrice p -dimensională e un ansamblu de elemente cu p indici $a_{k_1 k_2 \dots k_p}$, ordonat după fiecare indice în parte într-o configurație p -dimensională, pentru care se definesc operații de adunare, amplificarea cu un scalar și înmulțire (v. par. 44.1.2)¹.

În aplicarea calculului matriceal la studiul rețelelor electrice interesează matricele bidimensionale, ale căror elemente a_{ij} au doi indici $i = 1, 2, \dots, m$ și $j = 1, 2, \dots, n$ și sînt ordonabile într-un tablou dreptunghiular cu m linii (primul indice e al liniei) și n coloane (al doilea e al coloanei):

$$\|a\| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (44.1)$$

Pentru simbolul unei matrice vom folosi simbolul elementului ei generic, pus între bare duble verticale. Explicit, matricea se reprezintă prin tabloul elementelor ei, puse între aceleași bare duble. Pentru a evita confuziile care se pot face prin așezarea prea apropiată a elementelor (care pot avea expresii mai complicate), se reprezintă matricele și ca în figura 44.1, prin tablouri împărțite în căsuțe. Elementele unei matrice pot fi numere (reale sau complexe, ca în exemplele pe care le vom da), dar și funcții, operatori etc. — cu singura condiție ca pentru aceste elemente operațiile de adunare, amplificarea cu un scalar și înmulțire să fi fost definite în prealabil. Elementele unei matrice pot fi, la rîndul lor, matrice. Numerele de linii (m) și de coloane (n) definesc ordinul matricei, notat $m \times n$.

Se definesc următoarele tipuri particulare de matrice (v. fig. 44.2): a) matrice dreptunghi-

7	-5	0	1+j
0	j	3	1,2

a

7	-5	0
0	j	3
18	7	7

b.

-4	+4	-j	+j

c

-4
0
j5

d.

3	1+j	-j	3+j
1+j	-2	4	18
-j	4	0	0
3+j	18	0	j5

e

4	0	0	0
0	j	0	0
0	0	1+j	0
0	0	0	-3

f.

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}

 $\|a\| =$

1	0	0
0	1	0
0	0	1

g.

0	0	0
0	0	0
0	0	0

h

7

i

Fig. 44.1.

Fig. 44.2.

¹ Uneori, în literatura tehnică, se confundă conceptul de matrice cu acela de tensor. Un tensor de ordinul p e o mărime geometrică, definită într-un spațiu m -dimensional, care caracterizează o proprietate fizică sau geometrică intrinsecă în acest spațiu. În raport cu fiecare sistem de coordonate din acest spațiu, tensorul are m^p componente scalare, care constituie o matrice p -dimensională. La schimbarea sistemului de coordonate, matricea componentelor tensorului se schimbă (deși tensorul e același) după anumite transformări liniare, asociate transformărilor coordonatelor.

lară, cu $m \neq n$; b) matrice pătratică, cu $m = n$ (matrice pătratică de ordinul n); c) matrice linie, cu $m = 1$ și $n \neq 1$, ale cărei elemente b_{1k} au primul indice egal cu unitatea, din care cauză acest indice nu se mai scrie:

$$b_{1k} = b_k \quad (k = 1, 2, \dots, n);$$

d) matrice coloană, cu $m \neq 1$, $n = 1$, ale cărei elemente c_{j1} au al doilea indice egal cu unitatea, din care cauză acest indice nu se mai scrie:

$$c_{j1} = c_j \quad (j = 1, 2, \dots, m);$$

e) matrice simetrică, cu elementele simetrice față de diagonala principală egale între ele: $a_{ik} = a_{ki}$; f) matrice diagonală, cu toate elementele cu indici distincți egale cu zero: $a_{ik} = 0$ ($i \neq k$); g) matrice unitate, $\|1\|$ sau $\|\delta\|$, cu toate elementele nule, afară de cele cu indici egali (diagonala principală), care sînt egale cu unitatea: $\delta_{ik} = 0$ ($i \neq k$), $\delta_{ii} = 1$; h) matrice nulă, $\|0\|$ notată și fără bare cu cifra 0, cu toate elementele nule; i) matrice cu un singur element, cu $m = 1$, $n = 1$ (și care nu trebuie identificată cu unicul ei element).

Fiecărei matrice pătratice $\|a\|$ i se poate asocia un determinant: determinantul

$$\Delta = |a| = \det \|a\| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (44.2) \quad \|a\| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = {}^1 a \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}_t$$

format cu elementele ei. Dacă acest determinant e nul, matricea se numește *matrice degenerată*.

Fig. 44.3.

Se numește *matrice transpusă* a unei matrice $\|a\|$ date, de ordinul $m \times n$, cu elementele a_{ik} , o altă matrice $\|b\| = \|a\|_t$ de ordinul $n \times m$, ale cărei elemente $b_{ik} = (a_{ik})_t$ sînt:

$$b_{ik} = (a_{ik})_t = a_{ki}. \quad (44.3)$$

Dacă $\|b\|$ e transpusa lui $\|a\|$, rezultă că $\|a\|$ e transpusa lui $\|b\|$ și cele două matrice (fig. 44.3) provin una din cealaltă prin schimbarea liniilor în coloane.

Observație: Determinantul transpusei e egal cu determinantul matricei (patratice) date, deoarece schimbarea liniilor în coloane nu afectează valoarea unui determinant.

4.1.2. Operații algebrice cu matrice. Două matrice de același ordin $m \times n$ sînt egale, dacă au elementele omologe egale

$$\|a\| = \|b\|, \text{ dacă și numai dacă } a_{ik} = b_{ik} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, m \\ k = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (44.4)$$

Egalitatea a două matrice de ordinul $m \times n$ e echivalentă cu mn egalități între elementele ei. **Observație** Egalitatea matricelor pătratice atrage după sine egalitatea determinantilor lor, dar reciproca nu e adevărată.

Operațiile algebrice fundamentale caracteristice matricelor sînt adunarea, amplificarea cu un scalar și înmulțirea. Alte operații sînt derivate din acestea: scăderea se definește prin adunarea unei matrice cu o a doua, amplificată cu -1 , împărțirea cu un scalar μ se definește prin amplificarea cu $\frac{1}{\mu}$, ridicarea la o putere întreagă, prin înmulțirea repetată cu ea însăși (v. și par. 44.1.3.).

Adunarea matricelor de același ordin e operația definită de adunarea elementelor omologe, două cîte două, și conduce la o matrice de același ordin:

$$\|c\| = \|a\| + \|b\|, \quad \text{numai dacă } c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}. \quad (44.5)$$

-4	0
1	4
1+j	j

 $+$

3	3
-1	4j
0	1-j

 $=$

-1	3
0	4+j
1+j	1

În figura 44.4 e exemplificată adunarea a două matrice de ordinul 3×2 .

Fig. 44.4.

Observație: Determinantul sumei a două matrice pătratice nu e egal cu suma determinantilor lor.

Amplificarea unei matrice cu un scalar λ e operația definită de amplificarea tuturor elementelor matricei cu acel scalar și conduce la o matrice de același ordin :

$$\|d\| = \lambda \|a\|, \text{ dacă și numai dacă } \boxed{d_{ik} = \lambda a_{ik}}. \quad (44.6)$$

În figura 44.5 sînt exemplificate amplificările unei matrice de ordinul 2×3 , cu scalarul 3, respectiv $\frac{1}{2}$. Ultima se mai numește împărțirea matricei cu scalarul 2.

Observație: Determinantul matricei pătratice $\lambda \|a\|$ de ordinul n nu e egal cu produsul prin λ al determinantului lui $\|a\|$:

$$\det(\lambda \|a\|) = \lambda^n \det \|a\| \neq \lambda \det \|a\|.$$

La un determinant, un factor comun multiplică numai elementele unei linii sau ale unei coloane, pe cînd la o matrice multiplică toate elementele ei.

Înmulțirea matricelor $\|a\|$ și $\|b\|$ (în această ordine) e operația care duce la o matrice $\|c\|$, avînd numărul de linii al primei matrice și numărul de coloane al celei de-a doua, fiecare element c_{ik} al matricei produs fiind obținut prin însumarea tuturor produselor dintre elementele liniei i a primei matrice și elementele omologe ale coloanei k a celei de-a doua matrice (conform schemei din figura 44. 6) :

$$\|c\| = \|a\| \cdot \|b\|, \quad \text{dacă } c_{ik} = \sum_{r=1}^n a_{ir} b_{rk}. \quad (44.7)$$

$$\begin{array}{l} 3 \cdot \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1+j \\ 0 & 4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 3 & 3+j \\ 0 & 12 & 30 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1+j \\ 0 & 4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} & \frac{1+j}{2} \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Fig. 44.5.

$$\|a\| = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} = \|b\|$$

$$c_{21} = \sum_{r=1}^4 a_{2r} b_{r1}$$

Fig. 44.6.

O matrice de ordinul $x \times n$ se poate deci înmulți numai cu o matrice de ordinul $n \times y$ (în această ordine). O matrice $\|a\|$ de ordinul $m \times n$ se poate înmulți cu o matrice $\|b\|$ de ordinul $n \times m$ și în ordinea dată $\|a\| \cdot \|b\|$ și în ordinea inversă :

$$\|d\| = \|b\| \cdot \|a\| \quad \text{cu} \quad d_{ik} = \sum_{s=1}^n b_{is} a_{sk}. \quad (44.8)$$

În general însă $\|a\| \cdot \|b\| \neq \|b\| \cdot \|a\|$, adică produsul matricelor nu este comutativ. În figura 44.7 se dau exemple care ilustrează modul de calcul al produsului și necomutativitatea lui. Se demonstrează fără dificultăți că produsul matricelor este asociativ :

$$(\|a\| \cdot \|b\|) \cdot \|c\| = \|a\| \cdot (\|b\| \cdot \|c\|) = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \|c\| \quad (44.9)$$

a.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & j & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & j \\ 0 & 1 \\ -1 & -j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 3 \times 0 + 0 \times (-1) & 1 \times j + 3 \times 1 + 0 \times (-j) \\ 0 \times 2 + j \times 0 + 1 \times (-1) & 0 \times j + j \times 1 + 1 \times (-j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3+j \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

b.

$$\begin{bmatrix} 2 & j \\ 0 & 1 \\ -1 & -j \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & j & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + j \times 0 & 2 \times 3 + j \times j & 2 \times 0 + j \times 1 \\ 0 \times 1 + 1 \times 0 & 0 \times 3 + 1 \times j & 0 \times 0 + 1 \times 1 \\ -1 \times 1 + (-j) \times 0 & -1 \times 3 + (-j) \times j & -1 \times 0 + (-j) \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & j \\ 0 & j & 1 \\ -1 & -2 & -j \end{bmatrix}$$

c.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} j \\ 1 \\ -j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times j + 3 \times 1 + 0 \times (-j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+j \end{bmatrix}$$

d.

$$\begin{bmatrix} j \\ 1 \\ -j \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j & 3j & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -j & -3j & 0 \end{bmatrix}$$

Fig. 44.7.

(ceea ce permite să se suprimе parantezele la produsele de mai mulți factori, ordinea efectuării lor ne reprezentînd importanță) și distributiv față de adunare,

$$\|a\| \cdot (\|b\| + \|c\|) = \|a\| \cdot \|b\| + \|a\| \cdot \|c\|. \quad (44.10)$$

Produsul unei matrice cu matricea zero e egal cu matricea zero, dar produsul a două matrice poate fi matricea zero (fig. 44.8), fără ca vreunul din factori să fie matricea zero (există divizori ai lui zero).

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Fig. 44.8.

Determinantul matricei produs a două matrice pătratice e egal cu produsul determi-

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & j & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & j & 1 \end{bmatrix}$$

Fig. 44.9.

nantilor respectivi, deoarece regula (44.7) coincide cu aceea a înmulțirii determinantilor. Produsul unei matrice cu matricea unitate (și numai cu ea) e egal cu matricea dată (fig. 44.9), oricare ar fi ordinea factorilor.

Transpusa produsului a două matrice e egală cu produsul în ordine inversă al transpuselor lor :

$$(\|a\| \cdot \|b\|)_t = \|b\|_t \cdot \|a\|_t. \quad (44.11)$$

44.1.3. Inversiunea matricelor. Algebra matricelor nu coincide cu algebra numerelor, în principal din cauza necomutativității produsului și a existenței divizorilor lui zero. De aici rezultă că există mai multe matrice, care, înmulțind o matrice dată, conduc la același produs. Aceasta înseamnă că ecuația matriceală $\|x\| \cdot \|a\| = \|b\|$ nu are, în general, o soluție unică în $\|x\|$ (v. de ex. fig. 44.10). De aceea, pentru matrice nu se poate defini împărțirea, care la numere e definită ca operație inversă a înmulțirii. În cazul matricelor pătratice $\|a\|$, nedegenerate ($\det \|a\| \neq 0$), se poate înlocui împărțirea prin înmulțirea cu matricea inversă.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \frac{1}{2} & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 8 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\|x\| \times \|a\| = \|b\|$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 0 \\ \hline 0 & 4 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \frac{1}{2} & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 8 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Fig. 44.10.

Se numește *matrice inversă* a unei matrice $\|a\|$ date, nedegenerate, o matrice patrică de același ordin $\|b\| = \|a\|^{-1}$, al cărei produs cu $\|a\|$ e matricea unitate :

$$\|a\|^{-1} \cdot \|a\| = \|1\|. \quad (44.12)$$

Acest produs e comutativ. În adevăr înmulțind ambii membri ai acestei egalități la stînga cu $\|a\|$, se obține :

$$\|a\| \cdot (\|a\|^{-1} \cdot \|a\|) = (\|a\| \cdot \|a\|^{-1}) \cdot \|a\| = \|a\| \cdot \|1\| = \|a\|,$$

adică

$$\|a\| \cdot \|a\|^{-1} = \|1\|. \quad (44.12')$$

Determinantul inversei e egal cu valoarea inversă a determinantului matricei date :

$$\det \|a\|^{-1} = (\det \|a\|)^{-1}. \quad (44.13)$$

Inversa inversei unei matrice e egală cu ea însăși :

$$(\|a\|^{-1})^{-1} = \|a\|. \quad (44.14)$$

Elementele matricei inverse $\|b\| = \|a\|^{-1}$ se mai notează $b_{ik} = (a_{ik})^{-1}$. Se demonstrează că există o singură matrice inversă a unei matrice nedegenerate date.

Calculul matricei inverse. Se consideră sistemul de n ecuații liniare cu n necunoscute :

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{array} \right\}, \quad (44.15)$$

care se scrie strîns :

$$y_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k.$$

Se observă imediat că dacă se introduc matricele :

$$\|y\| = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \quad \|a\| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \|x\| = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (44.16)$$

relațiile (44.15) nu reprezintă altceva decât o înmulțire de matrice de forma (44.7), în care produsul și al doilea factor sînt matrice coecană (ale căror elemente au un al doilea indice egal cu unitatea, care nu se mai scrie):

$$\|y\| = \|a\| \cdot \|x\|. \quad (44.17)$$

Presupunind determinantul sistemului diferit de zero, sistemul se poate rezolva cu regula lui Cramer, ceea ce permite, pînă la urmă, exprimarea necunoscutelor x_j ca funcții de termenii liberi y_k . Se obține sistemul:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \dots + b_{1n}y_n \\ x_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \dots + b_{2n}y_n \\ &\vdots \\ x_n &= b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \dots + b_{nn}y_n \end{aligned} \right\}, \quad (44.18)$$

care se scrie strîns:

$$x_k = \sum_{l=1}^n b_{kl}y_l \quad (44.18')$$

și ai cărui coeficienți sînt (în baza regulii lui Cramer):

$$b_{kl} = \frac{A_{lk}(-1)^{l+k}}{\det \|a\|}, \quad (44.19)$$

unde A_{ij} e minorul elementului a_{ij} din $\det \|a\|$, adică subdeterminantul obținut suprimînd linia i și coloana j . Se observă imediat că introducînd matricea:

$$\|b\| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}, \quad (44.20)$$

relațiile (44.18) reprezintă produsul de matrice:

$$\|x\| = \|b\| \|y\|. \quad (44.21)$$

Înmulțind această relație la stînga cu $\|a\|$, se obține cu relația (44.17)

$$\|a\| \|x\| = \|a\| \|b\| \|y\| = \|y\|,$$

de unde rezultă că:

$$\|a\| \|b\| = \|1\|,$$

adică — matricea inversă fiind unică —

$$\|b\| = \|a\|^{-1}. \quad (44.22)$$

Matricea inversă a unei matrice date e deci matricea coeficienților sistemului de ecuații liniare (44.18), care reprezintă soluția sistemului de ecuații liniare (44.18), care reprezintă soluția sistemului de ecuații liniare (44.15), ai cărui coeficienți formează matricea dată. Regula (44.19) reprezintă chiar regula de calcul a matricei inverse, se poate scrie:

$$b_{kl} = (a_{kl})^{-1} = \frac{1}{\det \|a\|} (A_{kl})_t (-1)^{l+k} \quad (44.23)$$

și comportă următoarele etape (v. fig. 44.11):

- a) Se scrie matricea dată $\|a\|$ de elemente a_{kl} .
 b) Se scrie matricea transpusă $\|a\|_t$ de elemente a_{lk} .
 c) Se înlocuiește fiecare element al transpusei cu minorul corespunzător $A_{lk} = (A_{kl})_t$.
 d) Se înmulțește fiecare element al matricei $\|A\|_t$ astfel obținute cu $(-1)^{k+l}$.
 e) Se împarte matricea astfel obținută cu $\det \|a\|$.
 f) Se verifică calculul cu relațiile (44.12) sau (44.12').

$$\begin{aligned}
 \|a\| &= \begin{bmatrix} 2 & j & -j \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ j & -2 & 0 \\ -j & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -j \\ -2 & 2j & 2+j \\ 4 & -2j & -4-j \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -j \\ 2 & 2j & -2-j \\ 4 & 2j & -4-j \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5 \\ j & -1 & -j+0,5 \\ 2j & -1 & -2j+0,5 \end{bmatrix} = \|a\|^{-1} \\
 &\quad \text{a.} \qquad \qquad \text{b.} \qquad \qquad \text{c.} \qquad \qquad \text{d.} \qquad \qquad \text{e.} \\
 \|a\| \cdot \|a\|^{-1} &= \begin{bmatrix} 2 & j & -j \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5 \\ j & -1 & -j+0,5 \\ 2j & -1 & -2j+0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \|1\| \\
 (\det \|a\| &= -2j) \qquad \qquad \qquad \text{f.}
 \end{aligned}$$

Fig. 44.11.

44.2. Matricele cuadripolilor și forma matriceală a ecuațiilor

Ecuațiile caracteristice ale cuadripolilor dipoziți, liniari și pasivi (v. par. 43.3) se pot scrie sub formă matriceală, deoarece sînt sisteme de ecuații liniare de forma (44.15) cu $n = 2$. Parametrii cuadripolilor care sînt coeficienții acestor ecuații vor forma matrice caracteristice cuadripolilor respectivi.

44.2.1. Matricea fundamentală. Ecuațiile fundamentale (43.7) se scriu matriceal sub forma :

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (44.24)$$

sau

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \|A\| \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \quad (44.24')$$

în care

$$\|A\| = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix} \quad (44.25)$$

e matricea fundamentală, ale cărei elemente sînt legate la cuadripolii reciproci prin relația (43.9).

În adevăr, efectuînd produsul (44.24), se obține egalitatea de matrice :

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2 \\ \underline{C}\underline{U}_2 + \underline{D}\underline{I}_2 \end{bmatrix},$$

care, conform cu relația (44.4), duce la ecuațiile (43.7).

44.2.2. Matricea impedanță. Ecuatiile cu parametrii impedanță (43.11) se obțin din ecuațiile fundamentale, explicitind tensiunile $\underline{U}_1$ și $\underline{U}_2$. Matriceal, aceste ecuații se scriu sub forma :

$$\begin{Bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{Bmatrix} \quad (44.26)$$

sau

$$\begin{Bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{Bmatrix} = \|Z\| \cdot \begin{Bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{Bmatrix}, \quad (44.26')$$

în care

$$\|Z\| = \begin{Bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{Bmatrix} \quad (44.27)$$

e *matricea impedanță* a cuadripolului (la cuadripoli reciproci $\underline{Z}_{12} = -\underline{Z}_{21}$), ale cărei elemente se exprimă în funcție de parametrii fundamentali prin relațiile (43.12). Înmulțind la stînga cu $\|Z\|^{-1}$ ecuația (44.26'), se obține :

$$\|Z\|^{-1} \begin{Bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{Bmatrix} = \|Z\|^{-1} \cdot \|Z\| \cdot \begin{Bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{Bmatrix} \quad (44.28)$$

44.2.3. Matricea admitanță. Ecuatiile cu parametrii admitanță (43.16) se obțin din ecuațiile fundamentale, explicitind curenții $\underline{I}_1$ și $\underline{I}_2$. Matriceal, aceste ecuații se scriu sub forma :

$$\begin{Bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{Bmatrix} \quad (44.29)$$

sau

$$\begin{Bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{Bmatrix} = \|Y\| \cdot \begin{Bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{Bmatrix}, \quad (44.29')$$

în care

$$\|Y\| = \begin{Bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{Bmatrix} \quad (44.30)$$

e *matricea admitanță* a cuadripolului (la cuadripoli reciproci, $\underline{Y}_{12} = -\underline{Y}_{21}$), ale cărei elemente se exprimă în funcție de parametrii fundamentali, prin relațiile (43.17). Comparînd relația (44.29) cu relația (44.28), rezultă imediat că matricele impedanță și admitanță sînt inverse una alteia :

$$\|Y\| = \|Z\|^{-1} \quad \text{și} \quad \|Z\| = \|Y\|^{-1}. \quad (44.31)$$

În studiul conexiunilor cuadripolilor mai intervin și alte două matrice, pe care le vom numi *matrice mixte*.

44.2.4. **Matricea mixtă directă.** Ecuațiile cuadripolului se pot prezenta și explicitând variabilele $\underline{U}_1$ și $\underline{I}_2$ ca funcțiuni de $\underline{U}_2$ și $\underline{I}_1$. Din (43.7) rezultă ecuațiile :

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \frac{\underline{AD} - \underline{BC}}{\underline{D}} \underline{U}_2 + \frac{\underline{B}}{\underline{D}} \underline{I}_1 = \underline{D}_{11} \underline{U}_2 + \underline{D}_{12} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 &= -\frac{\underline{C}}{\underline{D}} \underline{U}_2 + \frac{1}{\underline{D}} \underline{I}_1 = \underline{D}_{21} \underline{U}_2 + \underline{D}_{22} \underline{I}_1,\end{aligned}\quad (44.32)$$

care se scriu matriceal sub forma :

$$\begin{vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{D}_{11} & \underline{D}_{12} \\ \underline{D}_{21} & \underline{D}_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_1 \end{vmatrix}\quad (44.33)$$

sau

$$\begin{vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{vmatrix} = \|D\| \cdot \begin{vmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_1 \end{vmatrix},\quad (44.33')$$

în care

$$\|D\| = \begin{vmatrix} \underline{D}_{11} & \underline{D}_{21} \\ \underline{D}_{12} & \underline{D}_{22} \end{vmatrix}\quad (44.34)$$

e *matricea mixtă (directă)* a cuadripolului cu elementele :

$$\underline{D}_{11} = \frac{\underline{AD} - \underline{BC}}{\underline{D}}; \quad \underline{D}_{12} = \frac{\underline{B}}{\underline{D}}; \quad \underline{D}_{21} = -\frac{\underline{C}}{\underline{D}}; \quad \underline{D}_{22} = \frac{1}{\underline{D}}\quad (44.35)$$

(la cuadripoli reciproci, $\underline{D}_{11} = \underline{D}_{22} = 1/\underline{D}$).

44.2.5. **Matricea mixtă inversă.** Înmulțind la stînga ecuația matriceală (44.33) cu inversa matricei $\|D\|$,

$$\|D\|^{-1} = \|F\| = \begin{vmatrix} \underline{F}_{11} & \underline{F}_{12} \\ \underline{F}_{21} & \underline{F}_{22} \end{vmatrix}\quad (44.36)$$

se obțin ecuațiile cuadripolului, sub forma în care $\underline{U}_2$ și $\underline{I}_1$ sînt exprimate în funcție de $\underline{U}_1$ și $\underline{I}_2$:

$$\begin{vmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{F}_{11} & \underline{F}_{12} \\ \underline{F}_{21} & \underline{F}_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{vmatrix}\quad (44.37)$$

sau :

$$\begin{vmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_1 \end{vmatrix} = \|F\| \cdot \begin{vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{vmatrix}.\quad (44.37')$$

Matricea $\|F\| = \|D\|^{-1}$ e *matricea mixtă inversă* și are elementele :

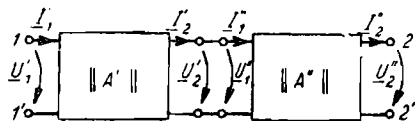
$$\underline{F}_{11} = \frac{1}{\underline{A}}; \quad \underline{F}_{12} = -\frac{\underline{B}}{\underline{A}}; \quad \underline{F}_{21} = \frac{\underline{C}}{\underline{A}}; \quad \underline{F}_{22} = \frac{\underline{AD} - \underline{BC}}{\underline{A}}\quad (44.38)$$

(la cuadripoli reciproci, $\underline{F}_{11} = \underline{F}_{22} = 1/\underline{A}$).

44.3. Conexiunile cuadripolilor dipozi

Cuadripolii de structură mai complicată pot fi considerați ca rezultând din conexiunea unor cuadripoli de structură mai simplă. Tipurile fundamentale de conexiune sînt conexiunea în lanț (în cascadă — fig. 44.12), conexiunea în serie (fig. 44.13), conexiunea în paralel (fig. 44.14), conexiunea serie-paralel (fig. 44.15) și conexiunea paralel-serie (fig. 44.16).

În cele ce urmează vom arăta cum se determină matricele cuadripolilor obținuți prin conexiunile indicate, din matricele cuadripolilor componenți. Vom considera mereu cazul a doi cuadripoli, dar rezultatele sînt valabile pentru un număr oarecare de cuadripoli dipozi, conectați în modul arătat.



$$\|A\| = \|A'\| \cdot \|A''\|$$

Fig. 44.12.

Vom presupune că prin conexiunea a doi cuadripoli dipozi nu se afectează caracterul diport al fiecăruia. În practică, această presupunere trebuie verificată în funcție de structura cuadripolilor considerați și, dacă nu e corectă, trebuie introdus la intrarea sau la ieșirea unuia dintre cei doi cuadripoli un transformator ideal, cu raportul de transformare egal cu unitatea, care asigură separarea conductivă a perechilor de borne în cauză. Mărimile referitoare la cei doi cuadripoli vor fi notate cu simplu accent (') respectiv cu dublu accent ('').

44.3.1. Conexiunea în lanț. În cazul acestei conexiuni (fig. 44.12), între mărimile celor doi cuadripoli și ale cuadripolului rezultat se impun relațiile :

$$\underline{U}_1 = \underline{U}'_1; \underline{I}_1 = \underline{I}'_1; \underline{U}'_2 = \underline{U}''_1; \underline{I}'_2 = \underline{I}''_1; \underline{U}_2 = \underline{U}''_2; \underline{I}_2 = \underline{I}''_2. \quad (44.39)$$

Ecuațiile fundamentale ale cuadripolilor componenți și ale celui rezultat sînt :

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \|A'\| \begin{bmatrix} \underline{U}'_1 \\ \underline{I}'_1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \underline{U}'_2 \\ \underline{I}'_2 \end{bmatrix} = \|A''\| \begin{bmatrix} \underline{U}''_2 \\ \underline{I}''_2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \|A\| \begin{bmatrix} \underline{U}''_2 \\ \underline{I}''_2 \end{bmatrix}. \quad (44.40)$$

Cu relațiile (44.39) se obține :

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}'_1 \\ \underline{I}'_1 \end{bmatrix} = \|A'\| \begin{bmatrix} \underline{U}''_2 \\ \underline{I}''_2 \end{bmatrix} = \|A'\| \|A''\| \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

și, comparînd cu relația (44.40), rezultă regula de compunere a matricelor :

$$\boxed{\|A\| = \|A'\| \cdot \|A''\|}. \quad (44.41)$$

Matricea fundamentală a cuadripolului rezultat e produsul matricelor fundamentale ale cuadripolilor componenți, conectați în lanț.

44.3.2. Conexiunea în serie. În cazul acestei conexiuni (fig. 44.3) se impun relațiile :

$$\underline{U}_1 = \underline{U}'_1 + \underline{U}''_1 \quad \underline{I}_1 = \underline{I}'_1 = \underline{I}''_1; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}'_2 = \underline{I}''_2; \quad \underline{U}_2 = \underline{U}'_2 + \underline{U}''_2. \quad (44.42)$$

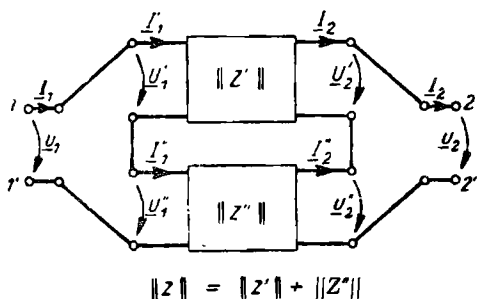


Fig. 44.13.

Ecuatiile cu parametrii impedanță ale cuadripolilor componenți și a celui rezultat sînt :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{U}'_1 \\ \underline{U}'_2 \end{bmatrix} &= \underline{\|Z'\|} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}'_1 \\ \underline{I}'_2 \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} \underline{U}''_1 \\ \underline{U}''_2 \end{bmatrix} &= \underline{\|Z''\|} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}''_1 \\ \underline{I}''_2 \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} &= \underline{\|Z\|} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (44.43)$$

Cu relațiile (44.42) se obține :

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}'_1 \\ \underline{U}'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{U}''_1 \\ \underline{U}''_2 \end{bmatrix} = \underline{\|Z'\|} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}'_1 \\ \underline{I}'_2 \end{bmatrix} + \underline{\|Z''\|} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}''_1 \\ \underline{I}''_2 \end{bmatrix} = [\underline{\|Z'\|} + \underline{\|Z''\|}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

și, comparînd cu relația (44.43), rezultă regula de compunere a matricelor :

$$\underline{\|Z\|} = \underline{\|Z'\|} + \underline{\|Z''\|}. \quad (44.44)$$

Matricea impedanță a cuadripolului rezultat e suma matricelor impedanță ale cuadripolilor componenți, conectați în serie. Se reține analogia cu regula de calcul a impedanței echivalente a doi dipoli conectați în serie.

44.3.3. Conexiunea în paralel. În cazul acestei conexiuni (fig. 44.14) se impun relațiile :

$$\underline{U}_1 = \underline{U}'_1 = \underline{U}''_1; \quad \underline{I}_1 = \underline{I}'_1 + \underline{I}''_1; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}'_2 + \underline{I}''_2; \quad \underline{U}_2 = \underline{U}'_2 = \underline{U}''_2. \quad (44.45)$$

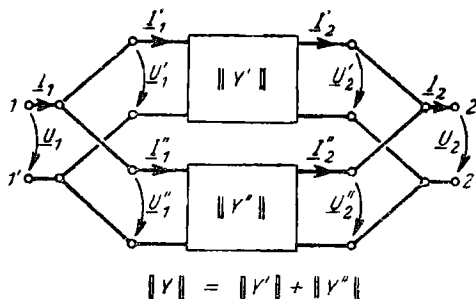


Fig. 44.14.

Ecuatiile cu parametrii admitanță ale cuadripolilor componenți și a celui rezultat sînt :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{I}'_1 \\ \underline{I}'_2 \end{bmatrix} &= \underline{\|Y'\|} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}'_1 \\ \underline{U}'_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \underline{I}''_1 \\ \underline{I}''_2 \end{bmatrix} &= \underline{\|Y''\|} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}''_1 \\ \underline{U}''_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} &= \underline{\|Y\|} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (44.46)$$

Cu relațiile (44.45) se obține :

$$\begin{bmatrix} \underline{I}'_1 \\ \underline{I}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}'_1 \\ \underline{I}'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{I}''_1 \\ \underline{I}''_2 \end{bmatrix} = \underline{\|Y'\|} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}'_1 \\ \underline{U}'_2 \end{bmatrix} + \underline{\|Y''\|} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}''_1 \\ \underline{U}''_2 \end{bmatrix} = [\underline{\|Y'\|} + \underline{\|Y''\|}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}$$

și, comparînd cu (44.46), rezultă regula de compunere a matricelor

$$\|Y\| = \|Y'\| + \|Y''\|. \quad (44.47)$$

Matricea admitanță a cuadripolului rezultat e suma matricelor admitanță ale cuadripolilor componenți conectați în paralel. Se reține analogia cu regula de calcul a admitanței echivalente a doi dipoli conectați în paralel.

44.3.4. Conexiunea serie-paralel. În cazul acestei conexiuni (fig. 44.15) se impun relațiile :

$$\begin{aligned} U_1 &= U'_1 + U'_2; \\ I_1 &= I'_1 = I''_1; \\ I_2 &= I'_2 + I''_2; \\ U_2 &= U'_2 = U''_2. \end{aligned} \quad (44.48)$$

Cu relația (44.33') raționînd ca în cazurile precedente, se obține regula

$$\|D\| = \|D'\| + \|D''\|. \quad (44.49)$$

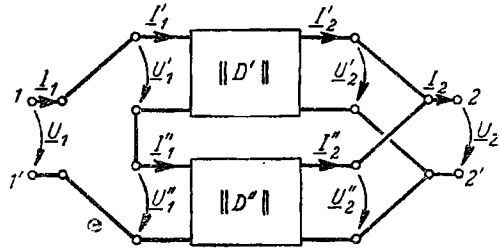
Matricea mixtă (directă) a cuadripolului rezultat e suma matricelor mixte (directe) ale cuadripolilor componenți, conectați în serie-paralel.

44.3.5. Conexiunea paralel-serie. În cazul acestei conexiuni (fig. 44.16) se impun relațiile :

$$\begin{aligned} U_1 &= U'_1 = U''_1; \quad I_1 = I'_1 + I''_1; \\ I_2 &= I'_2 = I''_2; \quad U_2 = U'_2 + U''_2. \end{aligned} \quad (44.50)$$

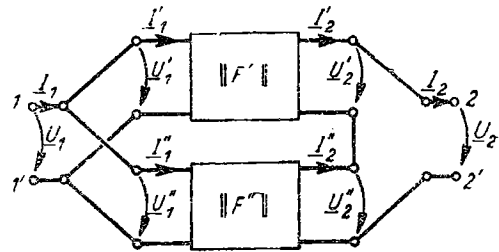
Cu relația (44.37') raționînd ca în cazurile precedente, se obține regula

$$\|F\| = \|F'\| + \|F''\|. \quad (44.51)$$



$$\|D\| = \|D'\| + \|D''\|$$

Fig. 44.15.



$$\|F\| = \|F'\| + \|F''\|$$

Fig. 44.16.

Matricea mixtă inversă a cuadripolului rezultat e suma matricelor mixte inverse ale cuadripolilor componenți, conectați paralel-serie.

44.4. Aplicații

44.4.1. Matricele unor cuadripoli simpli. Determinăm matricele unor cuadripoli simpli, din care, prin compunere cu regulile stabilite mai sus, se pot determina matricele altor cuadripoli compuși.

a. **Cuadripolul degenerat cu impedanță serie** din fig. 43.8, a, cu ecuațiile fundamentale (43.36, a), are matricea fundamentală și matricea admitanță.

$$\|A\| = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad \|Y\| = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z} & -\frac{1}{Z} \\ \frac{1}{Z} & -\frac{1}{Z} \end{bmatrix} \quad (44.52)$$

și are matricea impedanță improprie.

b. Cuadripolul degenerat cu admitanță paralel din figura 43.8, b, cu ecuațiile fundamentale (43.36, b), are matricea fundamentală și matricea impedanță

$$\|A\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \underline{Y} & 1 \end{vmatrix} \quad \text{și} \quad \|Z\| = \begin{vmatrix} \frac{1}{\underline{Y}} & -\frac{1}{\underline{Y}} \\ \frac{1}{\underline{Y}} & -\frac{1}{\underline{Y}} \end{vmatrix} \quad (44.53)$$

și are matricea admitanță improprie.

44.4.2. Cuadripolul în T . Matricele cuadripolului în T pot fi determinate, observând că un astfel de cuadripol (fig. 43.7, a) poate fi obținut conectând în lanț un cuadripol degenerat cu impedanță serie $\underline{Z}_1$, cu un cuadripol degenerat cu admitanță paralel $\underline{Y}$ și cu un cuadripol degenerat cu impedanță serie $\underline{Z}_2$. Conform cu regula de compunere (44.41), rezultă matricea fundamentală a cuadripolului în T din matricele cuadripolilor componenți (44.52) și (44.53):

$$\begin{aligned} \|A\| &= \begin{vmatrix} 1 & \underline{Z}_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \underline{Y} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \underline{Z}_2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \underline{Y}\underline{Z}_1 & \underline{Z}_1 \\ \underline{Y} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \underline{Z}_2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \|A\| &= \begin{vmatrix} 1 + \underline{Y}\underline{Z}_1 & \underline{Z}_1 + \underline{Y}\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \\ \underline{Y} & \underline{Y}\underline{Z}_2 + 1 \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (44.54)$$

adică

$$\underline{A}_{11} = \underline{A} = 1 + \underline{Y}\underline{Z}_1; \quad \underline{A}_{12} = \underline{B} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Y}\underline{Z}_1\underline{Z}_2; \quad \underline{A}_{21} = \underline{C} = \underline{Y}; \quad \underline{A}_{22} = \underline{D} = 1 + \underline{Y}\underline{Z}_2.$$

Am obținut parametrii fundamentali (43.30), determinați direct pe cale analitică.

44.4.3. Cuadripolul în π . Un astfel de cuadripol (fig. 43.7, b) poate fi obținut conectând în lanț un cuadripol degenerat cu admitanță paralel $\underline{Y}_1$, cu un cuadripol degenerat cu impedanță serie $\underline{Z}$ și cu un cuadripol degenerat cu admitanță paralel $\underline{Y}_2$. Conform cu relația (44.41) rezultă matricea fundamentală a cuadripolului în π din matricele cuadripolilor componenți (44.53) și (44.52):

$$\begin{aligned} \|A\| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \underline{Y}_1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \underline{Z} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \underline{Y}_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \underline{Z} \\ \underline{Y}_1 & 1 + \underline{Y}_1\underline{Z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \underline{Y}_2 & 1 \end{vmatrix} \\ \|A\| &= \begin{vmatrix} 1 + \underline{Y}_2\underline{Z} & \underline{Z} \\ \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Z}\underline{Y}_1\underline{Y}_2 & 1 + \underline{Y}_1\underline{Z} \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (44.55)$$

adică

$$\underline{A}_{11} = \underline{A} = 1 + \underline{Y}_2\underline{Z}; \quad \underline{A}_{12} = \underline{B} = \underline{Z}; \quad \underline{A}_{21} = \underline{C} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Z}\underline{Y}_1\underline{Y}_2; \quad \underline{A}_{22} = \underline{D} = 1 + \underline{Y}_1\underline{Z}.$$

Am obținut parametrii fundamentali (43.32), determinați direct pe cale analitică.

44.4.4. Cuadripolul în T șuntat (fig. 44.17, a). Acest cuadripol pe care nu l-am studiat până acum e foarte utilizat ca atenuator (pentru a reduce într-un raport determinat tensiunea aplicată la intrare).

Din figura (44.17, b) rezultă că el poate fi considerat ca rezultând din compunerea în paralel a unui cuadripol în T cu unul degenerat, cu impedanță serie $\underline{Z}_3$. Conform cu relația (44.47), matricea admitanță $\|Y\|$ a cuadripolului în T șuntat va rezulta adunând matricea $\|Y'\|$ a cuadripolului în T cu matricea $\|Y''\|$ a cuadripolului degenerat (44.52). Prima se obține observând că elementele matricei impedanță $\|Z'\| = \|Y'\|^{-1}$ au fost determinate anterior (rel. 43.29), adică:

$$\|Z'\| = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z} & -\underline{Z} \\ \underline{Z} & -(\underline{Z}_2 + \underline{Z}) \end{vmatrix}. \quad (44.56)$$

Cu regula de inversiune a matricelor calculăm succesiv (v. par. 44.1.3.)

$\det \|Z'\| = -Z_1 Z_2 - Z(Z_1 + Z_2)$ și matricele :

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{cc} Z_1 + Z & Z \\ -Z & -(Z_2 + Z) \end{array} \right\| &\rightarrow \left\| \begin{array}{cc} -(Z_2 + Z) & -Z \\ Z & Z_1 + Z \end{array} \right\| \rightarrow \left\| \begin{array}{cc} -(Z_2 + Z) & Z \\ -Z & (Z_1 + Z) \end{array} \right\| \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{Z_1 Z_2 + Z(Z_1 + Z_2)} \left\| \begin{array}{cc} Z_2 + Z & -Z \\ Z & -(Z_1 + Z) \end{array} \right\| \end{aligned}$$

Se obține astfel matricea admitanță a cuadripolului în T (cu $Z = 1/Y$)

$$\begin{aligned} \|Y'\| &= \|Z'\|^{-1} = \\ &= \left\| \begin{array}{cc} \frac{1 + Y Z_2}{Z_2 + Z_3 + Y Z_1 Z_2} & -\frac{1}{Z_1 + Z_2 + Y Z_1 Z_2} \\ \frac{1}{Z_1 + Z_2 + Y Z_1 Z_2} & -\frac{1 + Y Z_1}{Z_1 + Z_2 + Y Z_1 Z_2} \end{array} \right\| \quad (44.57) \end{aligned}$$

Matricea cuadripolului degenerat cu impedență serie Z_3 rezultă din relația (44.52) :

$$\|Y''\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{1}{Z_3} & -\frac{1}{Z_3} \\ \frac{1}{Z_3} & -\frac{1}{Z_3} \end{array} \right\|. \quad (44.58)$$

Cu relațiile (44.47), (44.57) și (44.58), matricea cuadripolului în T șuntat rezultă :

$$\|Y\| = \|Y'\| + \|Y''\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Y Z_2(Z_1 + Z_3)}{Z_3(Z_1 + Z_2 + Y Z_1 Z_2)} & -\frac{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Y Z_1 Z_2}{Z_3(Z_1 + Z_2 + Y Z_1 Z_2)} \\ \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Y Z_1 Z_2}{Z_3(Z_1 + Z_2 + Y Z_1 Z_2)} & -\frac{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Y Z_1(Z_2 + Z_3)}{Z_3(Z_1 + Z_2 + Y Z_1 Z_2)} \end{array} \right\|. \quad (44.59)$$

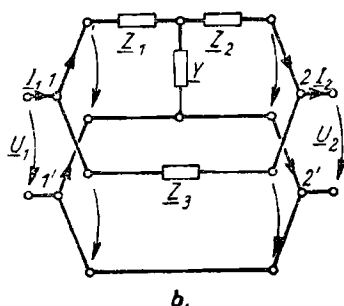
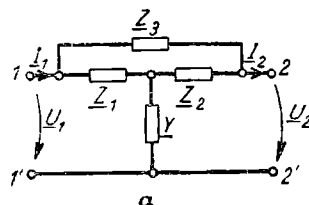


Fig. 44.17

45. LANȚURI DE CUADRIPOLI ȘI FILTRE ELECTRICE

45.1. Lanț de cuadripoli

Transmisiunea energiei electromagnetice și, în special, transmisiunea semnalelor de telecomunicații se face prin instalații și circuite asimilabile unei succesiuni de cuadripoli conectați în cascadă sau în lanț. Întregul canal de trans-

misiune constituie deci un lanț de cuadripoli și poate fi echivalat cu un singur cuadripol — cuadripolul echivalent — ai cărui parametri se pot calcula ca la paragraful 44.3.1. Lanțul de cuadripoli se numește *omogen*, dacă toți cei n cuadripoli componenți sînt identici. Dacă

$$\|A_k\| = \left\| \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix} \right\| = \|\underline{A}\| \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (45.1)$$

e matricea fundamentală a fiecăruia dintre cuadripolii componenți, din relația (44.41) rezultă că matricea întregului lanț, egală cu produsul matricelor componente, este

$$\|A_1\| \cdot \|A_2\| \cdots \|A_n\| = \|\underline{A}\|^n. \quad (45.2)$$

În cele ce urmează vom considera numai *lanțuri omogene de cuadripoli simetrice și reciproci*.

45.1.1. **Lanț de cuadripoli simetrici adaptat.** Proprietățile de transmisiune ale unui lanț de cuadripoli sînt optime, dacă impedanța de sarcină a întregului lanț e egală cu impedanța caracteristică $\underline{Z}_c$ a cuadripolilor simetrici componenți (v. par. 43.5):

$$\underline{Z}_l = \underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}}. \quad (45.3)$$

În acest caz, lanțul se numește *adaptat*¹. Considerăm un astfel de lanț cu n cuadripoli (fig. 45.1), la care folosim notațiile indicate în figură.

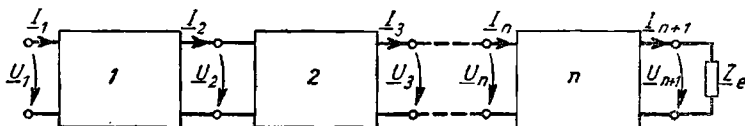


Fig. 45.1

Conform definiției impedanței caracteristice, dacă impedanța de sarcină a ultimului cuadripol e $\underline{Z}_c$ și impedanța lui de intrare e tot $\underline{Z}_c$. Impedanța de intrare a ultimului cuadripol e însă impedanța de sarcină a penultimului, și de aceea și impedanța de intrare a acestuia va fi tot $\underline{Z}_c$. Din aproape în aproape, constatăm astfel că pentru un lanț adaptat impedanțele de sarcină și impedanțele de intrare ale tuturor cuadripolilor componenți sînt egale cu $\underline{Z}_c$, adică

$$\frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2} = \dots = \frac{U_n}{I_n} = \frac{U_{n+1}}{I_{n+1}} = \underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}}.^2 \quad (45.4)$$

¹ Condiția de adaptare considerată aici nu coincide în general cu condiția de adaptare, din punctul de vedere al transferului maxim de putere (v. par. 37.4).

² În fața radicalului se alege semnul care asigură parte reală pozitivă pentru $\underline{Z}_c$ care trebuie să fie realizabilă în concret, pentru a putea fi o impedanță de sarcină.

Ecuatiile cuadripolului simetric (scrise pentru cuadripolul de ordin k) fiind :

$$\begin{aligned}\underline{U}_k &= \underline{A} \underline{U}_{k+1} + \underline{B} \underline{I}_{k+1} \\ \underline{I}_k &= \underline{C} \underline{U}_{k+1} + \underline{A} \underline{I}_{k+1},\end{aligned}\quad (45.5)$$

rezultă cu relația (45.4), înlocuind pe $\underline{I}_{k+1} = \underline{U}_{k+1}/\underline{Z}_c$ în prima ecuație pe $\underline{U}_{k+1} = \underline{Z}_c \underline{I}_{k+1}$ în a doua, egalitățile :

$$\frac{\underline{U}_k}{\underline{U}_{k+1}} = \frac{\underline{I}_k}{\underline{I}_{k+1}} = \underline{A} + \frac{\underline{B}}{\underline{Z}_c} = \underline{A} + \sqrt{\underline{B}\underline{C}} \quad (45.6)$$

Deoarece la cuadripolii reciproci simetrici $\underline{A}^2 - \underline{B}\underline{C} = 1$, se mai poate scrie :

$$\frac{\underline{U}_k}{\underline{U}_{k+1}} = \frac{\underline{I}_k}{\underline{I}_{k+1}} = \underline{A} + \sqrt{\underline{B}\underline{C}} = \frac{1}{\underline{A} - \sqrt{\underline{B}\underline{C}}} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (45.7)$$

La un lanț de cuadripoli adaptat, raportul a două tensiuni succesive sau a doi curenți succesivi se păstrează constant de la element la element.

Se numește *exponent de transfer caracteristic* logaritmul natural al valorii raportului (45.6), adică mărimea complexă.

$$\underline{g} = a + jb = \ln(\underline{A} + \sqrt{\underline{B}\underline{C}}) = -\ln(\underline{A} - \sqrt{\underline{B}\underline{C}}). \quad (45.8)$$

Se observă că :

$$e^{\underline{g}} = \underline{A} + \sqrt{\underline{B}\underline{C}}; \quad e^{-\underline{g}} = \underline{A} - \sqrt{\underline{B}\underline{C}}, \quad (45.9)$$

de unde rezultă :

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} \underline{g} &= \operatorname{ch}(a + jb) = \operatorname{ch} a \cos b + j \operatorname{sh} a \sin b = \underline{A} \\ \operatorname{sh} \underline{g} &= \operatorname{sh}(a + jb) = \operatorname{sh} a \cos b + j \operatorname{ch} a \sin b = \sqrt{\underline{B}\underline{C}}.\end{aligned}\quad (45.10)$$

Cu aceste notații, raportul a două tensiuni succesive sau a doi curenți succesivi se scrie :

$$\frac{\underline{U}_k}{\underline{U}_{k+1}} = \frac{\underline{I}_k}{\underline{I}_{k+1}} e^{\underline{g}} = e^a e^{jb} \quad (45.11)$$

sau

$$\begin{aligned}\underline{U}_{k+1} &= \underline{U}_k e^{-\underline{g}} = e^{-a} \underline{U}_k e^{-jb} \\ \underline{I}_{k+1} &= \underline{I}_k e^{-\underline{g}} = e^{-a} \underline{I}_k e^{-jb}.\end{aligned}\quad (45.12)$$

Vom arăta mai departe că $a \geq 0$, din care cauză, în lungul lanțului de cuadripoli adaptat, valorile efective ale tensiunilor și curenților scad monoton exponențial, fiecare cuadripol din lanț introducând un factor de atenuare subunitar, egal cu e^{-a} și o întârziere de fază suplimentară, egală cu b^1 . De aceea, mărimea :

$$a = \operatorname{Re} \{ \underline{g} \} = \ln \left| \frac{\underline{U}_k}{\underline{U}_{k+1}} \right| = \ln \left| \frac{\underline{I}_k}{\underline{I}_{k+1}} \right| \geq 0 \quad (45.13)$$

¹ dacă $b < 0$, are loc un avans de fază.

se numește *atenuarea caracteristică* a cuadripolului simetric adaptat, iar mărimea, redusă la intervalul $(-\pi, +\pi)$,

$$b = \operatorname{Im} \{g\} = \arg \left\{ \frac{I_k}{I_{k+1}} \right\} = \arg \left\{ \frac{I_k}{I_{k+1}} \right\} \geq 0 \quad (45.14)$$

se numește *defazajul caracteristic* al cuadripolului simetric adaptat. Din relația (45.12) se deduc pentru puteri relațiile :

$$\underline{S}_{k+1} = \underline{U}_{k+1} \underline{I}_{k+1}^* = \underline{U}_k \underline{I}_k^* e^{-\underline{g}} e^{-\underline{g}^*} = \underline{S}_k e^{-2a} \quad (45.15)$$

$$P_{k+1} = \operatorname{Re} \{ \underline{S}_{k+1} \} = P_k e^{-2a} \quad (45.16)$$

$$Q_{k+1} = \operatorname{Im} \{ \underline{S}_{k+1} \} = Q_k e^{-2a}, \quad (45.17)$$

astfel că

$$a = \frac{1}{2} \ln \frac{S_k}{P_{k+1}} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_k}{P_{k+1}} = \frac{1}{2} \ln \frac{Q_k}{Q_{k+1}}. \quad (45.18)$$

Deoarece cuadripolii sînt pasivi și energia se transmite către receptor, puterea activă P_{k+1} la bornele de ieșire ale cuadripolului de ordinul k e mai mică decît puterea activă la bornele de intrare P_k , diferența acoperind pierderile de putere din cuadripol. În cazul idealizat al unor cuadripoli nedisipativi (cu elemente de circuit pur reactive), aceste două puteri pot fi egale și eventual nule, dacă impedanța caracteristică e imaginară și sarcina nu consumă putere activă. Rezultă că *pentru cuadripolii cu pierderi* (disipativi),

$$P_{k+1} < P_k, \text{ adică } a > 0, \quad (45.19)$$

iar pentru *cuadripolii fără pierderi* (nedisipativi), cu impedanță caracteristică reală

$$P_{k+1} = P_k \neq 0, \text{ adică } a = 0. \quad (45.20)$$

Înmulțind rapoarte succesive de forma relației (45.11) cu $k = 1, 2, \dots, n$, rezultă că :

$$\frac{I_1}{I_{n+1}} = \frac{I_1}{I_{n+1}} = e^{ng} = e^{na} e^{jnb}, \quad (45.21)$$

adică pentru întregul lanț adaptat se obține *exponentul de transfer total*,

$$\underline{g}_t = n\underline{g} = \ln \frac{I_1}{I_{n+1}} = \ln \frac{I_1}{I_{n+1}} = n \cdot \ln(A + \sqrt{BC}) \quad (45.22)$$

și atenuarea totală, respectiv defazajul total,

$$a_t = na, \text{ respectiv } b_t = nb. \quad (45.23)$$

45.1.2. Lanț de cuadripoli simetrici neadaptat. În acest caz, lanțul de cuadripoli e conectat pe o sarcină oarecare :

$$Z_s = Z_{n+1} = \frac{I_{n+1}}{I_{n+1}} \neq Z_c. \quad (45.24)$$

Vom exprima ecuațiile fundamentale (43.7) ale unuia dintre cuadripoli ($\underline{A} = \underline{D}$) ai lanțului cu ajutorul parametrilor $\underline{g}$ (v. rel. 45.8) și $\underline{Z}_c$ (rel. 45.3) ținând seama de relația 45.10):

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_k &= \underline{A}\underline{U}_{k+1} + \underline{B}\underline{I}_{k+1} = \underline{U}_{k+1} \operatorname{ch} \underline{g} + \underline{Z}_c \underline{I}_{k+1} \operatorname{sh} \underline{g} \\ \underline{I}_k &= \underline{C}\underline{U}_{k+1} + \underline{A}\underline{I}_{k+1} = \frac{\underline{U}_{k+1}}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{g} + \underline{I}_{k+1} \operatorname{ch} \underline{g} \end{aligned} \right\} \quad (45.25)$$

Dacă înlocuim aici $\underline{U}_{k+1}$ și $\underline{I}_{k+1}$ în funcție de $\underline{U}_{k+2}$ și $\underline{I}_{k+2}$ prin relațiile analoge ale cuadripolului următor, rezultă:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_k &= \underline{U}_{k+2} \operatorname{ch} 2\underline{g} + \underline{Z}_c \underline{I}_{k+2} \operatorname{sh} 2\underline{g} \\ \underline{I}_k &= \frac{1}{\underline{Z}_c} \underline{U}_{k+2} \operatorname{sh} 2\underline{g} + \underline{I}_{k+2} \operatorname{ch} 2\underline{g} \end{aligned} \right\}$$

prin recurență, pentru întregul lanț de n cuadripoli:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_{n+1} \operatorname{ch} n\underline{g} + \underline{Z}_c \underline{I}_{n+1} \operatorname{sh} n\underline{g} \\ \underline{I}_1 &= \frac{1}{\underline{Z}_c} \underline{U}_{n+1} \operatorname{sh} n\underline{g} + \underline{I}_{n+1} \operatorname{ch} n\underline{g} \end{aligned} \right\} \quad (45.26)$$

Trecerea de la un cuadripol la n cuadripoli identici se face prin simpla înmulțire a exponentului de transfer cu numărul n al cuadripolilor.

Dacă cuadripolii au pierderi ($\alpha = \operatorname{Re}\{g\} > 0$) și dacă numărul lor e foarte mare ($n \rightarrow \infty$), atunci:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} na &\rightarrow \frac{1}{2} e^{na} & \operatorname{sh} na &\rightarrow \frac{1}{2} e^{na} \\ \operatorname{ch} ng &= \operatorname{ch} na \cos nb + j \operatorname{sh} na \sin b \rightarrow \frac{1}{2} e^{ng} \\ \operatorname{sh} ng &= \operatorname{sh} na \cos nb + j \operatorname{ch} na \sin b \rightarrow \frac{1}{2} e^{ng}, \end{aligned}$$

astfel că

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_c, \text{ deși } \frac{\underline{U}_{n+1}}{\underline{I}_{n+1}} = \underline{Z}_s \neq \underline{Z}_c. \quad (45.27)$$

Datorită existenței atenuării, efectul neadaptării de la capătul lanțului se resimte din ce în ce mai puțin și cuadripolii suficient de depărtați de capăt (raționamentul se poate face nu numai pentru $k = 1$, ci pentru orice $k \ll n$) funcționează adaptat.

Observație: Unitatea de atenuare se numește neper (Np), dacă se utilizează relațiile de definiție (45.13) sau (45.18)¹. Se mai utilizează unitățile bel (B) și, în special, decibel (1 dB = $\frac{1}{10}$ B), corespunzătoare relațiilor de calcul:

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \log \left| \frac{\underline{U}_k}{\underline{U}_{k+1}} \right| = 2 \log \left| \frac{\underline{I}_k}{\underline{I}_{k+1}} \right| = \log \frac{P_k}{P_{k+1}} [\text{B}] \\ \alpha &= 20 \log \left| \frac{\underline{U}_k}{\underline{U}_{k+1}} \right| = 20 \log \left| \frac{\underline{I}_k}{\underline{I}_{k+1}} \right| = 10 \log \frac{P_k}{P_{k+1}} [\text{dB}], \end{aligned} \quad (45.28)$$

¹ Atenuarea de 1 Np corespunde la $\frac{U_k}{U_{k+1}} = e = 2,718$.

în care log este logaritmul în baza 10 (zecimal). Între aceste unități — utilizabile pentru orice apreciere logaritmică a unor rapoarte — există relațiile:

$$\begin{aligned} 1 \text{ Np} &= 2 \cdot \log_e B = 0,8686 \text{ B} \\ 1 \text{ Np} &= 20 \cdot \log_e \text{ dB} = 8,686 \text{ dB}. \end{aligned} \quad (45.29)$$

45.2. Raportul de transmisiune și caracteristicile de frecvență

Am studiat mai sus cazul particular al sistemelor de transmisiune, care consistă din lanțuri omogene de cuadripoli simetrici, reciproci. În cazuri mai generale, un sistem de transmisiune diport, liniar și pasiv (v. fig. 45.2, a) e

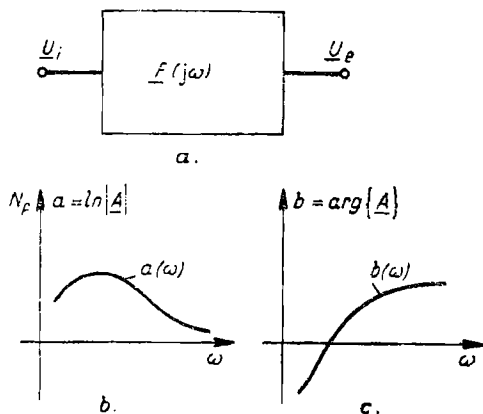


Fig. 45.2

caracterizabil printr-o mărime de intrare $u_i(t)$, aplicată din exterior și o mărime de ieșire (sau de răspuns) $u_e(t)$, univoc determinată de mărimea de intrare (în condiții de funcționare precizate ale sistemului). În regim permanent sinusoidal, raportul complex al reprezentărilor în complex ale celor două mărimi

$$\frac{U_i}{U_e} = \underline{A}(j\omega) = A(\omega)e^{jb(\omega)} \quad (45.30)$$

se numește *raportul de transmisiune*¹ al sistemului și constituie o caracteristică a lui, în condițiile de funcționare precizate. Dacă se cunoaște raportul de transmisiune și depen-

dența lui de frecvență (adică de pulsația $\omega = 2\pi f$), se cunoaște mărimea de ieșire pentru orice mărime de intrare dată. Prin înmulțirea cu un factor constant, convenabil ales, mărimile U_e și U_i pot avea aceleași dimensiuni și raportul de transmisiune poate fi făcut adimensional. Modulul $\underline{A}(\omega)$ al acestui raport,

$$\underline{A}(\omega) = |\underline{A}(j\omega)| = \left| \frac{U_i}{U_e} \right| \quad (45.31)$$

se numește *raport de atenuare*, iar logaritmul natural al acestui raport

$$\underline{a}(\omega) = \ln \underline{A}(\omega) = \ln \left| \frac{U_i}{U_e} \right| \quad [\text{Np}] \quad (45.32)$$

se numește, scurt, *atenuare*.

¹ Valoarea reciprocă a raportului de transmisiune, considerată ca funcție de o variabilă complexă $p = \sigma + j\omega$, se numește *funcție de transfer*.

Argumentul $b(\omega)$ al raportului de transmisiune se numește *defazajul* sistemului

$$b(\omega) = \arg\{\underline{A}(j\omega)\} = \arg\{\underline{U}_i\} - \arg\{\underline{U}_e\} \quad [\text{rad}] \quad (45.33)$$

și e egal cu diferența de fază între U_i și U_e , redusă la intervalul $(-\pi, +\pi)$. Între atenuare (exprimată în Np), defazaj (exprimat în radiani) și raportul de transmisiune există relațiile :

$$\underline{A} = \frac{\underline{U}_i}{\underline{U}_e} = e^{a+jb}; \quad a + jb = \ln \frac{\underline{U}_i}{\underline{U}_e} = \ln \underline{A}. \quad (45.34)$$

Funcțiunile de frecvență $a(\omega)$ — uneori $A(\omega)$ — și $b(\omega)$ se numesc *caracteristicile de frecvență* ale sistemului, și anume *caracteristica de frecvență a atenuării*¹ $a(\omega)$, uneori $A(\omega)$, și *caracteristica de frecvență a defazajului*² $b(\omega)$. Dacă se cunosc aceste caracteristici, funcționarea sistemului în regim permanent sinusoidal e complet cunoscută. De aceea, aceste caracteristici se determină teoretic sau experimental, reprezentându-se grafic (v. fig. 45.2, b și c). Se observă imediat că definițiile de mai sus generalizează pe cele date în paragraful anterior, în care atenuarea caracteristică și defazajul caracteristic erau cazuri particulare ale mărimilor (45.32) și (45.33), când $\underline{U}_i = \underline{U}_1$, $\underline{U}_e = \underline{U}_2$, iar sistemul de transmisiune era un cuadripol simetric și reciproc, adaptat pe impedanța sa caracteristică.

45.3. Filtre electrice

45.3.1. Definiții. În foarte multe cazuri, în telecomunicații e necesar să se transmită de la un generator la un receptor numai semnalele de anumite frecvențe sau cu frecvențele cuprinse într-un anumit interval. Acest lucru poate fi realizat, dacă se utilizează sisteme de transmisiune, numite *filtre*, a căror caracteristică de frecvență a atenuării prezintă minime pronunțate pentru intervalele de frecvență pe care filtrul trebuie să le favorizeze (să le selecteze). În electrocomunicații, filtrele sînt cuadripoli sau lanțuri de cuadripoli și se mai numesc *filtre electrice* sau *filtre electrice de frecvență*.

Se numește *interval de trecere* sau *bandă de trecere* orice interval din spectrul frecvențelor, cuprins între o frecvență inferioară $f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$ și o frecvență superioară $f_s = \frac{\omega_s}{2\pi} > f_i$, pentru care filtrul prezintă o atenuare foarte mică (sau chiar nulă, în cazuri idealizate) în raport cu aceea pe care o prezintă în afara acestui interval. Cele două limite menționate (definite de fapt prin anumite condiții mai precise) se numesc *frecvențe de tăiere*. Restul intervalelor din spectru se numesc *intervale de atenuare*. Se numește *filtru trece-jos* un filtru care favorizează semnalele de frecvențe inferioare unei limite date ($f_i = 0$, $f_s \neq 0$), *filtru trece-sus*, un filtru care favorizează semnalele de frecvențe su-

¹ Sau caracteristica atenuare-frecvență.

² Sau caracteristica defazaj-frecvență.

perioare unei limite date ($f_i \neq 0$, $f_s \neq \infty$) și *filtru trece-bandă*, un filtru care favorizează numai semnalele de frecvențe cuprinse într-un anumit interval de trecere, relativ îngust ($f_i \neq 0$, $f_s \neq \infty$). Se numește *interval de oprire* sau *bandă de oprire* orice interval din spectrul frecvențelor, pentru care filtrul prezintă o atenuare foarte mare (infinită în cazuri idealizate), în raport cu aceea pe care o prezintă în afara acestui interval; se numește *filtru oprește-bandă* un filtru care blochează trecerea semnalelor cu frecvențe cuprinse într-un anumit interval de oprire.

Teoria filtrelor electrice, a studiului și calculului lor, reprezintă una din cele mai dezvoltate și mai specializate ramuri ale teoriei comunicațiilor. În cele ce urmează ne vom limita la studiul unor filtre nedisipative (fără pierderi), simetrice, omogene și adaptate (avînd ca impedanță de sarcină o impedanță egală cu impedanța lor caracteristică Z_c). Această ultimă condiție e în fond foarte restrictivă, deoarece, așa cum vom vedea, impedanța caracteristică depinde de frecvență, fiind reală pentru anumite intervale din spectru și imaginară pentru altele. O astfel de impedanță nu poate fi realizată în concret cu elemente ideale, pasive, de circuit (r , L , C). Filtrele reale nu lucrează deci adaptat, pentru orice valoare a frecvenței; în afară de aceasta, ele au totdeauna pierderi și proiectarea lor optimă impune altă structură decît aceea a unui lanț de cuadripoli simetric și omogen. Cu toate acestea, studiul elementar care urmează ilustrează sugestiv principalele probleme ale funcționării unui filtru.

45.3.2. Filtre nedisipative, simetrice, adaptate. Vom considera lanțuri omogene de cuadripoli simetrici în T (fig. 45.3, *a*) sau în Π (fig. 45.3, *b*), funcționînd adaptat, adică închise pe impedanța lor caracteristică Z_c (rel. 45.3). Deoarece

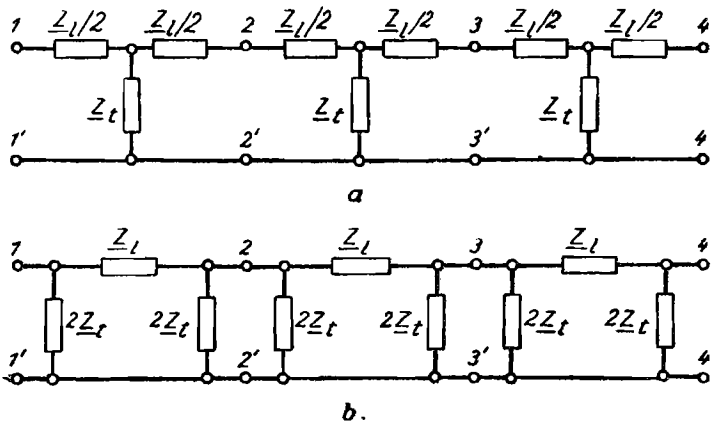


Fig. 45.3

în aceste condiții exponentul de transfer al unui lanț cu n cuadripoli e $\underline{ng} = na + jnb$, e suficient să studiem funcționarea unui singur cuadripol din lanț, de exemplu a primului, la diferite frecvențe, adică funcțiunile :

$$a(\omega), b(\omega) \text{ și } \underline{g}(\omega) = a + jb.$$

Din relația (43.30), pentru cuadripolii în T simetrici, cu $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_l}{2}$ și $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}_l}$, rezultă :

$$\underline{A} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\underline{Z}_l}{\underline{Z}_t} = \underline{D}; \quad \underline{B} = \underline{Z}_l + \frac{\underline{Z}_l^2}{4\underline{Z}_t}; \quad \underline{C} = \frac{1}{\underline{Z}_t} \quad (45.35)$$

și

$$\underline{Z}_{cT} = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} = \sqrt{\underline{Z}_l \underline{Z}_t + \frac{\underline{Z}_l^2}{4}}. \quad (45.36)$$

Din relația (43.32), pentru cuadripolii în π simetrici cu $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \frac{1}{2\underline{Z}_t}$ și $\underline{Z} = \underline{Z}_l$ rezultă :

$$\underline{A} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\underline{Z}_l}{\underline{Z}_t} = \underline{D}; \quad \underline{B} = \underline{Z}_l; \quad \underline{C} = \frac{1}{2\underline{Z}_t} + \frac{\underline{Z}_l}{4\underline{Z}_t^2} \quad (45.37)$$

și

$$\underline{Z}_{c\pi} = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_l \underline{Z}_t} + \frac{2}{4\underline{Z}_t^2}}}. \quad (45.38)$$

Arătăm mai întâi că un cuadripol pasiv nedisipativ are parametrii fundamentali reali ($\underline{A}$ și $\underline{D}$) sau imaginari ($\underline{B}$ și $\underline{C}$). În adevăr, un asemenea cuadripol poate fi compus numai din elemente reactive de circuit (bobine și condensatoare). Schema lui echivalentă în T cu elementele din figura 43.7, a va fi de asemenea compusă numai din elemente reactive. Mărimile $\underline{Y}$, $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ ale acestei scheme sînt deci imaginare. Din relația (43.56) rezultă atunci că $\underline{C}$ e imaginar, $\underline{A}$ e real și $\underline{D}$ e real. Din condiția de reciprocitate (43.9) rezultă atunci că și $\underline{B}$ e imaginar. Cuadripolul nedisipativ se caracterizează deci prin relațiile :

$$\text{Im} \{ \underline{A} \} = 0; \quad \text{Im} \{ \underline{D} \} = 0; \quad \text{Re} \{ \underline{B} \} = 0; \quad \text{Re} \{ \underline{C} \} = 0. \quad (45.39)$$

Pentru un cuadripol nedisipativ simetric rezultă atunci din relațiile (45.10) și (45.3) condițiile :

$$\text{Im} \{ \text{ch } g \} = \boxed{\text{sh } a \sin b = 0} \quad (45.40)$$

și

$$\text{Im} \{ \underline{Z}_c \} = 0, \quad \text{Re} \{ \text{sh } g \} = \text{sh } a \cos b = 0 \quad (\text{dacă } \underline{BC} < 0) \quad (45.41)$$

sau

$$\text{Re} \{ \underline{Z}_c \} = 0, \quad \text{Im} \{ \text{sh } g \} = \text{ch } a \sin b = 0 \quad (\text{dacă } \underline{BC} > 0). \quad (45.42)$$

Deoarece parametrii cuadripolului și în particular a , b și $\underline{Z}_c$ sînt funcții de frecvență, rezultă că, studiind aceste funcții se pot pune în evidență una sau alta din situațiile (45.41) sau (45.42). Se mai observă că impedanța caracteristică a unui cuadripol nedisipativ simetric e sau reală sau imaginară. Analizăm pe rînd cele două cazuri :

1. *Intervalele de trecere.* Pentru frecvențele la care impedanța caracteristică e reală, relațiile (45.40) și (45.41) pot fi satisfăcute numai cu

$$a = 0; \quad \underline{Z}_c = Z_c = \left| \sqrt{\frac{B}{C}} \right| > 0 \quad (45.43)$$

$$-1 \leq \underline{A} = A = \cos b \leq +1. \quad (45.44)$$

Pentru frecvențele care asigură aceste inegalități, atenuarea e nulă și impedanța caracteristică e reală și pozitivă. Defazajul depinde de frecvență

$$b = \arccos A. \quad (45.45)$$

Acestea sînt *intervalele de trecere* ale filtrului nedisipativ simetric, cu frecvențele de tăiere determinate de situațiile extreme

$$A = \pm 1 \text{ sau } A^2 = 1 \text{ sau } \underline{BC} = 0 \quad (45.46)$$

În cazul filtrelor în Π sau T (fig. 45.3), din relațiile (45.35) și (45.37) rezultă aceeași condiție:

$$A = 1 + \frac{1}{2} \frac{\underline{Z}_l}{\underline{Z}_t} = \pm 1. \quad (45.47)$$

2. *Intervalele de atenuare.* Pentru frecvențele la care impedanța caracteristică e imaginară, relațiile (45.40) și (45.42) pot fi satisfăcute numai cu:

$$b = 0, \pm \pi; \quad \underline{Z}_c = \pm j \left| \sqrt{\frac{B}{C}} \right| \quad (45.48)$$

$$\underline{A} = A = \pm \operatorname{ch} a; \text{ sau } A \leq -1 \text{ sau } A \geq 1 \quad (45.49)$$

(deoarece $\operatorname{ch} a \geq 1$).

Pentru frecvențele care asigură aceste inegalități, atenuarea nu mai este nulă, ci are expresia dependentă de frecvență:

$$a = \arg \operatorname{ch} |A| > 0. \quad (45.50)$$

În realitate, din cauza pierderilor și datorită faptului că impedanța de sarcină a unui lanț de cuadripoli nu poate fi realizată cu dependența de frecvență cerută de relațiile (45.43) și (45.48), rezultatele obținute constituie o idealizare. În condițiile acestei idealizări, studiul unui filtru consistă în determinarea frecvențelor de tăiere cu relațiile (45.46), respectiv (45.47), pentru lanțurile în Π sau în T — și în analiza caracteristicilor de frecvență a defazajului (45.45) — în intervalele de trecere — și a atenuării (45.50) — în intervalele de atenuare. Prezentăm în continuare câteva exemple.

45.3.3. *Filtre trece-jos* (fig. 45.4, a și b). Aceste filtre sînt de tipurile generale din figura 45.3, a sau b , cu

$$\underline{Z}_l = j \omega L, \quad \underline{Z}_t = \frac{1}{j \omega C}$$

și impedanțele caracteristice date de relațiile (45.36) sau 45.38). Condiția (45.46), respectiv (45.47), devine :

$$A = 1 - \frac{1}{2} \omega^2 L C = \pm 1,$$

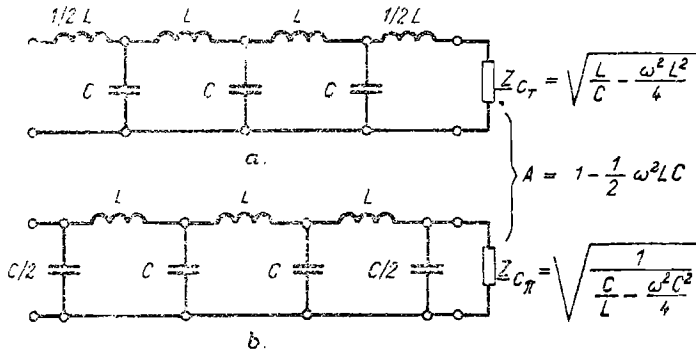


Fig. 45.4

de unde se obține intervalul de trecere ($-1 \leq A \leq +1$)

$$0 = \omega_i \leq \omega = \frac{2}{\sqrt{LC}}.$$

Avînd frecvența de tăiere inferioară egală cu zero, aceste filtre sînt de tipul trece-jos. În intervalul de atenuare rezultă caracteristica de frecvență :

$$\alpha = \arg \operatorname{ch} |A| = \arg \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} \omega^2 L C - 1 \right), \quad \omega \geq \omega_s,$$

reprezentată în figura 45.5.

45.3.4. Filtre trece-sus (fig. 45.6, a și b). Aceste filtre sînt de tipurile generale din figura 45.3, a sau b, cu

$$Z_l = \frac{1}{j \omega C}, \quad Z_t = j \omega L.$$

Condiția (45.46), respectiv (45.47), devine :

$$A = 1 - \frac{1}{2 \omega^2 L C} = 1,$$

de unde se obține intervalul de trecere ($-1 \leq A \leq +1$)

$$\frac{1}{2 \sqrt{LC}} = \omega_i \leq \omega < \omega_s = \infty.$$

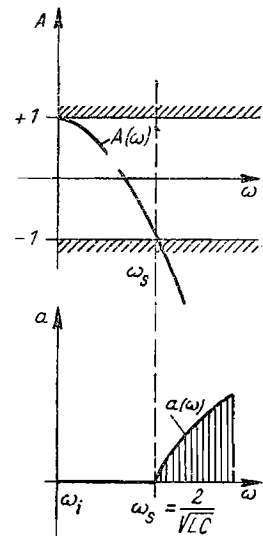


Fig. 45.5

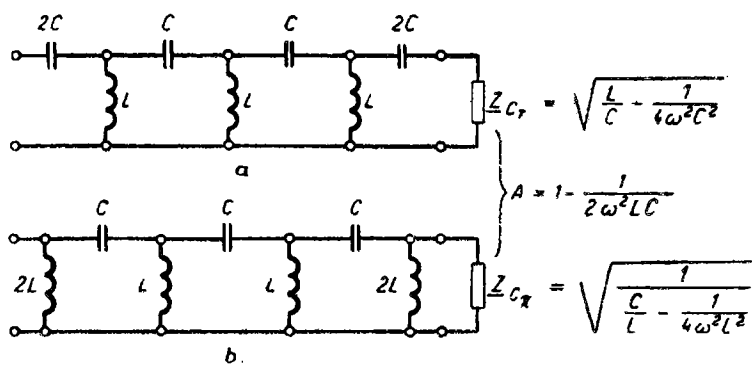


Fig. 45.6

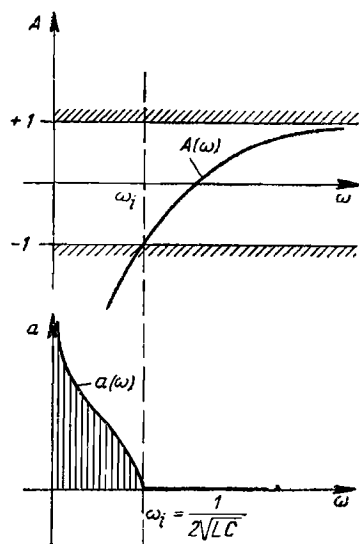


Fig. 45.7

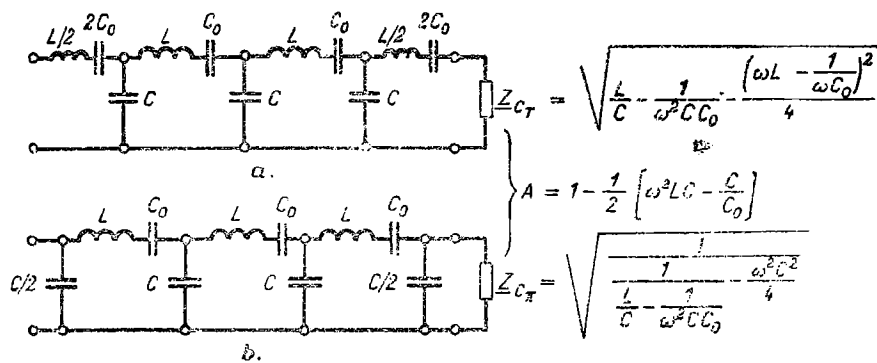


Fig. 45.8

Avînd frecvența de tăiere superioară infinită, aceste filtre sînt de tipul trece-sus. În intervalul de atenuare rezultă caracteristica de frecvență

$$a = \arg \operatorname{ch} |A| = \arg \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2\omega^2 LC} - 1 \right)$$

reprezentată în figura 45.7.

45.3.5. **Filtre trece-bandă** (fig. 45.8, *a* și *b*). Aceste filtre sînt de tipurile generale din figura 45.3, *a* sau *b*, cu

$$Z_L = j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C_0} \right); \quad Z_C = \frac{1}{j \omega C}.$$

Condiția (45.46), respectiv (45.47), devine :

$$A = 1 - \frac{1}{2} \left(\omega^2 LC - \frac{C}{C_0} \right) = \pm 1,$$

de unde se obține intervalul de trecere ($-1 \leq A \leq +1$)

$$0 < \frac{1}{\sqrt{LC_0}} = \omega_i \leq \omega \leq \omega_s = \sqrt{\frac{1}{LC_0} + \frac{4}{LC}} < \infty.$$

Avînd ambele frecvențe limită finite și nenule, aceste filtre rînt de tipul trece-bandă; în intervalele de atenuare rezultă caracteristicile de frecvență :

$$a = \arg \operatorname{ch} |A| = \arg \operatorname{ch} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\omega^2 LC - \frac{C}{C_0} \right) \right]; \quad \omega \leq \omega_i$$

$$a = \arg \operatorname{ch} |A| = \arg \operatorname{ch} \left[\frac{1}{2} \left(\omega^2 LC - \frac{C}{C_0} \right) - 1 \right]; \quad \omega \geq \omega_s$$

reprezentate în figura 45.9.

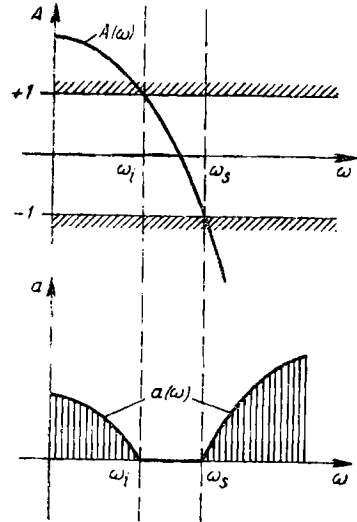


Fig. 45.9

46. || DIAGrame — LOC GEOMETRIC

În studiul circuitelor de curent alternativ se consideră nu numai un anumit regim de funcționare, ci și modul cum se modifică regimul de funcționare la variația foarte lentă a unui parametru oarecare : frecvența, o rezistență etc.

În cazul circuitelor în regim permanent sinusoidal se utilizează în acest scop locurile geometrice în planul complex ale vîrfurilor fazorilor corespunzători mărimilor sinusoidale considerate, la modificarea regimului de funcționare al circuitului.

Dacă se urmărește modificarea regimului de funcționare la variația a doi parametri, se obțin familii de curbe-loc geometric.

46.1. Inversiunea geometrică

Pentru teoria curbelor-loc geometric este deosebit de importantă transformarea punctuală numită *inversiune geometrică*.

46.1.1. **Puncte inverse.** Două puncte A și A' se numesc *puncte inverse* sau *reciproce* în raport cu un cerc dat, cu centrul în O (fig. 46.1), dacă este îndeplinită condiția

$$OA \cdot OA' = (OB)^2 = K. \quad (46.1)$$

Punctul O se numește *centru de inversiune*, mărimea reală K se numește *putere de inversiune*, iar cercul de rază $\sqrt{|K|}$, cerc de referință.

Observații: a) Dacă unul din puncte este situat în afara cercului, celălalt este situat în interiorul cercului.

b) Dacă puterea de inversiune e pozitivă (cazul din fig. 46.1), cele două puncte inverse sînt de aceeași parte a centrului de inversiune. Dacă această putere e negativă, cele două puncte sînt de o parte și de alta a centrului de inversiune.

c) Dacă trebuie construit inversul A' al unui punct dat A din exterior, se procedează astfel: din A

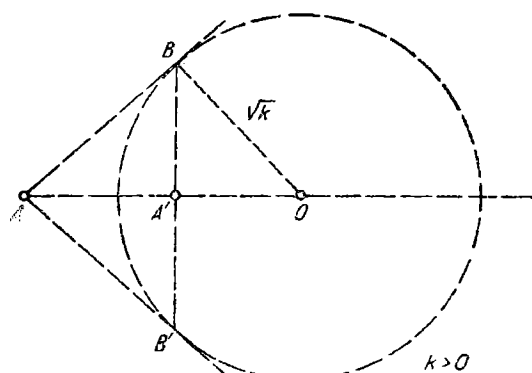


Fig. 46.1

se duc tangentele la cerc în B și B' ; punctul A' se obține la intersecția coardei BB' cu dreapta AO .

d) Dacă trebuie construit inversul A al unui punct dat A' din interior, se procedează astfel: din A' se ridică o perpendiculară pe OA' , care intersectează cercul în B și B' ; se duc tangentele la cerc în aceste puncte; intersecția tangențelor este punctul A , căutat în prelungirea razei OA' .

Prin inversiune, o curbă-loc geometric al punctului A se transformă în altă curbă: locul geometric al punctelor A' corespunzătoare. Dacă forma curbei este complicată, inversiunea se face prin puncte așa cum s-a procedat pentru punctele izolate din plan. În cazuri particulare, determinarea curbei inverse se poate efectua sistematic.

46.1.2 **Inversiunea unui cerc.** Se consideră cercul cu centrul în C_1 care nu trece prin centrul de inversiune. Inversele punctelor M și N pe dreapta OC_1 , față de centrul de inversiune O , se construiesc în conformitate cu relația (46.1):

$$OM \cdot OM' = ON \cdot ON' = K. \quad (46.2)$$

Pe segmentul $M'N'$, ca diametru, se construiește cercul C_2 (fig. 46.2) Acest cerc este inversul cercului C_1 . Pentru a demonstra aceasta, ducem din O o dreaptă care taie cercurile în M și N , respectiv în N' și M' , și alta care le taie în E și F , respectiv în F' și E' ; din relația (46.2) rezultă:

$$\frac{OM}{ON'} = \frac{ON}{OM'}$$

sau (folosind proprietățile proporțiilor):

$$\frac{OM}{ON'} = \frac{ON}{OM'} = \frac{OM + ON}{OM' + ON'} = \frac{ON - OM}{ON' - OM'}$$

sau

$$\frac{ON + OM}{ON - OM} = \frac{OM' + ON'}{OM' - ON'} \text{ adică } \frac{OC_1}{C_1N} = \frac{OC_2}{C_2M'} \quad (46.3)$$

Rezultă că cercurile cu centrele în C_1 și C_2 sînt omotetice față de centrul O . Se poate atunci scrie relația de asemănare:

$$\frac{OE}{OF'} = \frac{OF}{OE'} = \frac{OM}{ON'} = \frac{ON}{OM'},$$

oricare ar fi secanta $OEFF'E'$. Se obține egalitatea

$$OE \cdot OE' = OF \cdot OF'. \quad (46.4)$$

De altă parte, puterile punctului O față de cele două cercuri sînt

$$OM \cdot ON = OE \cdot OF$$

$$\text{și } OM' \cdot ON' = OE' \cdot OF'. \quad (46.5)$$

Înmulțind aceste relații și ținînd seama de relațiile (46.2) și (46.4) rezultă:

$$OM \cdot ON \cdot OM' \cdot ON' = K^2 = OE \cdot OF \cdot OF' \cdot OE' = (OE \cdot OE')^2 = (OF \cdot OF')^2$$

sau

$$OE \cdot OE' = OF \cdot OF' = K, \quad (46.6)$$

adică și punctul E și E' , respectiv F și F' sînt inverse unul altuia cu aceeași putere.

Observații: a) Linia dreaptă fiind un caz limită al cercului ($r \rightarrow \infty$), rezultă că inversa unei drepte este tot un cerc. Acest cerc trece prin centrul de inversiune, deoarece punctelor M de la infinit (ale drepte) trebuie să le corespundă, din relația (46.2), inverse cu $OM' = 0$.

b) Dacă centrul de inversiune este pe dreaptă, curba ei inversă e tot o dreaptă.

c) Curba inversă a unui cerc este o dreaptă sau un cerc, după cum centrul de inversiune se găsește sau nu pe cerc.

d) Centrele C_1 și C_2 a două cercuri inverse față de O nu sînt puncte inverse unul față de altul cu aceeași putere de inversiune cu a punctelor cercurilor.

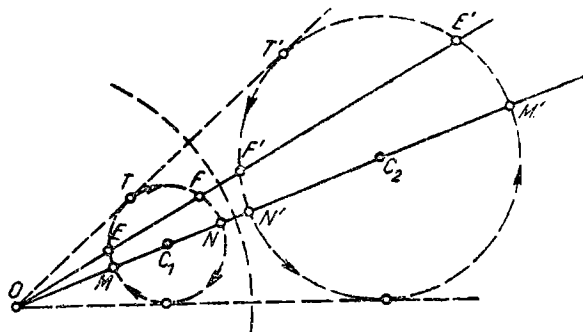


Fig. 46.2

46.2 Inversiunea complexă

În calculul circuitelor de curent alternativ cu ajutorul reprezentării în complex e utilizată *inversiunea complexă*, care diferă de inversiunea geometrică a acelorași puncte.

Două puncte în planul complex M și M' sînt *inverse* (în complex) unul altuia față de centrul de inversiune O , originea coordonatelor, dacă este îndeplinită condiția:

$$\underline{V} \cdot \underline{V}' = K, \quad (46.7)$$

în care $\underline{V} = V e^{j\beta}$ și $\underline{V}' = V' e^{j\beta'}$ sînt numere complexe cu afixele în M , respectiv M' (fig. 46.3). Presupunem că puterea de inversiune K e un număr real.

Rezultă :

$$\underline{V}' = \frac{K}{\underline{V}} = \frac{K}{V} e^{-j\beta} \quad (46.8)$$

cu

$$V' = \frac{K}{V} \text{ și } \beta' = -\beta. \quad (46.9)$$

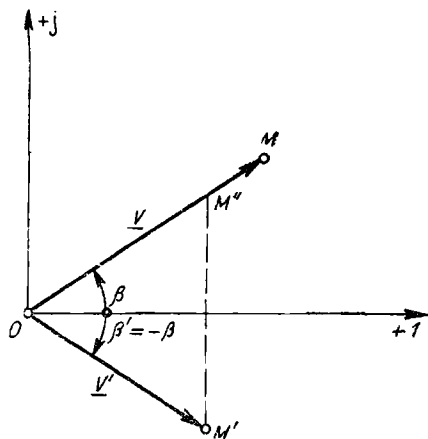


Fig. 46.3

Se observă că inversiunea unui punct în planul complex comportă două operații succesive (a căror ordine de efectuare e arbitrară) :

a) inversiunea geometrică a punctului M după regulile stabilite în paragraful 46.1.1., obținându-se punctul M'' ;

b) construirea simetricului punctului M'' față de axa reală, obținându-se astfel punctul M' (simetrizarea față de axa reală).

În calculul circuitelor de curent alternativ intervine deseori necesitatea de a obține prin inversiune admitanța complexă din impedanța complexă, și invers. Dar pentru determinarea puterii de inversiune K trebuie considerate și scările grafice ale impedanței (de ex. $a \frac{\Omega}{\text{cm}}$) și admitanței (de ex. $b \frac{S}{\text{cm}}$).

$$\underline{Z} \underline{Y} = (OA) a \cdot (OA') b = 1 \quad (46.10)$$

rezultă puterea de inversiune,

$$K = OA \cdot OA' = \frac{1}{ab}, \quad (46.11)$$

în care OA și OA' (de ex. în cm) sînt lungimile vectorilor din planul complex care reprezintă impedanța, respectiv admitanța, la scările indicate.

În figura 46.4 s-a construit admitanța cu ajutorul cercului de inversiune de rază $\sqrt{K} = \frac{1}{\sqrt{ab}}$.

Operațiile s-au succedat astfel: s-a construit impedanța complexă conjugată $\underline{Z}^*$, apoi, ducînd tangentele la cercul de inversiune și coarda punctelor de tangență, se obține punctul A' , vîrfurile admitanței $\underline{Y}$.

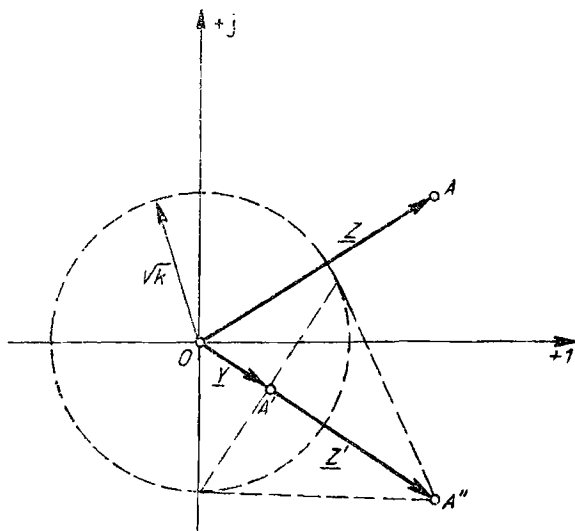


Fig. 46.4

46.3 Exemple de diagrame — loc geometric

Se vor prezenta cîteva curbe-loc geometric mai frecvent întîlnite în problemele electrotehnice.

46.3.1. **Dreapta.** O ecuație generală a unei mărimi complexe $\underline{C}$, funcțiune de gradul întâi de un parametru real p :

$$\underline{C} = \underline{A} + p\underline{B} \quad (46.12)$$

(cu $-\infty \leq p \leq +\infty$) reprezintă o dreaptă care se obține adunînd la fazorul fix $\underline{A}$ fazorul variabil $p\underline{B}$ de direcție fixă. În figura 46.5. s-a gradat dreapta în funcțiune de p .

Cazuri particulare: a) Ecuația unei drepte care trece prin origine (fig. 46.6, a) este:

$$\underline{C} = p\underline{B} = p(M + jN) \quad \text{cu } \underline{B} = M + jN. \quad (46.13)$$

b) Ecuația unei drepte paralelă cu axa reală (fig. 46.6, b) este:

$$\underline{C} = \underline{A} + pM \quad (\text{Im}\{\underline{B}\} = 0). \quad (46.14)$$

c) Ecuația unei drepte paralelă cu axa imaginară (fig. 46.6, c) este:

$$\underline{C} = \underline{A} + j pN \quad (\text{Re}\{\underline{B}\} = 0). \quad (46.15)$$

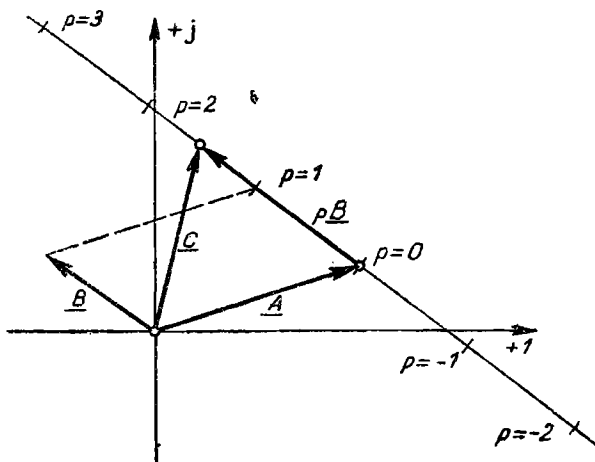


Fig. 46.5

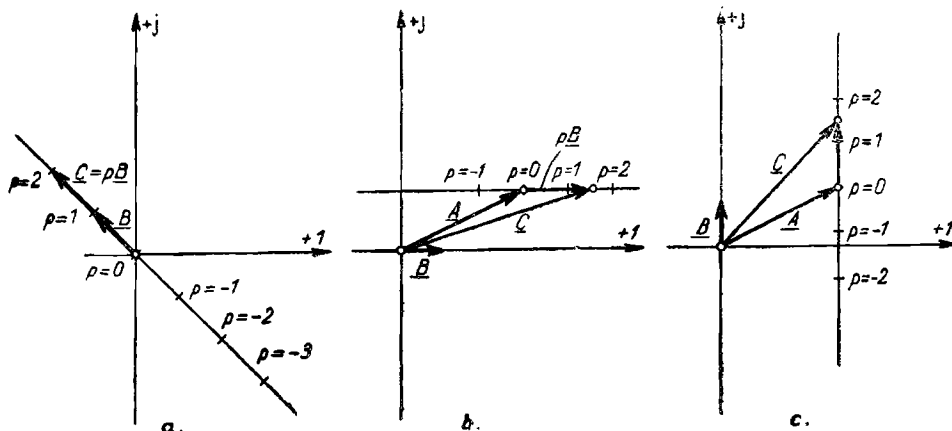


Fig. 46.6

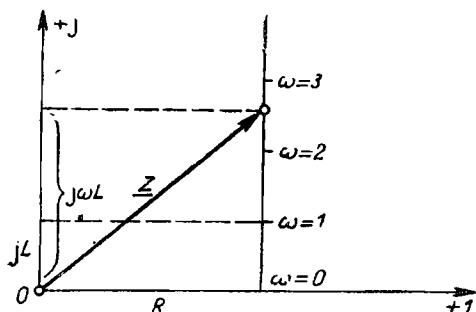


Fig. 46.7

Aplicație: Impedanța unei bobine de rezistență R și inductivitate L constante este funcție de pulsația $\omega = 2\pi f$. Dacă pulsația variază, impedanța

$$Z = R + j\omega L \quad (46.16)$$

are diagrama loc geometric din figura 46.7.

46.3.2. Cercul care trece prin origine. O ecuație generală a unei mărimi complexe $\underline{D}$, care e inversa unei funcțiuni liniare de un parametru real p ,

$$\underline{D} = \frac{1}{\underline{A} + p\underline{B}}, \quad (46.17)$$

reprezintă un cerc care trece prin origine. În adevăr, numitorul are ca loc geometric o dreaptă, iar locul lui $\underline{D}$ se obține prin inversiunea unei drepte față de origine ca centru de inversiune.

Dacă $\underline{A} = A e^{j\alpha}$, $\underline{B} = B e^{j\beta}$ și se divid numărătorul și numitorul relației (46.17) cu $\underline{A}$, se obține:

$$\underline{D} = \frac{\frac{1}{\underline{A}}}{1 + p \frac{\underline{B}}{\underline{A}}} = \frac{\underline{D}_0}{1 + p \frac{\underline{B}}{\underline{A}}}, \quad (46.18)$$

în care

$$\underline{D}_0 = \frac{1}{\underline{A}} = (\underline{D})_{p=0}. \quad (46.19)$$

Construcția cercului-loc geometric al afixelor mărimii complexe $\underline{D}$ se face în modul următor (fig. 46.8):

a) se desenează dreapta-loc geometric $\underline{C} = \underline{A} + p\underline{B}$ și simetrica ei față de axa reală $\underline{C}^*$ (dreapta conjugată);

b) se construiește $\underline{D}_0 = \frac{1}{\underline{A}} = \frac{1}{A} e^{-j\alpha}$, care reprezintă o coardă a cercului ($\underline{D} = \underline{D}_0$ pentru $p = 0$);

c) se construiește de asemenea o perpendiculară din origine pe dreapta $\underline{C}^*$, care reprezintă direcția diametrului cercului. Într-adevăr, $\underline{D}$ are modulul maxim (diametrul cercului) când $\underline{C}$, respectiv $\underline{C}^*$, are modulul minim (reprezentat de distanța din origine la dreapta);

d) centrul cercului O' se găsește la intersecția perpendicularei pe $\underline{C}^*$ cu perpendiculara ridicată pe mijlocul segmentului reprezentat de $\underline{D}_0$;

e) unghiul între segmentul O_1O' și segmentul O_1O ($\underline{D}_0$) este

$$\gamma = \beta - \alpha - \frac{\pi}{2}.$$

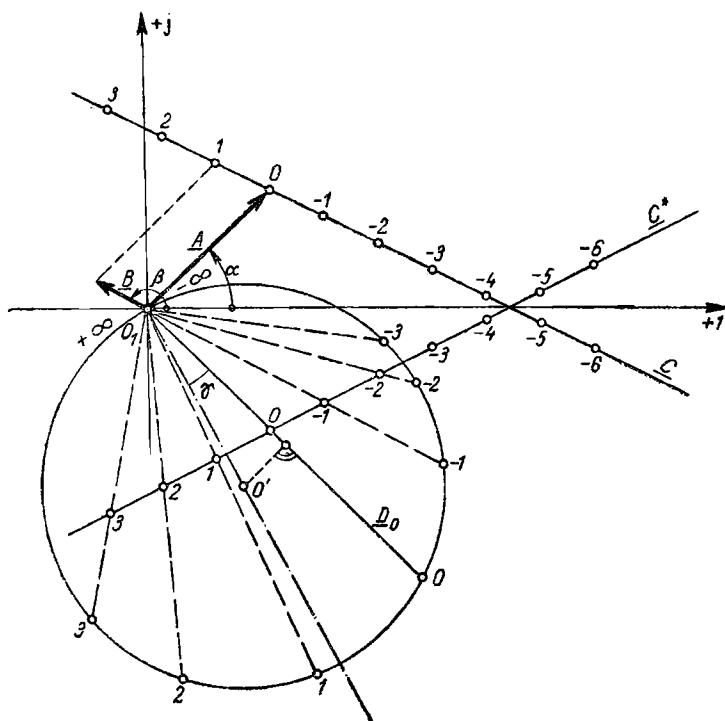


Fig. 46.3

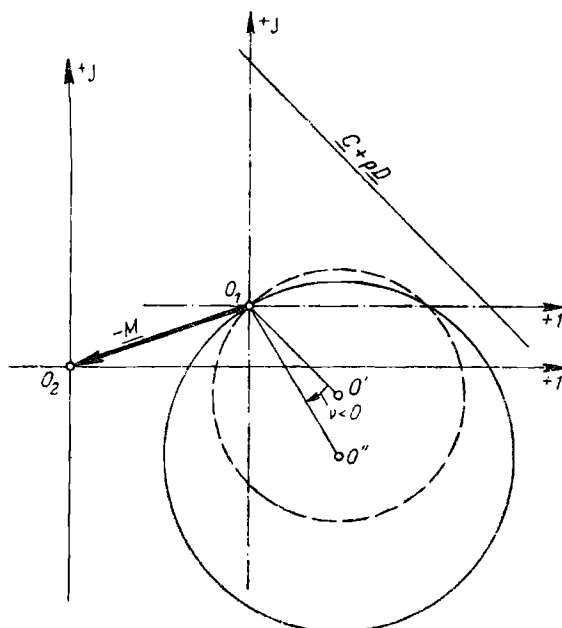


Fig. 46.9

Gradarea cercului pentru $-\infty < p < +\infty$ se face gradînd întîi dreapta $\underline{C}$, apoi conjugata $\underline{C}^*$ și unind originea pe rînd cu diferitele puncte care reprezintă valorile p pe dreapta $\underline{C}^*$. Intersecțiile acestor coarde cu cercul reprezintă virfurile mărimii $\underline{D}$ pentru valorile corespundente ale parametrului p .

46.3.3 Cercul cu poziție oarecare. Cea mai generală ecuație a cercului ca loc geometric în planul complex e:

$$\underline{K} = \frac{\underline{A} + p\underline{B}}{\underline{C} + p\underline{D}}, \quad (46.20)$$

unde p e un parametru real cuprins între $-\infty$ și $+\infty$.

În adevăr:

$$\underline{K} = \frac{\underline{B}}{\underline{D}} + \left(\underline{A} - \frac{\underline{B}\underline{C}}{\underline{D}} \right) \frac{1}{\underline{C} + p\underline{D}} = \underline{M} + \underline{N} \underline{K}', \quad (46.21)$$

în care

$$\underline{M} = \frac{\underline{B}}{\underline{D}}; \quad \underline{N} = \underline{A} - \frac{\underline{B}\underline{C}}{\underline{D}}; \quad \underline{K}' = \frac{1}{\underline{C} + p\underline{D}}. \quad (46.22)$$

Se observă că locul geometric al mărimii $\underline{K}'$ este un cerc care trece prin origine.

Toți factorii $\underline{K}'$ se multiplică cu $\underline{N} = N e^{j\nu}$, adică sînt roțiți cu ν și modulul lor se multiplică cu N . Deci $\underline{N}\underline{K}'$ reprezintă tot un cerc care trece prin origine. Pentru a obține locul geometric indicat de relația (46.21), este necesar ca toate punctele cercului să fie deplasate cu $\underline{M}$ față de origine sau ca originea să fie deplasată cu $-\underline{M}$.

O primă metodă de construcție a unui cerc reprezentat de relația (46.20) e indicată în figura 46.9:

- se construiește în modul cunoscut (par. 46.3.2) cercul $\underline{K}'$, cu centrul în O' ;
- se rotește raza O_1O' cu unghiul ν și se multiplică cu N , obținînd raza O_1O'' (în figură s-a considerat cazul $\nu < 0$);
- se deplasează cu $-\underline{M}$ originea din O_1 în O_2 .

Cercul căutat e cercul de rază OO'' , cu centrul în O'' față de axele din O_2 . Gradarea cercului se face după rotirea dreptei cu unghiul ν în modul cunoscut din figura 46.8 față de originea O_1 .

O altă metodă, mai simplă, consistă în a construi cercul prin trei puncte determinate de fazorii:

$$\underline{K}_0 = \frac{\underline{A}}{\underline{C}}; \quad \underline{K} = \frac{\underline{B}}{\underline{D}}; \quad \underline{K}_1 = \frac{\underline{A} + \underline{B}}{\underline{C} + \underline{D}} \quad (46.23)$$

(pentru $p = 0$) (pentru $p = \infty$) (pentru $p = 1$).

46.4. Aplicație. Diagrama — loc geometric al curentului primar al unui cuadripol pasiv

Considerăm ecuațiile fundamentale ale unui cuadripol:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A} \underline{U}_2 + \underline{B} \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 &= \underline{C} \underline{U}_2 + \underline{D} \underline{I}_2. \end{aligned} \quad ((46.24))$$

Dacă se consideră tensiunea la intrare origine de fază și invariabilă $\underline{U}_1 = \underline{U}_1 = \text{const.}$, defazajul receptorului φ_2 inductiv invariabil, iar impedanța receptorului proporțională cu un parametru real p , se obțin ecuațiile :

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_2(\underline{R} + p \underline{A} \underline{Z}_2)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2(\underline{D} + p \underline{C} \underline{Z}_2),$$

în care $p \underline{Z}_2$ este impedanța variabilă a receptorului.

Se obține pentru curentul primar expresia :

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_1 \frac{\underline{D} + p \underline{C} \underline{Z}_2}{\underline{B} + p \underline{A} \underline{Z}_2} = \underline{I}_1(p), \quad (46.25)$$

care este analogă relației (46.20).

În consecință, locul geometric al curentului $\underline{I}_1$ este un cerc care nu trece prin origine. Acest cerc se poate construi prin trei puncte, determinând valorile curentului pentru :

$$p = \infty \quad (\text{în gol}) \quad \underline{I}_1(\infty) = \underline{U}_1 \frac{\underline{C}}{\underline{A}} = \underline{I}_{10} \quad (46.26)$$

$$p = 0 \quad (\text{în scurtcircuit}) \quad \underline{I}_1(0) = \underline{U}_1 \frac{\underline{D}}{\underline{B}} = \underline{I}_{1sc} \quad (46.27)$$

$$p = 1 \quad \underline{I}_1(1) = \underline{U}_1 \frac{\underline{D} + \underline{C} \underline{Z}_2}{\underline{B} + \underline{A} \underline{Z}_2}; \quad (46.28)$$

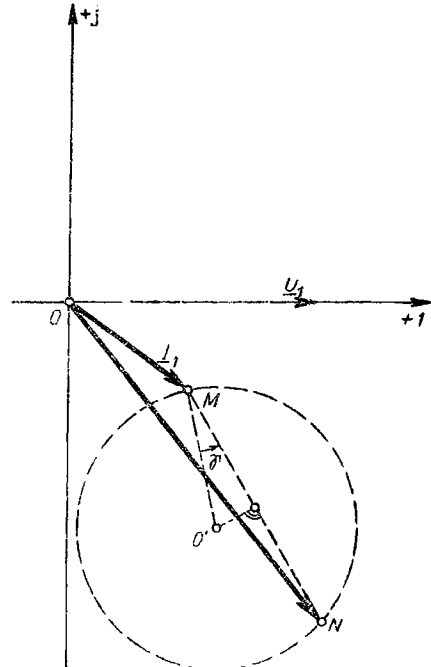


Fig. 46.10

Cercul se poate construi și în modul următor (fig. 46.10) :

Se stabilesc virfurile fazorilor $\underline{I}_{10}$ și $\underline{I}_{1sc}$ în M , respectiv N . Ca în figura 46.8 se determină unghiul γ dintre MN și MO' . Centrul cercului se găsește la intersecția normalei ridicate pe mijlocul segmentului MN și direcția MO' .

CIRCUITE ELECTRICE ÎN REGIM PERIODIC NESINUSOIDAL

47. || REGIMUL PERIODIC NESINUSOIDAL ȘI CARACTERIZAREA LUI

În paragrafele precedente s-a studiat regimul periodic sinusoidal al rețelilor electrice, adică regimul permanent stabilit în rețele liniare sub acțiunea unor tensiuni electromotoare sinusoidale și de aceeași frecvență.

În realitate însă, variația în timp a tensiunilor electromotoare se abate mai mult sau mai puțin de la forma sinusoidală, datorită însăși construcției generatorului. În adevăr, repartitia inducției magnetice în întrefierul mașinii nu poate fi strict sinusoidală, deoarece nu se poate realiza o așezare corespunzătoare a conductoarelor în creștături. Abaterea curbei de variație periodică în timp a unui curent sau a unei tensiuni de la forma sinusoidală se numește *deformare* sau *distorsiune*. Așa cum vom arăta, în cazul în care circuitele electrice conțin inductivități, deformările curenților datorite deformărilor tensiunii se slăbesc, dar în cazul în care există condensatoare deformările curenților se accentuează. De altă parte, elementele de circuit neliniare (bobine cu miez de fier saturat, redresoare etc.) produc deformări ale curentului chiar dacă tensiunile aplicate circuitului sînt riguros sinusoidale. Conform clasificării făcute de C. Budeanu¹, elementele de circuit neliniare sînt *elemente deformante de prima categorie*, iar elementele de circuit reactive (capacitive) liniare sînt *elemente deformante de a doua categorie*.

În electroenergetică, efectele deformante sînt supărătoare, deoarece micșorează factorul de putere, produc rezonanțe etc., și se încearcă evitarea lor prin diverse mijloace. În electrocomunicații însă, efectele deformante pot fi utile (în scopul însuși al transmisiunii informațiilor prin semnale, de ex. pentru modulație) sau nu (de ex. distorsiunile sistemelor de transmisiune, care reduc fidelitatea transmisiunii realizate). Totodată, în electrocomunicații semnalele transmise sînt, de obicei, nesinusoidale, chiar dacă se pot considera practic periodice.

Ideea fundamentală care stă la baza studiului circuitelor în regim periodic nesinusoidal consistă în descompunerea tuturor mărimilor în sume (serii) de termeni sinusoidali.

¹ Constantin Budeanu (1886—1959) a fost membru al Academiei R.P.R. și profesor de Bazele electrotehnicii la Institutul Politehnic București.

47.1. Descompunerea spectrală (analiza armonică) a funcțiunilor periodice de timp

47.1.1. **Serie trigonometrică.** O funcțiune periodică de timp e caracterizată de identitatea :

$$f(t) \equiv f(t + mT) \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (47.1)$$

în care $T = 2\pi/\omega = 1/f$ e perioada, $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ e pulsația (fundamentală), iar $f = 1/T$ e frecvența (fundamentală).

Orice astfel de funcțiune care satisface condițiilor lui Dirichlet¹ se poate dezvolta în serie trigonometrică (Fourier) sub forma :

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t), \quad (47.2)$$

în care termenii de pulsație $n\omega$ se numesc *armonici de ordinul n* în cosinus, respectiv în sinus, avînd coeficienții dați de relațiile :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t \, dt & n = 0, 1, 2, \dots ; \\ B_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t \, dt & n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (47.3)$$

Pentru $n = 0$,

$$\frac{A_0}{2} = F_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \, dt \geq 0 \quad (47.4)$$

este valoarea medie sau *componenta continuă* a funcțiunii periodice date. Mărimile $|A_n|$, respectiv $|B_n|$, sînt amplitudinile armonicelor de ordinul n în cosinus, respectiv în sinus. Valabilitatea relațiilor (47.3), (47.4) se verifică fără dificultăți, înlocuind pe $f(t)$ cu seria (47.2) și efectuînd integrarea.

În electrotehnică, seria Fourier se pune sub o altă formă, strîngînd în aceeași expresie termenii în cosinus și în sinus de același ordin pe baza identității :

$$\begin{aligned} f_n(t) &= F_n \sqrt{2} \sin(n\omega t + \gamma_n) \equiv F_n \sqrt{2} \sin \gamma_n \cos n\omega t + F_n \sqrt{2} \cos \gamma_n \sin n\omega t \equiv \\ &\equiv A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t. \end{aligned} \quad (47.5)$$

¹ Funcțiunea e *netedă pe porțiuni* în cuprinsul unei perioade, adică : e mărginită ; are în acest interval un număr finit de discontinuități (de primul ordin) ; intervalul se poate descompune într-un număr finit de subintervale, în care funcțiunea e monotonă.

Cu această scriere seria trigonometrică devine :

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sqrt{2} \sin(n\omega t + \gamma_n). \quad (47.6)$$

În aceste relații : $f_n(t)$ e *armonica (instantanee) de ordinul n* ; $f_1(t)$ e *armonica (instantanee) de ordinul 1 sau fundamentală*;

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad (47.7)$$

e *valoarea efectivă a armonicii de ordinul n* ;

$$\gamma_n = \arctg \frac{A_n}{B_n} = \arcsin \frac{A_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}} = \arccos \frac{B_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}} \quad (47.8)$$

e faza inițială a armonicii de ordinul n , determinabilă univoc numai prin $\sin \gamma_n$ și $\cos \gamma_n$, deoarece poate avea orice valoare, redusă la intervalul $(-\pi, +\pi)$.

Dacă funcțiunea $f(t)$ e cunoscută prin reprezentarea ei grafică, ridicată de exemplu experimental, coeficienții Fourier A_n și B_n se pot determina cu metode aproximative — suficient de precise — numite *metode grafico-analitice de analiză armonică*¹.

47.1.2. Funcțiuni periodice particulare. Lipsa sau prezența armonicelor dintr-o anumită categorie corespunde unor proprietăți particulare ale funcțiunii periodice considerate și se poate adesea recunoaște numai privind graficul funcțiunii.

Astfel, dacă (fig. 47.1, a)

$$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right), \quad (47.9)$$

trebuie să fie satisfăcută identitatea

$$\begin{aligned} F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t] &\equiv -F_0 - \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega t + n\pi) + \\ &+ B_n \sin(n\omega t + n\pi)] \equiv -F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} A_n \cos n\omega t + (-1)^{n+1} B_n \sin n\omega t. \end{aligned}$$

Rezultă pentru coeficienții Fourier condițiile :

$$F_0 = 0; \quad A_2 = 0; \quad B_2 = 0; \quad \dots F_{2k} = 0.$$

Funcțiunea considerată, numită *funcțiune alternativă simetrică*, nu are decât armonici impare

$$f(t) = F_1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma_1) + F_3 \sin(3\omega t + \gamma_3) + \dots \quad (47.10)$$

Aceasta este situația tensiunilor electromotoare ale generatoarelor sincrone, la care condiția (47.9) e realizată prin construcția mașinii, care asigură un câmp învîrtitor cu repartitie identică (pină la sens) în dreptul polilor N , respectiv S .

¹ v. A. I. T. H. P o p e s c u, *Curs de electrotehnică, partea I-a, Analiza armonică*, (litografiat) — București, 1947 și

I. S. A n t o n i u, *Chestiuni speciale de electrotehnică*, București, 1956.

În mod analog se stabilește prezența și lipsa unor armonici la alte forme particulare de funcțiuni periodice : numai cu armonici pare (fig.47.1,b), numai cu armonici în sinus (fig 47.1,c), numai cu armonici în cosinus (fig. 47.1,d).

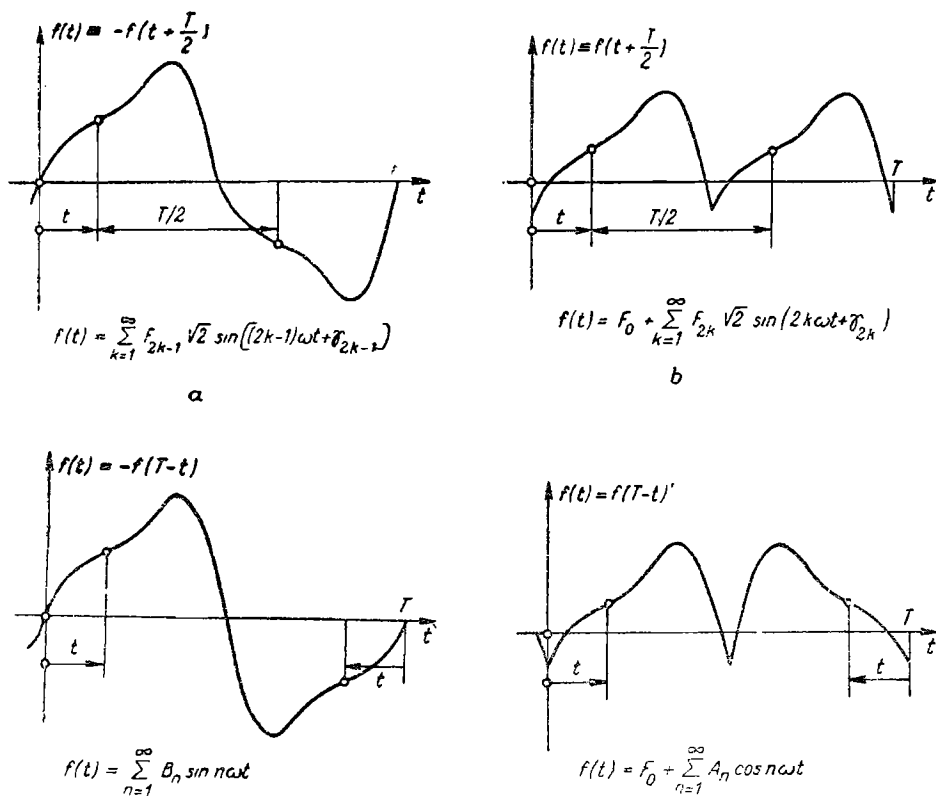


Fig. 47.1

47.1.3. Aplicații: 1. Să se dezvolte în serie Fourier semnalul dreptunghiular din figura 47.2, de amplitudine A .

Soluție: Se observă că analitic semnalul se scrie:

$$f(t) = \begin{cases} +A & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -A & \frac{T}{2} < t < T. \end{cases} \quad (47.11)$$

Deoarece $f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right) = -f(T-t)$, semnalul nu conține armonici pare și armonici în cosinus, adică

$$F_0 = 0 \quad F_{2k} = 0 \quad A_n = 0,$$

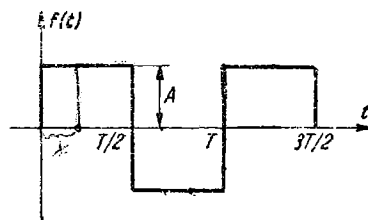


Fig. 47.2

$$\begin{aligned}
 B_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n \omega t dt = \frac{2}{T} A \int_0^{\frac{T}{2}} \sin n \omega t dt - \frac{2}{T} A \int_{\frac{T}{2}}^T \sin n \omega t dt \\
 &= \frac{2A}{n \omega T} \left[\left| -\cos n \omega t \right|_0^{\frac{T}{2}} - \left| -\cos n \omega t \right|_{\frac{T}{2}}^T \right] = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n = 2k \\ \frac{4A}{\pi n} & \text{dacă } n = 2k-1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Singurii coeficienți nenuli sînt deci :

$$B_{2k-1} = \frac{4A}{\pi(2k-1)} \quad k = 1, 2, \dots, \quad (47.12)$$

iar dezvoltarea căutată este :

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k-1} \sin(2k-1)\omega t = \frac{4A}{\pi} \left[\sin n \omega t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega t + \frac{1}{5} \sin 5 \omega t + \dots \right]. \quad (47.13)$$

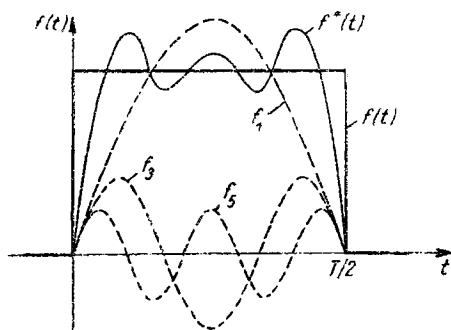


Fig. 47.3

Dacă funcțiunea se aproximează prin suma $f^*(t)$ a primilor trei termeni, se obține curba din figura 47.3. Cu cît se consideră mai multe armonice, cu atît se obține o curbă mai apropiată de dreptunghi.

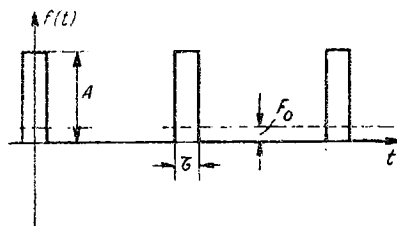


Fig. 47.4

2. Să se dezvolte în serie Fourier semnalul constituit din impulsii dreptunghiulare de amplitudine A , cu durată impulsului τ_0 (fig. 47.4).

Soluție: se observă că analitic acest semnal se scrie $(0, T)$:

$$y(t) = \begin{cases} A, & \text{pentru } 0 < t < \frac{\tau_0}{2} \\ 0, & \text{pentru } \frac{\tau_0}{2} < t < T - \frac{\tau_0}{2} \\ A, & \text{pentru } T - \frac{\tau_0}{2} < t < T \end{cases} \quad (47.14)$$

Deoarece $f(t) = f(T - t)$, semnalul conține numai armonici în cosinus și componenta continuă. Se obține relația

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t \, dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{\tau_0}{2}} A \cos n\omega t \, dt + \int_{T-\frac{\tau_0}{2}}^T A \cos n\omega t \, dt = \\ &= \frac{2A}{T} \left[\frac{\sin n\omega \frac{\tau_0}{2}}{n\omega} + \frac{\sin n\omega T}{n\omega} - \frac{\sin n\omega \left(T - \frac{\tau_0}{2}\right)}{n\omega} \right] = \\ &= \frac{4A}{T} \cdot \frac{\sin n\omega \frac{\tau_0}{2}}{n\omega} = \frac{2A}{\pi n} \sin \pi n\beta, \end{aligned}$$

în care $\beta = \frac{\tau_0}{T}$, și relația

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \, dt = \frac{A}{T} \left(\frac{\tau_0}{2} + \frac{\tau_0}{2} \right) = A\beta.$$

Rezultă :

$$f(t) = A\beta \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n\beta}{\pi n\beta} \cos n\omega t \right\}. \quad (47.15)$$

În telecomunicații se întâlnesc adesea semnale constituite din succesiuni de impulsii. În numeroase situații se întâlnesc impulsii foarte scurte, cu $\tau_0 \ll T$ și $\beta \ll 1$. Din relația (47.14) rezultă că primele armonici ale acestor semnale au amplitudini practic egale, deoarece

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\sin \pi n\beta}{\pi n\beta} \rightarrow 1.$$

În cazul idealizat în care impulsurile ar fi infinit de scurte ($\tau_0 \rightarrow 0$) și infinit de înalte ($A \rightarrow \infty$), dar cu o arie finită

$$\lim_{\tau_0 \rightarrow 0} A\tau_0 = S$$

(impulsii delta sau impulsii Dirac), ar rezulta

$$A\beta \rightarrow \frac{S}{T}$$

$$f(t) = \frac{2S}{T} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\omega t \right). \quad (47.16)$$

47.2. Seria Fourier complexă

O funcțiune periodică reală $f(t)$ care admite o dezvoltare în serie trigonometrică de forma (47.2) poate fi scrisă și ca sumă a unei serii cu termeni complecși, exponențiali. Pentru aceasta observăm din relațiile (47.3) că A_n e o funcțiune pară și B_n o funcțiune impară de indicele n

$$A_n = A_{-n}; \quad B_n = -B_{-n}. \quad (47.17)$$

Seria (47.2) poate fi atunci scrisă :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{A_n}{2} \cos n \omega t + \frac{B_n}{2} \sin n \omega t \right). \quad (47.18)$$

În adevăr, termenii cu $n > 0$ ne dau jumătate din valoarea termenilor corespunzători din relația (47.2), termenii cu $n < 0$ cealaltă jumătate [deoarece $A_{-n} \cos(-n \omega t) = A_n \cos n \omega t$ și $B_{-n} \sin(-n \omega t) = -B_n \sin n \omega t$], iar termenul $n = 0$ ne dă doar $A_0/2$, adică termenul liber.

Înlocuind în relația (47.18) cosinusul și sinusul cu formulele

$$\cos n \omega t = \frac{1}{2} (e^{jn \omega t} + e^{-jn \omega t}); \quad \sin n \omega t = \frac{1}{2j} (e^{jn \omega t} - e^{-jn \omega t})$$

rezultă :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[\frac{A_n - jB_n}{4} e^{jn \omega t} + \frac{A_n + jB_n}{4} e^{-jn \omega t} \right]$$

sau

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{A_n - jB_n}{2} e^{jn \omega t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn \omega t} \quad (47.19)$$

deoarece suma termenilor în $e^{-jn \omega t}$ e egală cu suma termenilor în $e^{jn \omega t}$, după cum rezultă cu relația (47.17), punind $n \rightarrow -n$.

Relația (47.19) reprezintă dezvoltarea în serie Fourier complexă a funcțiunii reale $f(t)$ (parte imaginară a sumei e nulă). Coeficienții dezvoltării se numesc amplitudini spectrale și cu relațiile (47.3) rezultă :

$$C_n = C_{-n}^* = \frac{A_n - jB_n}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn \omega t} dt. \quad (47.20)$$

Observații : a) Dezvoltarea în serie complexă Fourier nu trebuie confundată cu reprezentarea în complex a seriei trigonometrice. Folosind regulile cunoscute, seria trigonometrică (47.2), respectiv relația (47.6), se poate reprezenta în complex nesimplificat termen cu termen numai în cazul funcțiunilor alternative ($F_0 = 0$) sub forma :

$$\underline{f}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{j\frac{\pi}{2}} + B_n) e^{jn \omega t} = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n + jA_n) e^{jn \omega t} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} F_n e^{j(n \omega t + \gamma_n)} \quad (47.21)$$

astfel că

$$f(t) = \text{Im} \{ \underline{f}(t) \}. \quad (47.22)$$

Dacă se cunoaște însă amplitudinea spectrală $\underline{C}_n$, din relațiile (47.20) și (47.21), rezultă :

$$\sqrt{2}F_n e^{j\gamma_n} = B_n + jA_n = 2j \left(\frac{A_n - jB_n}{2} \right) =$$

$$= 2j \underline{C}_n$$

sau

$$\underline{C}_n = -j \frac{F_n}{\sqrt{2}} e^{j\gamma_n} = \frac{F_n}{\sqrt{2}} e^{j(\gamma_n - \frac{\pi}{2})}. \quad (47.23)$$

b) Mulțimea amplitudinilor $\sqrt{2}F_n$ ale armonicilor unui semnal [sau, ceea ce e tot una, a dublilor modulelor amplitudinilor spectrale $2|C_n| = \sqrt{2}F_n$] se numește *spectrul semnalului* și se reprezintă, de obicei, ca un șir discret de valori funcție de n . Spectrul semnalelor periodice e un spectru discret. În figura 47.5 a și b sînt reprezentate spectrele semnalului dreptunghiular (47.13) și spectrul semnalului constituit de o succesiune de impulsii delta (47.16).

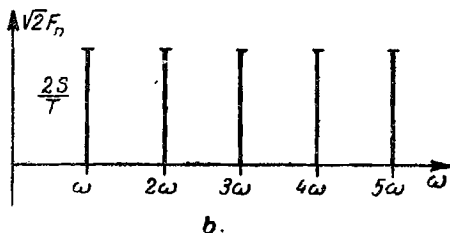
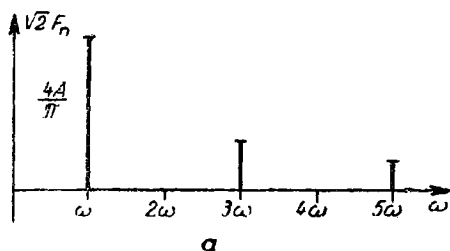


Fig. 47.5

47.3. Proprietăți ale mărimilor periodice nesinusoidale

47.3.1. Valoarea medie a produsului a două armonici. Dacă

$$f_n = F_n \sqrt{2} \sin(n\omega t + \gamma_n) \quad \text{și}$$

$$g_m = G_m \sqrt{2} \sin(m\omega t + \delta_m) \quad (47.24)$$

sînt două armonici de ordinele n și m ($n \geq m$), valoarea medie a produsului lor pe o perioadă T a fundamentalei este :

$$\widetilde{f_n g_m} = \frac{1}{T} \int_0^T 2F_n G_n \sin(n\omega t + \gamma_n) \sin(m\omega t + \delta_m) dt =$$

$$= F_n G_n \left[\frac{1}{T} \int_0^T \cos((n-m)\omega t + \gamma_n - \delta_m) dt - \frac{1}{T} \int_0^T \cos((n+m)\omega t + \gamma_n + \delta_m) dt \right].$$

A doua integrală e nulă pentru orice n și m , deoarece valoarea medie a unei funcțiuni sinusoidale pe un număr întreg de perioade e nulă. Prima integrală e nulă dacă $n \neq m$ din același motiv, iar pentru $n = m$ are valoarea $\frac{T}{2} \cdot \cos(\gamma_n - \delta_n)$. De aceea rezultă :

$$\frac{1}{T} \int_0^T f_n g_m dt = \widetilde{f_n g_m} = 0 \quad n \neq m \quad (47.25)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T f_n g_n dt = \widetilde{f_n g_n} = F_n G_n \cos(\gamma_n - \delta_n). \quad (47.26)$$

Valoarea medie a produsului a două armonici de același ordin e egală cu produsul valorilor lor efective prin cosinusul decalajului dintre ele (și se anulează la mărimi în cuadratură).

47.3.2. Valoarea efectivă a unei mărimi periodice nesinusoidale. Valoarea efectivă a unei mărimi periodice e definită în cazul general de relația (33.5):

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2 dt}. \quad (47.27)$$

În cazul unui curent periodic dezvoltat în serie Fourier:

$$i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} I_n \sin(n\omega t + \gamma_n) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} i_n(t) \quad (47.28)$$

se obține:

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} i_n \right] \left[I_0 + \sum_{m=1}^{\infty} i_m \right] dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 dt + \frac{I_0}{T} \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} i_n + \sum_{m=1}^{\infty} i_m \right) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} i_n i_m dt = \\ &= I_0^2 + 2 I_0 \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{i_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \widetilde{i_n i_m}, \end{aligned}$$

dar $\widetilde{i_n} = 0$, iar $\widetilde{i_n i_m} = 0$ cu $n \neq m$ (47.25) și $\widetilde{i_n^2} = I_n^2$ (47.26) așa că

$$\begin{aligned} I^2 &= I_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2 \quad \text{sau} \\ I &= \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_n^2 + \dots} \geq 0. \end{aligned} \quad (47.29)$$

Valoarea efectivă a unei mărimi periodice e rădăcina pătrată a sumei pătratelor valorilor efective ale armonicilor și a pătratului componentei continue. De aici rezultă că dacă o serie Fourier, adică o sumă de armonice, este nulă la orice t și deci are valoare efectivă nulă, aceasta nu se poate decât dacă toate armonicile au valori efective nule, adică sînt identice nule. Rezultă deci că:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \equiv 0 \text{ implică } f_n(t) \equiv 0 \text{ cu } n = 0, 1, 2, \dots \quad (47.30)$$

În mod analog, dacă o tensiune periodică este

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n \sqrt{2} \sin(n\omega t + \beta_n), \quad (47.31)$$

valoarea ei efectivă este

$$U = \sqrt{U_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n^2}. \quad (47.32)$$

47.3.3. Coeficientul de distorsiune. Abaterea unei mărimi periodice de la forma sinusoidală se face (făcînd abstracție de componenta continuă care nu afectează forma) prin *coeficientul de distorsiune* K_d definit de raportul dintre valoarea efectivă I_d a tuturor armonicilor superioare (reziduul deformat) și valoarea efectivă a componentei alternative a mărimii. În cazul curentului (47.28)

$$k_d = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + \dots}}{\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots}} = \sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{\infty} I_n^2}{\sum_{n=1}^{\infty} I_n^2}} = \frac{I_d}{\sqrt{I^2 - I_0^2}}. \quad (47.33)$$

Se observă că acest coeficient de distorsiune e pozitiv și subunitar

$$0 \leq k_d \leq 1.$$

Fără a da o indicație asupra formei exacte a mărimii (există o infinitate de mărimi periodice cu același coeficient de distorsiune și cu forme diferite, rezultate din defazațele relative ale armonicilor, care nu sînt prinse în relația (47.32) coeficientul de distorsiune este util, deoarece crește monoton în raport cu oricare dintre valorile efective ale armonicilor. Practic — în electroenergetică — o mărime se consideră sinusoidală dacă $k_d < 5\%$. În telecomunicații această condiție se formulează de la caz la caz, după natura semnalului considerat și a fidelității cerute.

Pentru mărimi periodice alternative, simetrice, de forma (47.10), se mai definesc :

$$\text{Factorul de vîrf} \quad k_v = \frac{I_{max}}{I} \quad (47.34)$$

$$\text{Factorul de formă} \quad k_f = \frac{I}{\frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T/2} i dt} \quad (47.35)$$

(unde t_0 e momentul în care i trece prin zero cu valori crescătoare). La mărimi sinusoidale rezultă :

$$k_d = 0, \quad k_v = \sqrt{2}, \quad k_f = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11. \quad (47.36)$$

47.3.4. **Aplicație.** Să se calculeze valoarea efectivă și coeficientul de distorsiune al curentului pulsatoriu (redresat) din figura 47.6.

$$i(t) = \begin{cases} I_m \sin \omega t & \text{pentru } 0 < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{pentru } \frac{T}{2} < t < T \end{cases} \quad (47.37)$$

Soluție: Valoarea efectivă se poate calcula și mai simplu, fără dezvoltarea în serie Fourier, cu ajutorul relației (42.27) de definiție:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m^2 \frac{1 - \cos^2 \omega t}{2} dt} = \frac{I_m}{2}. \quad (47.38)$$

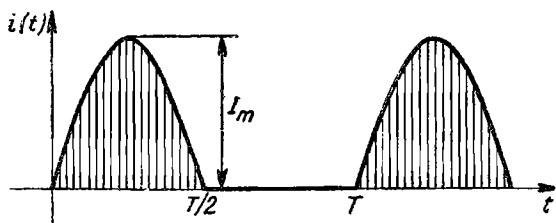


Fig. 47.6

Pentru calculul coeficientului de distorsiune este necesară determinarea valorilor efective ale armonicilor, ceea ce presupune determinarea coeficienților Fourier. Se obține:

$$I_0 = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t dt = \frac{I_m}{\pi} \quad (47.39)$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t \sin n \omega t dt = \frac{I_m}{2\pi} \left[\frac{\sin (1-n)\pi}{1-n} - \frac{\sin (1+n)\pi}{1+n} \right]$$

$$\text{pentru } \begin{cases} n \neq 1 & B_n = 0 \\ n = 1 & B_1 = \frac{I_m}{2} \end{cases} \quad (47.39')$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t \cos n \omega t dt = \frac{I_m}{2\pi} \left[\frac{1 - \cos (1+n)\pi}{1+n} + \frac{1 - \cos (1-n)\pi}{1-n} \right]$$

$$\text{pentru } \begin{cases} n \text{ impar} & A_n = 0 \\ n \text{ par} & A_n = \frac{2I_m}{\pi} \cdot \frac{1}{(1-n)(1+n)} \end{cases} \quad (47.39'')$$

În consecință, curentul este

$$i(t) = I_m \left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin \omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi (1-4k^2)} \cos 2k\omega t \right]$$

$$i(t) = I_m \left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin \omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi (4k^2 - 1)} \sin \left(2k\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \right]. \quad (47.40)$$

Coeficientul de distorsiune este :

$$k_d = \frac{\sqrt{I^2 - I_0^2 - I_1^2}}{\sqrt{I^2 - I_0^2}} = \frac{\sqrt{\frac{I_m^2}{4} - \frac{I_m^2}{\pi^2} - \frac{I_m^2}{8}}}{\sqrt{\frac{I_m^2}{4} - \frac{I_m^2}{\pi^2}}} = \frac{\sqrt{\pi^2 - 8}}{\sqrt{2\pi^2 - 8}} \approx 0,4 = 40\%. \quad (47.41)$$

Valoarea efectivă a curentului s-ar mai putea calcula și cu ajutorul relației (47.29) :

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_4^2 + \dots},$$

în care

$$I_0 = \frac{I_m}{2} \quad I_1 = \frac{I_m}{2\sqrt{2}}; \quad I_2 = \frac{2I_m}{\sqrt{2}} \frac{1}{1.3}; \quad I_4 = \frac{2I_m}{\pi\sqrt{2}} \frac{1}{3.5}; \quad \text{etc.}$$

47.4. Puteri în regim nesinusoidal

Considerăm un dipol generator care alimentează cu energie un dipol receptor (fig. 47.7), astfel că tensiunea la borne și curentul sînt :

$$u = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} U_n \sin(n\omega t + \beta_n) \quad (47.42)$$

$$i = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} i_n = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} I_n \sin(n\omega t + \gamma_n)$$

cu

$$\varphi_n = \beta_n - \gamma_n. \quad (47.43)$$

Conform definiției, *puterea activă* e media pe o perioadă a puterilor instantanee :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \widetilde{ui} \quad (47.44)$$

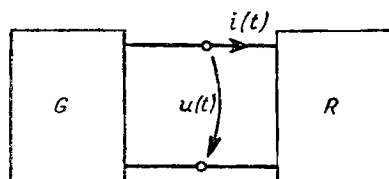


Fig. 47.7

sau

$$P = U_0 I_0 + U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{i_n} + I_0 \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{u_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{u_n i_n} + \sum_{m \neq n}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{u_m i_n} dt.$$

Cu relațiile (47.25) și (47.26) se obține *expresia puterii active* în regim nesinusoidal :

$$P = U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos \varphi_n. \quad (47.45)$$

Puterea activă în regim nesinusoidal este suma dintre produsul termenilor constanți (puterea de curent continuu) și suma puterilor active corespunzătoare fiecărei armonici în parte.

Prin simetrie se poate defini *puterea reactivă* în regim nesinusoidal:

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \sin \varphi_n. \quad (47.46)$$

Pentru o rețea electrică izolată, în regim periodic nesinusoidal, atât suma puterilor active (47.45) cât și suma puterilor reactive (47.46) sînt nule, dacă se calculează aceste puteri pentru toate laturile rețelei cu $u(t)$ și $i(t)$ după convenția de la receptoare.

Puterea aparentă în regim nesinusoidal se poate defini¹ în același mod ca în regim sinusoidal, prin produsul valorilor efective ale tensiunii și curentului:

$$S = UI. \quad (47.47)$$

Se observă că, spre deosebire de regimul sinusoidal, în regimul nesinusoidal

$$S \neq \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

C. Budeanu, pornind de la definirea puterii reactive prin relația (47.46), a introdus o nouă putere, specifică regimului nesinusoidal, numită *putere deformantă*, definită de relația:

$$D^2 = S^2 - (P^2 + Q^2). \quad (47.48)$$

Rezultă expresia puterii deformante:

$$D = \sqrt{\sum_{m < p}^{\infty} \sum_p^{\infty} U_m^2 I_p^2 + U_p^2 I_m^2 - 2 U_m U_p I_m I_p \cos(\varphi_m - \varphi_p)}. \quad (47.49)$$

Unitățile de măsură pentru puterea activă, reactivă și aparentă sînt acelea utilizate în regim sinusoidal. Pentru puterea deformantă s-a propus unitatea *vad*.

Observație: Puterea activă definită prin expresia (47.44) poate fi măsurată prin orice wattmetru electrodinamic. Puterea reactivă definită prin relația (47.46) nu poate fi măsurată cu ajutorul aparatelor de măsură cunoscute actual². În mod similar, puterea deformantă poate fi determinată numai prin calcul.

Factorul de putere în regim nesinusoidal este definit de relația:

$$0 \leq k = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}} \leq 1. \quad (47.50)$$

¹ Se folosesc și alte definiții pentru puterea reactivă și cea aparentă. În cele ce urmează utilizăm teoria puterilor în regim deformant, dezvoltată de C. Budeanu.

² Cu ajutorul unui varmetru electrodinamic se poate măsura cu o aproximație suficientă expresia:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} U_n I_n \sin \varphi_n.$$

Acest factor e subunitar, chiar atunci cînd $Q = 0$, deoarece în regim nesinusoidal, în general, $D \neq 0$.

Factorul de putere e egal cu unitatea numai în cazul particular în care sînt satisfăcute condițiile :

$$\frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2} = \dots = \frac{U_n}{I_n} =$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n = \dots = 0, \quad (47.51)$$

deoarece $D = 0$ și $Q = 0$.

48. || REGIMUL PERMANENT NESINUSOIDAL AL REȚELELOR LINIARE

În rețele electrice liniare, regimul permanent nesinusoidal se poate stabili numai dacă diferitele tensiuni electromotoare au frecvențe diferite sau sînt nesinusoidale. Dar la aceste rețele e valabilă teorema superpoziției și se poate folosi metoda suprapunerii efectelor. Dacă rețeaua e alimentată cu generatoare avînd tensiuni electromotoare nesinusoidale, regimul permanent al rețelei se poate determina suprapunînd în fiecare latură curenții pe care i-ar produce fiecare dintre armonicele de un același ordin ale tuturor tensiunilor.

O rețea liniară se studiază deci pe fiecare armonică în parte. Pentru acest studiu se pot folosi oricare dintre metodele de la regimul permanent sinusoidal, inclusiv reprezentarea în complex, cu observația că frecvența este $n\omega$, iar pulsația $n\omega$. Reactanțele tuturor condensatoarelor vor fi de n ori mai mici pentru armonicele de ordinul n decît pentru fundamentală, dar reactanțele tuturor bobinelor vor fi de n ori mai mari.

Trebuie subliniat că *pentru mărimile periodice rezultante nu se poate folosi reprezentarea în complex* (47.21), deoarece regula derivării (înmulțirea cu $j\omega$) și a integrării (împărțirea cu $j\omega$) nu mai rămîn valabile.

48.1. Elemente de circuit în regim nesinusoidal

Considerăm succesiv elementele ideale de circuit în ipoteza că li se aplică o tensiune la borne periodică, alternativă, cu dezvoltarea în serie

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) = \sum U_n \sqrt{2} \sin(n\omega t + \beta_n) \quad (48.1)$$

(calculul curențului continuu produs de o componentă continuă a tensiunii este banal și nu luăm în considerare astfel de componente) și determinăm în fiecare caz expresia curențului.

48.1.1. **Rezistorul ideal** (fig. 48.1, a). Deoarece în acest caz $u = ri$, rezultă :

$$i = \frac{u}{r} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \frac{U_n}{r} \sin(n\omega t + \beta_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} I_n \sin(n\omega t + \gamma_n) \quad (48.2)$$

cu

$$\varphi_n = \gamma_n - \beta_n = 0 \text{ și } I_n = \frac{U_n}{r}. \quad (48.3)$$

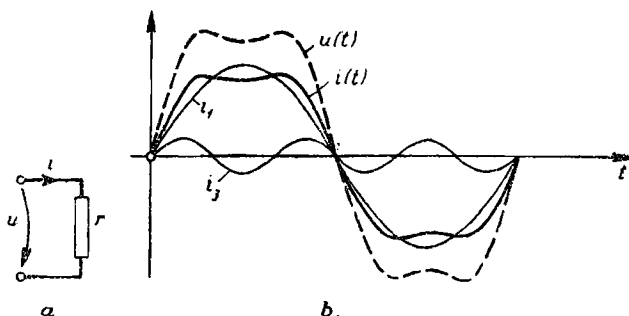


Fig. 48.1

O rezistență nu modifică forma curentului față de aceea a tensiunii (fig. 48.1, b). Factorul de distorsiune al curentului este egal cu cel al tensiunii :

$$k_{di} = \frac{I_d}{I} = \frac{\frac{U_d}{r}}{\frac{U}{r}} = \frac{U_d}{U} = k_{du}.$$

Puterea activă rezultă :

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos \varphi_n = r \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2 = r I^2. \quad (48.4)$$

Conform relației (47.46) și (47.48), puterile reactivă și deformantă sînt nule.

48.1.2. **Bobină ideală** (fig. 48.2, a). Deoarece $u = L \frac{di}{dt}$, rezultă :

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{L} \int u \, dt = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \int \sqrt{2} U_n \sin(n\omega t + \beta_n) \, dt = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \frac{U_n}{n\omega L} \sin\left(n\omega t + \beta_n - \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} I_n \sin(n\omega t + \gamma_n) \end{aligned} \quad (48.5)$$

cu

$$\varphi_n = \beta_n - \gamma_n = \frac{\pi}{2}; \quad Z_n = \frac{U_n}{I_n} = n \omega L; \quad I_n = \frac{U_n}{n \omega L}. \quad (48.6)$$

O inductivitate reduce deformarea curentului față de aceea a tensiunii (fig. 48.2, b) deoarece prezintă o impedanță proporțională cu ordinul ar-

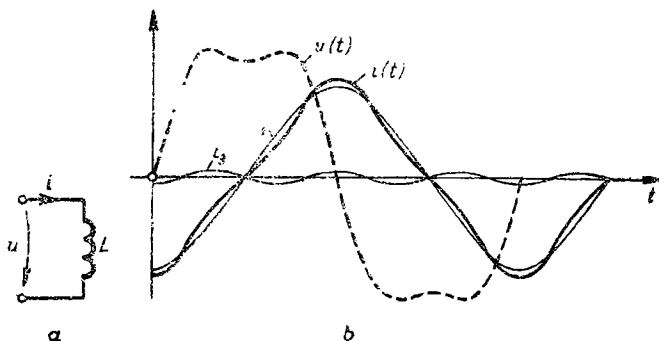


Fig. 48.2

moniciei. Într-adevăr, calculând factorii de distorsiune a curentului, respectiv tensiunii, se obțin expresiile :

$$k_{di} = \frac{I_d \sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{U_n}{n \omega L} \right)^2}}{I \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{U_n}{n \omega L} \right)^2}} = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{U_n}{n} \right)^2}}{\sqrt{U_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{U_n}{n} \right)^2}}, \quad (48.7)$$

iar

$$k_{du} = \frac{U_d}{U} \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} U_n^2}}{\sqrt{U_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty} U_n^2}} > k_{di}, \quad (48.8)$$

Puterea activă conform relației (47.45) e nulă, iar puterea reactivă rezultă :

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \omega L I_n^2. \quad (48.9)$$

Puterea deformantă, calculată cu relațiile (47.48) sau (47.49) e diferită de zero.

49.1.3. Condensatorul ideal (fig. 48.3, a). Deoarece

$$u = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int i \, dt,$$

rezultă :

$$i = C \frac{du}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \omega n C U_n \sin\left(n \omega t + \beta_n + \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} I_n \sin(n \omega t + \gamma_n) \quad (48.10)$$

cu

$$\varphi_n = \beta_n - \gamma_n = -\frac{\pi}{2}; \quad Z_n = \frac{U_n}{I_n} = \frac{1}{n \omega C}; \quad I_n = n C \omega U_n. \quad (48.11)$$

O capacitate accentuează deformarea curentului față de aceea a tensiunii (fig. 48.3, b) deoarece prezintă o impedanță invers proporțională cu

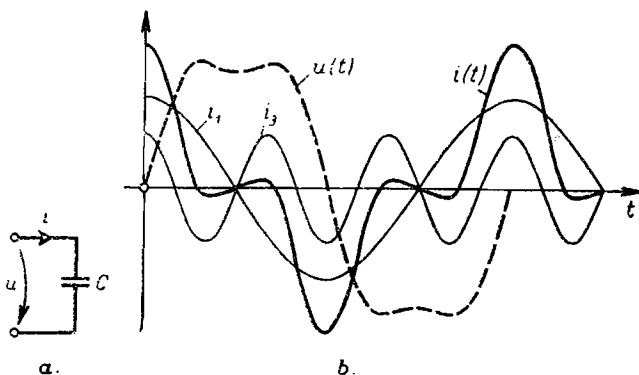


Fig. 48.3

ordinul armonicii. Într-adevăr, calculând factorii de distorsiune ai curentului, respectiv ai tensiunii, se obține:

$$k_{di} = \frac{I_d}{I} = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} (nC \omega U_n)^2}}{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (nC \omega U_n)^2}} = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} (n U_n)^2}}{\sqrt{U_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (n U_n)^2}}, \quad (48.12)$$

iar

$$k_{du} = \frac{U_d}{U} = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} U_n^2}}{\sqrt{U_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty} U_n^2}} < k_{di}. \quad (48.13)$$

Puterea activă conform relației (47.45) e nulă, iar puterea reactivă rezultă :

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} (-U_n I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (-U_n^2 n \omega C). \quad (48.14)$$

Puterea deformantă, calculată cu relațiile (47.48) sau (47.49) e diferită de zero.

48.2. Circuite liniare sub tensiune nesinusoidală la borne

48.2.1. **Circuitul r, L, C serie sub tensiune la borne nesinusoidală.** Calculul curentului în regim permanent se efectuează prin aplicarea teoremei superpoziției, valabilă din cauza linearității ecuației circuitului: *fiecare armonică de curent în parte se calculează ca și cum ar acționa numai armonica de același ordin a tensiunii la borne, independent de celelalte.*

Valoarea instantanee a curentului rezultat va fi suma armonicilor de curent calculate pe această cale.

Considerând tensiunea la borne (48-1), armonica de ordinul n este:

$$u_n = \sqrt{2} U_n \sin(n\omega t + \beta_n). \quad (48.15)$$

În acord cu teoria circuitului de regim permanent sinusoidal (v. par. 33.2) armonica de ordinul n a curentului va fi:

$$i_n = \frac{U_n \sqrt{2}}{\sqrt{r^2 + \left(n\omega L - \frac{1}{n\omega C}\right)^2}} \sin(n\omega t + \beta_n - \varphi_n), \quad (48.16)$$

deoarece impedanța $Z(n\omega) = Z_n$ și defazajul $\varphi(n\omega) = \varphi_n$ la pulsația $n\omega$ sînt date de relațiile:

$$Z_n = \sqrt{r^2 + \left(n\omega L - \frac{1}{n\omega C}\right)^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi_n = \frac{n\omega L - \frac{1}{n\omega C}}{r}. \quad (48.17)$$

Valoarea efectivă a armonicii n a curentului este:

$$I_n = \frac{U_n}{\sqrt{r^2 + \left(n\omega L - \frac{1}{n\omega C}\right)^2}}. \quad (48.18)$$

Expresia instantanee a curentului produs de toate armonicile de tensiune va fi:

$$\begin{aligned} i &= \sum_{n=1}^{\infty} i_n = \sum_{n=1}^{\infty} I_n \sqrt{2} \sin(n\omega t + \gamma_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n}{Z_n} \sqrt{2} \sin(n\omega t + \beta_n - \varphi_n) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n \sqrt{2}}{\sqrt{r^2 + \left(n\omega L - \frac{1}{n\omega C}\right)^2}} \sin\left(n\omega t + \beta_n - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{n\omega L - \frac{1}{n\omega C}}{r}\right). \end{aligned} \quad (48.19)$$

48.2.2. **Rezonanța în regim nesinusoidal.** În cazul circuitului precedent dacă pentru o armonică oarecare de ordinul k este îndeplinită condiția:

$$k\omega L = \frac{1}{k\omega C} \quad \text{sau} \quad k^2 = \frac{1}{\omega^2 LC}, \quad (48.20)$$

impedanța circuitului pentru această armonică are valoarea minimă, $Z_k = r$, iar curentul respectiv are amplitudinea maximă.

Se observă că în condițiile rezonanței pe armonică de ordinul k , pentru armonică $m = k^2$, valoarea absolută a reactanței este identică cu aceea a reactanței pentru fundamentală:

$$|X_m| = \left| k^2 \omega L - \frac{1}{k^2 \omega C} \right| = \left| \frac{1}{\omega C} - \omega L \right| = |X_1|.$$

Pentru orice armonică $m > k^2$, valoarea absolută a reactanței este mai mare și pentru orice armonică $m < k^2$, valoarea absolută a reactanței e mai mică decât aceea pentru fundamentală. Prin urmare, armonicile de ordinul $m < k^2$ au o pondere mai mare în expresia curentului decât în a tensiunii.

Aplicații tehnice ale fenomenului de rezonanță consistă fie în selectarea unor componente dorite (de ex. circuitele acordate din aparatele de radio), fie în reducerea la minimum a unor armonice supărătoare.

48.2.3. **Aplicație 1.** Un observator examinează funcționarea a două circuite:

a) primul e format dintr-o bobină fără fier, cu rezistența $r = 64 \Omega$ și reactanța $X = 48 \Omega$, căreia i se aplică o tensiune sinusoidală de valoare efectivă $U = 400 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$;

b) al doilea e format dintr-o rezistență $r' = 100 \Omega$ în paralel cu un condensator de $C' = 20,89 \mu\text{F}$, conectat la o sursă de tensiune nesinusoidală

$$u' = \frac{400}{\sqrt{1,04}} \sqrt{2} \sin \omega t + \frac{80}{\sqrt{1,04}} \sqrt{2} \sin 3 \omega t.$$

Să se determine analogiile și diferențele constatate între circuite în ceea ce privește: valorile efective ale tensiunii și curentului; puterea aparentă, puterea activă, factorul de putere, puterea reactivă și puterea deformantă.

Soluție: Se obțin rezultate identice pentru:

— valoarea efectivă a tensiunii

$$(a) U = 400 \text{ V}; \quad (b) U' = \sqrt{U_1^2 + U_3^2} = 400 \text{ V}$$

— valoarea efectivă a curentului total

$$(a) I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + X^2}} = 5 \text{ A}; \quad (b) I' = \sqrt{I_1^2 + I_3^2} = 5 \text{ A},$$

unde:

$$I_1 = U_1 \sqrt{\frac{1}{r'^2} + (\omega C')^2}$$

$$I_3 = U_3 \sqrt{\frac{1}{r'^2} + (3 \omega C')^2}$$

— puterea aparentă

$$(a) S = UI = 400 \cdot 5 = 2\,000 \text{ VA}; \quad (b) S' = U'I' = 400 \cdot 5 = 2\,000 \text{ VA}$$

¹ După C. Budeanu: „Metode de calcul în regim de curenți nesinusoidală”, 1955.

— puterea activă

$$(a) P = RI^2 = 64 \cdot 5^2 = 1\,600 \text{ W}; \quad (b) P' = R' \left(\left(\frac{U_1}{R'} \right)^2 + \left(\frac{U_3}{R'} \right)^2 \right) = \\ = \frac{U'^2}{R'} = \frac{400^2}{100} = 1\,600 \text{ W}$$

— factorul de putere

$$(a) k = \frac{P}{S} = \frac{1\,600}{2\,000} = 0,8; \quad (b) k' = \frac{P'}{S'} = \frac{1\,600}{2\,000} = 0,8.$$

Se obțin rezultate diferite pentru :

— puterea reactivă

$$(a) Q = XI^2 = 48 \cdot 5^2 = 1\,200 \text{ var} \\ (b) Q' = -C \omega U_1^2 - 3 \omega CU_3^2 = -1130,23 \text{ var}$$

— puterea deformantă

$$(a) D = 0 \\ (b) D = U_1 I_3 - U_3 I_1 = -403,66 \text{ vad.}$$

Concluzii : Pentru circuitul (a), factorul de putere poate fi compensat total prin montarea unui condensator. Pentru circuitul (b), factorul de putere poate fi îmbunătățit prin montarea unei bobine (care să consume puterea reactivă 1130,23 var), dar compensarea nu poate fi completă, deoarece $D \neq 0$.

48.3. Influența armoniceleor de tensiune în circuitele trifazate

Un sistem trifazat simetric direct de tensiuni nesinusoidale e un sistem de tensiuni periodice $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$, astfel că fiecare provine din precedenta prin întârziere cu o treime de perioadă

$$\left. \begin{aligned} u_2(t) &= u_1\left(t - \frac{T}{3}\right), \\ u_3(t) &= u_1\left(t - \frac{2T}{3}\right) \end{aligned} \right\} \quad (48.21)$$

Pentru dezvoltările în serie ale tensiunilor sistemului rezultă :

$$\left. \begin{aligned} u_1(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} U_n \sin(n \omega t + \beta_n) \\ u_2(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} U_n \sin\left(n \omega t + \beta_n - n \frac{2\pi}{3}\right) \\ u_3(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} U_n \sin\left(n \omega t + \beta_n - n \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned} \right\} \quad (48.22)$$

Din analiza acestor expresii rezultă următoarele proprietăți :

— armonicile de ordinul $n = 3k$ (multiplu de 3) sînt în fază, adică formează sisteme omopolare ($n = 3, 6, 9, \dots$);

— armonicile de ordinul $n = 3k + 1$ formează sisteme directe ($n = 1, 4, 7, 10, \dots$); în particular, fundamentalele ($n = 1$) formează un sistem trifazat simetric direct;

— armonicile de ordinul $n = 3k + 2$ formează sisteme inverse ($n = 2, 5, 8, 11, \dots$).

În funcție de conexiunea sistemului trifazat apar diverse efecte ale armonicilor.

La conexiunea în triunghi a înfășurărilor generatoarelor sau transformatoarelor există un curent intern de circulație cu armonici de ordinul 3, chiar la funcționarea în gol, datorită armonicilor de ordinul 3 k ale tensiunilor care sînt în fază. Drept consecință tensiunile la bornele înfășurărilor (tensiunile de linie) nu mai conțin armonicile 3 k (deci, nici curenții de linie produși în sarcini liniare de aceste tensiuni), deoarece prin simetria înfășurărilor t.e.m. de ordinul 3 k acoperă integral căderile de tensiune, datorită curenților de circulație de ordinul 3 k din înfășurări.

La conexiunea în stea, tensiunile de linie care sînt fiecare diferența a două tensiuni de fază,

$$u_{12} = u_1 - u_2; u_{23} = u_2 - u_3; u_{31} = u_3 - u_1 \quad (48.23)$$

nu conțin armonice de ordin 3 k care sînt în fază.

Consecințele regimului nesinusoidal în circuite trifazate sînt :

a) În cazul conexiunilor, triunghi sau stea la generatoare sau transformatoare, tensiunile de linie la bornele înfășurărilor nu conțin armonice de ordinul 3 k .

b) La conexiunea în stea sînt influențați curenții în conductorul neutru și tensiunea între punctele neutre ale generatorului și receptorului.

În cazul unui circuit receptor echilibrat, curentul din conductorul neutru va conține numai armonice de ordinul 3 k (pentru fiecare armonică de acest ordin curentul va fi de trei ori curentul de fază). Dacă nu există conductor neutru, tensiunea între punctele neutre conține numai armonice de ordin 3 k . Această tensiune poate atinge valori periculoase.

c) La conexiunea în stea se observă că raportul valorilor efective ale tensiunilor de linie și fază este $\frac{U_l}{U_f} < \sqrt{3}$ (din cauza lipsei armonicilor 3 k din tensiunea de linie și a raportului

$\sqrt{3}$ între valorile efective ale oricăror alte armonici ale tensiunilor de linie și fază). Din motive analoge, la conexiunea în triunghi $\frac{I_l}{I_f} < \sqrt{3}$

49. || CIRCUITE NELINIARE ÎN REGIM PERIODIC PERMANENT

49.1. Teoremele lui Kirchhoff și conservarea puterilor la circuite cu elemente dipolare neliniare

49.1.1. **Ecuatiile generale în valori instantanee.** Așa cum am menționat în paragraful 36.1, formele generale (36.5), (36.6), (36.8) ale teoremelor lui Kirchhoff sînt valabile și pentru circuitele cu elemente neliniare, deoarece la stabilirea acestor forme nu s-au utilizat legi de material valabile numai pentru elemente de circuit liniare. Pentru fiecare nod (b) și pentru fiecare

ochi (p) al unei rețele cu elemente dipolare neliniare se pot deci scrie ecuațiile

$$\sum_{k \in (b)} i_k = 0 \quad (49.1)$$

$$\sum_{m \in (p)} u_{b_m} = 0 \quad (49.2)$$

în care i_k ($k = 1, 2, \dots, L$) sînt curenții din laturile rețelei, iar u_{b_m} ($m = 1, 2, \dots, L$) sînt tensiunile la bornele acestor laturi. Ecuațiile de mai sus trebuie completate cu relațiile — acum, în general, neliniare — care leagă tensiunile la borne de curenți, derivatele lor, integralele lor etc :

$$u_{b_m} = u_{b_m} \left(\dots i, \dots ; \dots \frac{di_s}{dt} \dots ; \dots \frac{d^2 i_s}{dt^2} \dots ; \dots ; \dots \int i_s dt \dots ; \dots \right), \quad (49.3)$$

cu $s = 1, 2, \dots, L$.

În cazurile mai simple, laturile sînt constituite din rezistoare, condensatoare, bobine și generatoare conectate în serie, astfel că în locul ecuațiilor (49.2) se pot utiliza relațiile (36.8), adică :

$$\sum_{m \in (p)} e_m = \sum_{m \in (p)} \left[u_{R_m} + u_{C_m} + \frac{d\Phi_m}{dt} \right]. \quad (49.4)$$

Sistemul de ecuații (49.1), (49.4) se completează atunci cu *caracteristicile elementelor de circuit dipolare* :

— *caracteristica tensiune-curenți* pentru rezistoare neliniare (v. cap. 14, vol. I) :

$$u_{R_m} = u_{R_m}(i_m) \quad (49.5)$$

— *caracteristica tensiune-sarcină* pentru condensatoare neliniare :

$$u_{C_m} = u_{C_m}(q_m) \quad (49.6)$$

cu

$$i_m = \frac{dq_m}{dt}. \quad (49.6')$$

— *caracteristica flux-curenți* pentru bobine neliniare (cu miez de fier)

$$\Phi_m = \Phi_m(i_1, i_2, \dots, i_m, \dots, i_L), \quad (49.7)$$

care în lipsa cuplajelor magnetice are forma mai simplă :

$$\Phi_m = \Phi_m(i_m). \quad (49.7')$$

Rezolvarea ecuațiilor de mai sus, în cazul general al regimului tranzitoriu, constituie o problemă dificilă, pentru care nu există metode generale și care face obiectul unor studii

matematice și tehnice foarte dezvoltate. Pentru diferite grupuri particulare de probleme s-au elaborat metode analitice sau grafice, în general metode aproximative. Există, de asemenea, o teorie specială a analizei calitative a soluțiilor ecuațiilor diferențiale neliniare, din care fac parte și ecuațiile de mai sus. Trebuie să se sublinieze că principalele proprietăți ale circuitelor electrice liniare *nu rămân valabile* pentru circuitele neliniare: soluția de regim tranzitoriu a ecuațiilor nu se poate descompune totdeauna într-un regim liber și unul forțat (în particular, regimul „liber” poate fi un regim permanent — cazul oscilatoarelor); teorema superpoziției nu se aplică; soluțiile de regim permanent nu sînt unice; există *soluții nestabile* ale ecuațiilor — adică stări sau regimuri de funcționare ale circuitelor, pentru care abateri oricît de mici determină trecerea în alte stări sau regimuri stabile etc.

Întreaga teorie a circuitelor electronice (cu tuburi electronice și dispozitive semiconductoare), a traductoarelor, a amplificatoarelor magnetice etc., cu problemele aferente de amplificare, detecție, modulație, stabilitate, oscilații, este o teorie a circuitelor electrice și magnetice neliniare, ale cărei ramuri fac obiectul disciplinelor de specialitate și depășesc cadrul prezentului curs.

49.1.2. Ecuațiile pentru regim periodic nesinusoidal. În regim periodic nesinusoidal, fiecare dintre mărimile $i_k, u_{b_m}, e_m, u_{R_m}, u_{C_m}, \Phi_m$ este o funcțiune periodică de timp de perioadă $T = 2\pi/\omega$, care poate fi dezvoltată în serie trigonometrică. De exemplu:

$$i_k(t) = I_k^{(0)} + \sum_{v=1}^{\infty} i_k^{(v)}(t) = I_k^{(0)} + \sum_{v=1}^{\infty} I_k^{(v)} \sqrt{2} \sin(v\omega t + \gamma_k^{(v)}), \quad (49.8)$$

$$u_{b_m}(t) = U_{b_m}^{(0)} + \sum_{v=1}^{\infty} u_{b_m}^{(v)}(t) = U_{b_m}^{(0)} + \sum_{v=1}^{\infty} U_{b_m}^{(v)} \sqrt{2} \sin(v\omega t + \beta_m^{(v)}). \quad (49.9)$$

În aceste relații am notat cu $v = 1, 2, \dots, \infty$ ordinul armonicelor și l-am pus ca indice superior, între paranteze, pentru a nu fi confundat cu indicii laturilor. Înlocuind aceste expresii în ecuațiile (49.1), (49.2) și intervertind ordinea de sumare (adică grupînd termenii de aceeași frecvență împreună), se obțin expresii de forma:

$$\sum_{k \in (b)} I_k^{(0)} + \sum_{k \in (b)} i_k^{(1)}(t) + \sum_{k \in (b)} i_k^{(2)}(t) + \dots + \sum_{k \in (b)} i_k^{(v)}(t) + \dots \equiv 0. \quad (49.10)$$

Fiecare sumă în k din această expresie e o sumă de mărimi sinusoidale de aceeași frecvență (sau constante — primul termen), care prin adunare dau o mărime rezultantă tot sinusoidală și de aceeași frecvență (v. par. 33.1.3, a). Întreaga expresie nu reprezintă altceva decît o serie trigonometrică, fiecare sumă în k fiind o armonică. Dar această serie trigonometrică are suma identic nulă, deoarece egalitatea exprimată de prima teoremă a lui Kirchhoff e valabilă în orice moment t . Așa cum se știe (v. și par. 47.1.1), o serie trigonometrică nu poate fi identic nulă decît dacă fiecare armonică în parte e identic nulă. Din relația (49.10) rezultă deci, în mod necesar,

$$\sum_{k \in (b)} I_k^{(0)} = 0; \quad \sum_{k \in (b)} i_k^{(1)}(t) = 0, \dots; \quad \sum_{k \in (b)} i_k^{(v)}(t) = 0; \dots \quad (49.11)$$

Suma armonicelor de aceeași frecvență a curenților laturilor care se întîlnesc într-un nod este deci nulă.

În mod analog se demonstrează această proprietate pentru relația (49.2), respectiv (49.4). Se ajunge astfel la următoarea concluzie generală :

În regim periodic nesinusoidal, teoremele lui Kirchhoff se pot exprima sub formele generale (49.1), (49.2), (49.4), pentru fiecare armonică v în parte¹

$$\sum_{k \in (b)} i_k^{(v)}(t) = 0 \quad (49.12)$$

$$\sum_{m \in (p)} u_m^{(v)}(t) = 0 \quad (49.13)$$

$$\sum_{m \in (p)} \epsilon_m^{(v)} = \sum_{m \in (p)} \left(u_{Rm}^{(v)} + u_m^{(v)} + \frac{d\Phi_m^{(v)}}{dt} \right). \quad (49.14)$$

Aceste ecuații fiind scrise numai cu mărimi sinusoidale (de frecvența $v\omega$), pot fi reprezentate în complex. Ele nu sînt însă suficiente pentru rezolvarea problemelor, deoarece cuprind ca necunoscute nu numai armonicele de ordinul v ale curenților, ci și armonicele de ordinul v ale căderilor de tensiune și ale fluxurilor, care depind neliniar de curenți. Ceea ce constituie însă un inconvenient foarte mare este faptul că aceste armonici de tensiune etc. de ordinul v depind neliniar de armonicele de toate ordinele ale curenților. Aceste dependențe complicate se obțin înlocuind în relațiile (49.5), (49.6) și (49.7) mărimile instantanee prin dezvoltările lor în serie trigonometrică și identificînd în egalitățile obținute termenii de același ordin. De aceea, mărimile din sistemele de ecuații (49.12), (49.13), (49.14), scrise pentru diferitele ordine de armonici, sînt toate legate între ele prin caracteristicile elementelor neliniare : (49.5), (49.6) și (49.7).

49.1.3. Conservarea puterilor în regimul periodic nesinusoidal al rețelelor neliniare. Ecuațiile pentru armonicele de ordinul v (49.12), (49.13) sînt de aceeași formă cu ecuațiile generale (36.5) și (36.6) ale rețelelor. În capitolul 37 au fost demonstrate, pe baza acestor ultime relații și fără a utiliza legi de material, teoremele de conservare a puterilor instantanee (37.15), active (37.58) și reactive (37.60) pentru rețele electrice izolate. Identitatea de formă a relațiilor de plecare ne asigură — fără a mai fi necesară efectuarea demonstrației — că și relațiile finale vor avea aceeași formă. De aceea se poate demonstra și formula — pentru o rețea izolată — pe fiecare armonică (v) în parte,

— conservarea puterilor instantanee de ordinul v

$$\sum_{m=1}^L P_m^{(v)} = \sum_{m=1}^L u_{bm}^{(v)} i_m^{(v)} = 0 \quad (49.15)$$

— conservarea puterilor active de ordinul v

$$\sum_{m=1}^L P_m^{(v)} = \sum_{m=1}^L U_{bm}^{(v)} I_m^{(v)} \cos(\varphi_m^{(v)} - \gamma_m^{(v)}) \quad (49.16)$$

— conservarea puterilor reactive de ordinul v

$$\sum_{m=1}^L Q_m^{(v)} = \sum_{m=1}^L U_{bm}^{(v)} I_m^{(v)} \sin(\varphi_m^{(v)} - \gamma_m^{(v)}). \quad (49.17)$$

¹ Cazul $v = 0$ corespunde formal componentelor continue.

49.2. Redresorul ideal

Se consideră circuitul din figura 49.1, *a*, cuprinzînd o sursă ideală de t.e.m. sinusoidală, luată origine de fază

$$e = E \sqrt{2} \sin \omega t \quad (49.18)$$

(deci $E_0 = 0$, $E^{(v)} = 0$ cu $v \neq 1$), un *redresor ideal* (r) și o sarcină rezistivă liniară de rezistență R . Redresorul ideal are caracteristica (1) din figura 49.1, *b*, prezentînd o rezistență nulă pentru un curent avînd sensul de conducție (sensul direct) — și o rezistență infinită pentru un curent avînd sensul invers,

$$\begin{aligned} r = 0, \quad i > 0, \quad u_r = 0 \\ r = \infty \quad i < 0, \quad u_r < 0 \end{aligned} \quad (49.19)$$

(un redresor real — curba (2) din figura 49.1, *b*, prezintă o rezistență foarte mare în sens direct și una foarte mică în sens invers). Deoarece un generator ideal produce la borne o tensiune $u_b = e$ (egală cu tensiunea lui electromotoare), ecuația (49.2) a căderilor de tensiune se scrie, în acest caz,

$$-u_b + u_r + u_R = 0$$

sau

$$e = u_r + u_R = u_r + R i. \quad (49.20)$$

Ținînd seama de caracteristica (49.19) a redresorului și de expresia (49.18), rezultă curentul (v. fig. 49.2):

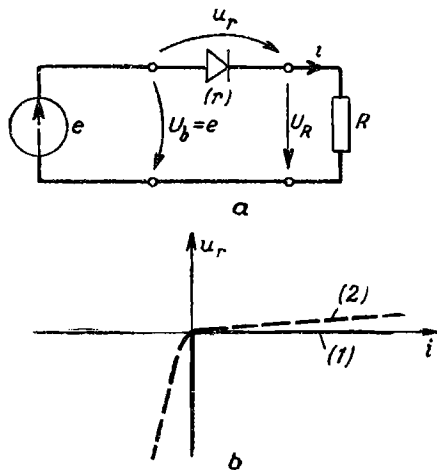


Fig. 49.1

$$i(t) = \begin{cases} I_{max} \sin \omega t = \frac{E \sqrt{2}}{R} \sin \omega t & [2m\pi \leq t \leq (2m+1)\pi] \\ 0 & [(2m+1)\pi \leq t \leq (2m+2)\pi] \end{cases} \quad (49.21)$$

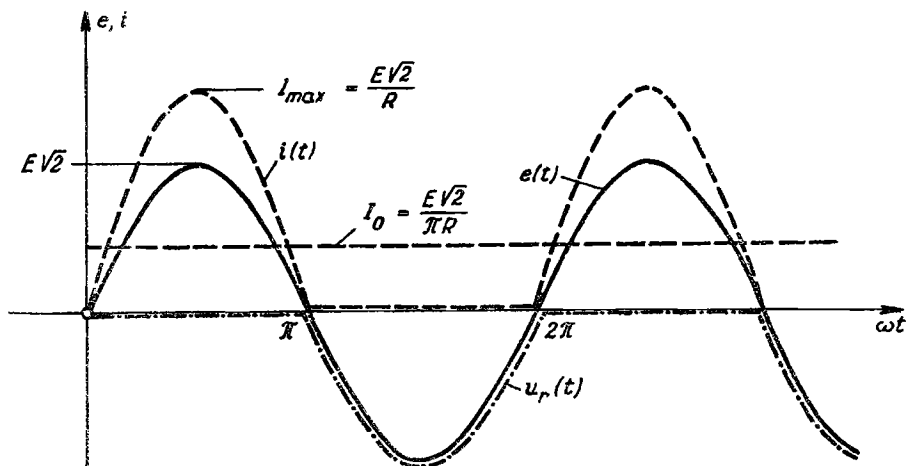


Fig. 49.2

cu $m = 0, 1, 2, \dots$. Tensiunea la bornele redresorului rezultă

$$u_r = e - Ri = \begin{cases} 0 & [2m\pi \leq t \leq (2m+1)\pi] \\ e = E\sqrt{2} \sin \omega t & [(2m+1)\pi \leq t \leq (2m+2)\pi]. \end{cases} \quad (49.22)$$

Se observă că redresorului — în intervalele de timp în care nu conduce — i se aplică o tensiune inversă maximă, egală cu amplitudinea t.e.m. a generatorului.

Funcțiunile pulsatorii (nesinusoidale) $i(t)$ și $u_r(t)$ se pot dezvolta în serie trigonometrică (v. aplicațiile de la par. 47.3.4).

Se obține :

$$i(t) = \frac{E\sqrt{2}}{\pi R} + \frac{E\sqrt{2}}{2R} \sin \omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2E\sqrt{2}}{\pi R (4k^2 - 1)} \sin \left(2k\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = \quad (49.23)$$

$$= I^{(0)} + I^{(1)}\sqrt{2} \sin \omega t + \sum_{k=1}^{\infty} I^{(2k)}\sqrt{2} \sin (2k\omega t + \gamma^{(2k)}) \quad (49.23')$$

$$u_r(t) = -\frac{E\sqrt{2}}{\pi} + \frac{E\sqrt{2}}{2} \sin \omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2E\sqrt{2}}{\pi (4k^2 - 1)} \sin \left(2k\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \quad (49.24)$$

$$= U_r^{(0)} + U_r^{(1)}\sqrt{2} \sin \omega t + \sum_{k=1}^{\infty} U_r^{(2k)}\sqrt{2} \sin (2k\omega t + \beta^{(2k)}). \quad (49.24')$$

Se observă că intensitatea are o componentă continuă $I^{(0)} = E\sqrt{2}/\pi R$, o fundamentală $i_1 = \frac{E\sqrt{2}}{2R} \sin \omega t$ (egală cu jumătate din curentul pe care aceeași t.e.m. l-ar produce în aceeași rezistență, în lipsa redresorului ideal) și numai armonice pare (de ordinul 2, 4, 6, ...).

Puterile active pe armonica (v): $P_g^{(v)}$ produsă de generator, $P_r^{(v)}$ (primită de redresor) și $P_R^{(v)}$ (primită de sarcină) sînt calculate în tabela următoare :

	$P_g^{(v)} = E^{(v)} I^{(v)} \cos (\alpha^{(v)} - \gamma^{(v)})$	$P_r^{(v)} = U_r^{(v)} I^{(v)} \cos (\beta^{(v)} - \gamma^{(v)})$	$P_R^{(v)} = R I^{(v)2}$
$v = 0$	0	$-\frac{E^2 2}{\pi^2 R} < 0$	$\frac{E^2 2}{\pi^2 R} > 0$
$v = 1$	$\frac{E^2}{2R} > 0$	$\frac{E^2}{4R} > 0$	$\frac{E^2}{4R} > 0$
$v = 2k$	0	$-\frac{4E^2}{\pi^2 R (4k^2 - 1)^2} < 0$	$\frac{4E^2}{\pi^2 R (4k^2 - 1)^2} > 0$

Se observă că redresorul e receptor pe fundamentală și generator pe componenta continuă și pe armonici, adică e un transformator static de energie.

Se verifică pe fiecare armonică în parte conservarea puterilor active :

$$P_g^{(v)} = P_r^{(v)} + P_R^{(v)}. \quad (49.25)$$

De altă parte, deoarece redresorul e ideal, în el nu au loc pierderi de energie. Pentru aceasta trebuie ca

$$P_r^{(0)} + P_r^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} P_r^{(2k)} = 0, \text{ sau } \frac{E^2}{4R} = \frac{2E^2}{\pi^2 R} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4E^2}{\pi^2 R (4k^2 - 1)^2},$$

sau

$$\frac{\pi^2}{16} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2} + \frac{1}{2}, \quad (49.26)$$

relație care e cunoscută din teoria sumării seriilor numerice.

49.3. Teoremele lui Kirchhoff pentru mici componente variabile în jurul unui punct de funcționare staționar

49.3.1. Parametrii dinamici ai rețelei neliniare. Se numește *punct de funcționare staționar* al rețelei, sau stare de echilibru, un ansamblu de valori constante I_k^0 , $U_{R_m}^0$, $U_{C_m}^0$, ζ_m^0 , Φ_m^0 ($m, k = 1, 2, \dots, L$), care sînt soluții ale ecuațiilor (49.1), (49.4), cu (49.5), (49.6), (49.7), cînd t.e.m. ale generatoarelor au valorile constante E_m^0 . Aceste valori satisfac deci ecuațiile:

$$\sum_{k \in (b)} I_k^0 = 0; \quad \sum_{m \in (p)} E_m^0 = \sum_{m \in (p)} [U_{R_m}^0 + U_{C_m}^0] \quad (49.27)$$

$$U_{R_m} = u_{R_m}(I_m^0); \quad U_{C_m}^0 = u_{C_m}(\zeta_m^0); \quad \Phi_m^0 = \Phi_m(I_1^0, I_2^0, \dots, I_L^0). \quad (49.28)$$

În orice latură cu condensator în serie $I_m^0 = 0$ și $U_{C_m}^0 \neq 0$, iar în orice latură fără condensator $U_{C_m}^0 = 0$ și $I_m^0 \neq 0$ (v. 49.6'). Determinarea unui punct de funcționare staționar se poate face cu metodele expuse în vol. I. cap. 14 (și par. 26.5) pentru circuite de curent continuu.

Dacă se consideră acum că la t.e.m. constante E_m^0 se suprapun mici componente variabile Δe_m , adică dacă se consideră t.e.m.

$$e_m(t) = E_m^0 + \Delta e_m(t) \quad \text{cu } |\Delta e_m| \ll E_m^0, \quad (49.29)$$

curenții, tensiunile, sarcinile și fluxurile vor diferi puțin de valorile constante corespunzătoare punctului de funcționare staționar considerat (presupunind caracteristicile neliniare 49.5, 49.6 și 49.7 suficient de netede):

$$\begin{aligned} i_k(t) &= I_k^0 + \Delta i_k(t); \quad u_{R_m}(t) = U_{R_m}^0 + \Delta u_{R_m}(t); \quad u_{C_m}(t) = U_{C_m}^0 + \Delta u_{C_m}(t) \\ q_m(t) &= \zeta_m^0 + \Delta q_m(t); \quad \Phi_m(t) = \Phi_m^0 + \Delta \Phi_m(t). \end{aligned} \quad (49.30)$$

Aici, $\Delta i_k(t)$, $\Delta u_{R_m}(t)$, $\Delta u_{C_m}(t)$, $\Delta q_m(t)$, $\Delta \Phi_m(t)$ sînt componente variabile mici (față de cele continue corespunzătoare), și anume atît de mici încît caracteristicile neliniare (49.5), (49.6), (49.7) să poată fi approximate prin dezvolt-

tările lor în serie în jurul punctului de funcționare staționar, cu reținerea numai a termenilor de gradul întâi. Cu (49.28) se obțin relațiile :

$$u_{R_m}(t) \approx u_{R_m}(I_m^0) + \left(\frac{du_{R_m}}{di_m} \right)_0 \Delta i_m(t) = U_{R_m}^0 + R_m^d \Delta i_m(t) \quad (49.31)$$

$$u_{C_m}(t) \approx u_{C_m}(C_m^0) + \left(\frac{du_{C_m}}{dq_m} \right)_0 \Delta q_m(t) = U_{C_m}^0 + \frac{1}{C_m^d} \int \Delta i_m(t) \quad (49.32)$$

(Am folosit relația 49.6', știind că în laturile cu condensatoare în serie $I_m^0 = 0$ și $\Delta i_m = \frac{dq_m}{dt} = \frac{d(\Delta q_m)}{dt}$),

$$\Phi_m(t) \approx \Phi_m(I_1^0, I_2^0, \dots, I_L^0) + \sum_{s=1}^L \left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial i_s} \right)_0 \Delta i_s(t) = \Phi_m^0 + \sum_{s=1}^L L_{ms}^d \Delta i_s(t). \quad (49.33)$$

Acestea sînt *caracteristicile liniarizate* ale elementelor de circuit neliniare și în ele apar *parametrii dinamici* de circuit (pentru mici componente variabile), și anume :

— *rezistența dinamică* a laturii m

$$R_m^d = R_m^d(I_m^0) = \left(\frac{du_{R_m}}{di_m} \right)_0 \geq 0 \quad (49.34)$$

— *capacitatea dinamică* a condensatorului în latura m

$$C_m^d = C_m^d(U_{C_m}^0) = \left(\frac{dq_m}{du_{C_m}} \right)_0 \geq 0 \quad (49.35)$$

— *inductivitatea proprie dinamică* a bobinei din latura m

$$L_m^d = L_m^d(I_1^0, I_2^0, \dots, I_L^0) = \left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial i_m} \right)_0 \geq 0 \quad (49.36)$$

— *inductivitatea mutuală dinamică* dintre bobina din latura s și bobina din latura m

$$L_{ms}^d = L_{ms}^d(I_1^0, I_2^0, \dots, I_L^0) = \left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial i_s} \right)_0 \geq 0 \quad (49.37)$$

(în general $L_{ms}^d \neq L_{sm}^d$ dacă se consideră și fenomenul de isteresis).

Acești parametri dinamici — definiți pentru un punct de funcționare staționar considerat (indicat mai sus prin indicele 0) — au următoarele proprietăți: coincid cu parametri obișnuiți în cazul elementelor de circuit liniare; pot fi negativi pentru elemente de circuit neliniare; depind de valorile corespunzătoare punctului de funcționare ale curenților, tensiunilor etc. (inductivitățile depind de curenții din toate laturile cu care e cuplată bobina considerată). În limitele aproximațiilor (49.31), (49.32), (49.33), parametrii dinamici nu depind de valoarea micilor componente Δi_m , Δq_m la care se referă.

49.3.2. **Ecuatiile lui Kirchhoff pentru mici componente variabile.** Introducând ecuațiile liniarizate (49.31), (49.32) și (49.33) și expresiile (49.29) și (49.30), în ecuațiile lui Kirchhoff, (49.1) și (49.4), și ținând seama de (49.27), se obțin relațiile:

$$\sum_{k \in (b)} \Delta i_k = 0 \quad (49.38)$$

și

$$\sum_{m \in (p)} \Delta e_m = \sum_{m \in (p)} \left[R_m^d \Delta i_m + \frac{1}{C_m^d} \int \Delta i_m dt + \sum_{s=1}^L L_{ms}^d \frac{d(\Delta i_s)}{dt} \right]. \quad (49.39)$$

Se observă că am obținut pentru micile componente variabile ale t.e.m. și curenților ecuații Kirchhoff liniare, în care elementele de circuit sînt caracterizate prin parametrii lor dinamici, cu valorile corespunzătoare punctului de funcționare considerat.

Aceste ecuații pot fi rezolvate cu metodele de la circuite liniare, în măsura în care aproximațiile (49.31), (49.32), (49.33) rămîn valabile. Se poate studia regimul tranzitoriu prin suprapunerea regimului liber cu cel forțat (impus de expresiile t.e.m. variabile Δe_m). Regimul forțat sinusoidal poate fi studiat cu reprezentare în complex, în care caz vor apare impedențele complexe dinamice proprii

$$\underline{Z}_m^d = R_m^d + j \left(\omega L_m^d - \frac{1}{\omega C_m^d} \right) \quad (49.40)$$

și mutuale

$$Z_{ms}^d = j \omega L_{ms}^d \quad (49.41)$$

ale laturilor. Cu toate aceste analogii, circuitele neliniare care funcționează cu mici componente variabile prezintă anumite deosebiri esențiale față de circuitele liniare, și anume:

a) Din cauza posibilității existenței unor parametri dinamici negativi (în special a unor rezistențe negative), regimul liber corespunzător acestor ecuații poate să nu fie amortizat, ci poate să fie monoton crescător în timp, în măsura în care aproximațiile (49.31), (49.32), (49.33), mai rămîn valabile. *În acest caz, punctul de funcționare considerat se zice nestabil.* Există numeroase metode și criterii care permit să se identifice stabilitatea sau nestabilitatea unui punct de funcționare, fără a rezolva neapărat ecuațiile.

b) În jurul punctelor de funcționare nestabile, rețeaua neliniară poate avea un regim liber permanent (de ex. sinusoidal), fără regim forțat, adică cu $\Delta e_m = 0$. În acest caz, rețeaua constituie un *oscilator*, care transformă energia primită de la sursele de curent continuu în energie de curent alternativ.

c) Teorema reciprocității nu e în general valabilă, deoarece inductivitățile mutuale dinamice pot să nu satisfacă relația $L_{ms}^d = L_{sm}^d$.

Observație: Ecuații liniarizate pentru mici componente variabile se pot scrie și pentru rețele cu elemente neliniare multipolare (de ex. tuburi electronice) cu proprietăți analoge.

49.4. Bobina cu miez de fier

Principalele elemente neliniare ale circuitelor de frecvență industrială sînt bobinele cu miez feromagnetic, respectiv înfășurările circuitelor magnetice ale transformatoarelor și mașinilor electrice. În aceste bobine, în afară de efectele deformante, determinate de neliniarități, au loc și pierderi de putere suplimentare (față de pierderile prin efect Joule-Lenz din conductoarele înfășurărilor — care mai sînt numite pierderi „în cupru”), localizate în miezul lor feromagnetic și numite pierderi în fier.

49.4.1. Ciclul de magnetizare a unei bobine cu miez de fier. Considerăm o bobină cu miez feromagnetic (fig. 49.3,a), avînd o înfășurare cu N spire, de rezistență totală r , la care se aplică tensiunea la borne $u(t)$. În regim

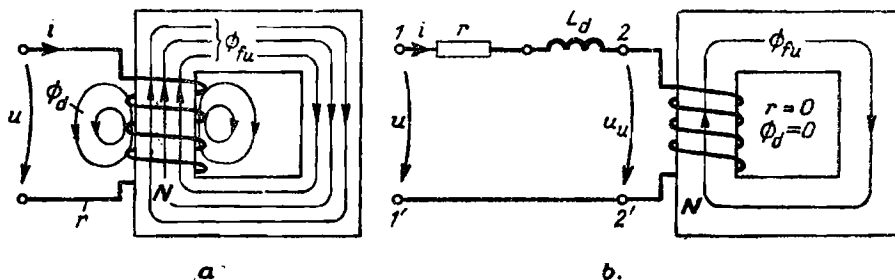


Fig. 49.3

periodic permanent, bobina absoarbe curentul $i(t)$. Fluxul magnetic fascicular $\Phi_f = \Phi_d + \Phi_{fu}$ produs de acest curent e suma dintre un flux fascicular util $\Phi_{fu} = \frac{1}{N} \Phi_n$, corespunzător liniilor de inducție magnetică, care se închid prin circuitul magnetic al bobinei și un flux fascicular de dispersiune (numit și „de scăpări”) Φ_d , corespunzător liniilor de inducție magnetică care se închid în cea mai mare parte prin dielectric (aer). Calea de închidere a fluxului de dispersiune prezintă o reluctanță foarte mare (v. par. 26.1, vol. I) și practic constantă. De aceea, acest flux e proporțional cu curentul care îl produce și permite definirea unei inductivități de dispersiune L_d , de asemenea constantă:

$$N\Phi_d = L_d i \quad (49.42)$$

(se înmulțește cu N , pentru a obține fluxul de dispersiune al tuturor spirelor). Inductivitatea de dispersiune e de obicei mică și se poate calcula cu suficientă aproximație, dacă se cunoaște configurația geometrică exactă a înfășurării — sau se poate măsura. În cele ce urmează, o presupunem cunoscută, împreună cu rezistența r . Ținînd seama de expresia (49.42), fluxul total Φ al bobinei se poate scrie:

$$\Phi = N(\Phi_d + \Phi_{fu}) = L_d i + N\Phi_{fu} = L_d i + \Phi_n. \quad (49.43)$$

În această relație $\Phi_u = N\Phi_{fu}$ e fluxul util (din fier) total, care depinde neliniar de curentul de magnetizare i

$$\Phi_u = f(i). \quad (49.44)$$

Această relație reprezintă caracteristica flux-curent a bobinei (sau caracteristica magnetică a bobinei). În cele ce urmează ne vom referi numai la regimul periodic permanent, în care i și Φ sînt funcțiuni periodice de timp. Pentru o bobină fără miez de fier, caracteristica (49.44) este o dreaptă, a cărei pantă e inductivitatea utilă L_u a bobinei. Pentru o bobină cu miez de fier, în regim periodic, caracteristica (49.44) e o curbă închisă, numită și *ciclu de magnetizare* (curba $\Gamma_{\Phi i}$ din fig. 49.5).

Pentru a analiza factorii care determină această caracteristică, considerăm cazul simplificat al unei bobine cu circuit magnetic omogen, de secțiune A și lungime l . Fluxul util al bobinei e în acest caz

$$\Phi_u = NBA, \quad (49.45)$$

unde B e inducția magnetică din miez, iar solenația magnetizantă totală e, conform legii circuitului magnetic,

$$\Theta = HI, \quad (49.46)$$

unde H e intensitatea cîmpului magnetic din miez. În regim staționar (adică, practic, numai la frecvențe foarte joase), această solenație este :

$$\Theta_i = Ni = HI. \quad (49.47)$$

De aceea, în regim staționar, relația dintre Φ_u și i reprezintă, la o altă scară, relația dintre B și H (fig. 49.4), adică *ciclu de isteresis* al materialului magnetic (corespunzător valorii maxime considerate a inducției magnetice). Această relație dintre Φ_u și i a fost reprezentată cu linie întreruptă în figura 49.5. În regim variabil (practic, chiar la frecvența industrială de 50 Hz), relația dintre Φ_u și i nu mai este asemenea cu aceea dintre B și H , din cauză că la solenația $\Theta_i = Ni$ a înfășurării trebuie adăugată contribuția curenților turbionari (Foucault), induși în miezul feromagnetic de variația în timp a fluxului magnetic. Acești curenți determină și pierderi de energie suplimentare prin efect Joule în miezul feromagnetic. Pentru a reduce aceste pierderi, miezurile înfășurărilor de curent alternativ se execută divizate în tole izolate între ele și dispuse longitudinal față de liniile de cîmp magnetic; în felul acesta, căile de închidere ale curenților

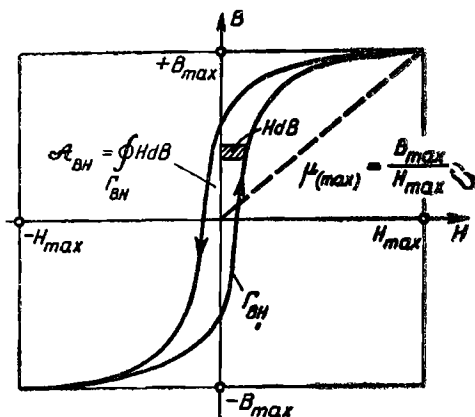


Fig. 49.4

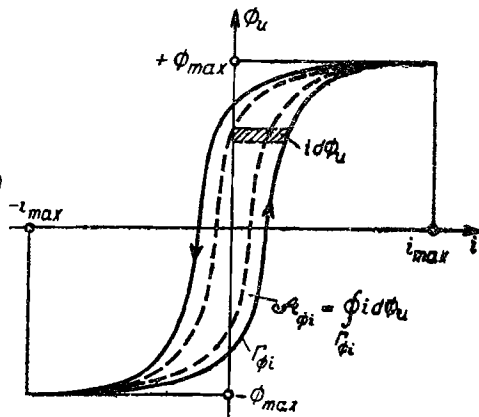


Fig. 49.5

turbionari, care sînt situate în planuri transversale, au o rezistență mult sporită (v. și par. 55.3.1). Sporirea rezistenței se obține și prin îmbogățirea tolelor cu siliciu (cîteva procente), ceea ce le mărește rezistivitatea. La frecvență industrială, reactanța acestor căi de închidere e neglijabilă și curenții turbionari rezultă proporționali și în fază cu tensiunea electromotoare indusă în miez. De aceea, contribuția lor la magnetizarea miezului e practic echivalentă cu o solenație Θ_f , proporțională și practic în fază cu tensiunea electromotoare a fluxului fascicular util :

$$\Theta_f = -K \frac{d\Phi_u}{dt} = -\frac{K}{N} \frac{d\Phi_u}{dt}, \quad (49.48)$$

unde $K > 0$ este o constantă proporțională cu lungimea circuitului magnetic și invers proporțională cu rezistivitatea miezului.

Ținînd seama de această solenație suplimentară, legea circuitului magnetic (49.46) se sc

$$\Theta = \Theta_i + \Theta_f = Ni - \frac{K}{N} \frac{d\Phi_u}{dt} = HI \quad (49.49)$$

sau

$$Ni = HI + \frac{K}{N} \frac{d\Phi_u}{dt}. \quad (49.50)$$

Din această relație rezultă că în regim variabil, din cauza curenților turbionari, ciclul de magnetizare e mai lat decît în regim staționar (curba plină din fig. 49.5): dacă $\frac{di}{dt} > 0$ și

deci $\frac{d\Phi_u}{dt} > 0$, se adaugă la curentul $\frac{HI}{N}$ de regim staționar o cantitate pozitivă; dacă

$\frac{di}{dt} < 0$ și deci $\frac{d\Phi_u}{dt} < 0$, se scade din curentul $\frac{HI}{N}$ de regim staționar o cantitate pozitivă. Vir-

fuiile ciclului se păstrează neschimbate, deoarece acolo unde $\Phi_u(t)$ trece prin maxime sau minime, $\frac{d\Phi_u}{dt} = 0$ și curentul i e egal cu cel corespunzător ciclului de isterezis al materialului $\left(H \frac{l}{N}\right)$.

Din această analiză rezultă că *ciclul de magnetizare al unei bobine depinde de frecvență* (e cu atît mai lat, cu cît frecvența e mai mare, adică cu cît $\left|\frac{d\Phi_u}{dt}\right|$ e mai mare) și *chiar de modul de variație în timp al fluxului magnetic*. De aceea vom studia mai jos cazul bobinelor cu tensiune aplicată sinusoidală, care prezintă interes în electrotehnică.

49.4.2. Bobine cu miez de fier sub tensiune sinusoidală. Ecuația circuitului din figura 49.3, a este (cu 49.43) :

$$u = ri + \frac{d\Phi}{dt} = ri + L_d \frac{di}{dt} + \frac{d\Phi_u}{dt} \quad (49.51)$$

și conduce la *schema echivalentă* din fig. 49.3, b, în care o bobină cu fier, fără dispersiune și fără rezistență, e conectată în serie cu un rezistor r și o bobină fără fier L_d .

Pentru a determina curentul de regim permanent, trebuie rezolvate ecuațiile (49.44) și (49.51), ceea ce se poate face cu suficientă aproximație pe cale

grafico-analitică. De exemplu, dacă tensiunea la borne e sinusoidală și dacă sînt mici căderile de tensiune în rezistența și inductivitatea de dispersie, se poate considera că și tensiunea utilă,

$$u_u = u - ri - L_d \frac{di}{dt} = \frac{d\Phi_u}{dt} \quad (49.52)$$

este sinusoidală și poate fi luată origine de fază :

$$u_u = U_u \sqrt{2} \sin \omega t. \quad (49.53)$$

Din relația (49.52) rezultă, prin integrare, că și fluxul util e sinusoidal

$$\Phi_u = N\Phi_{fu} = -\frac{U_u \sqrt{2}}{\omega} \cos \omega t = \Phi_{max} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (49.54)$$

cu fluxul util maxim

$$\Phi_{max} = \frac{U_u \sqrt{2}}{2\pi f} = \frac{U_u}{4.44 f N} \quad (49.54')$$

și fluxul fascicular util maxim

$$\Phi_{fmax} = \Phi_0 = AB_{max} = \frac{U_u}{4.44 f N}. \quad (49.55)$$

În figura 49.6 sînt reprezentate funcțiunile $u_u(t)$ și $\Phi_u(t)$. Se observă că în curent alternativ, *fluxul fascicular util al circuitului magnetic e impus ca formă și mărime de tensiunea utilă* — prin legea generală a inducției electromagnetice — independent de natura materialului, adică de ciclul de magnetizare al bobinei. Cu ajutorul acestui ciclu se poate însă găsi curentul, construind punct cu punct curba $i(t)$, așa cum se indică cu săgeți în figura 49.6 : pentru un t oarecare se deduce din curba $\Phi_u(t)$ valoarea lui Φ_u ; corespunzător acestei valori se deduce din ciclul de magnetizare valoarea lui i și se figurează punctul reprezentativ în

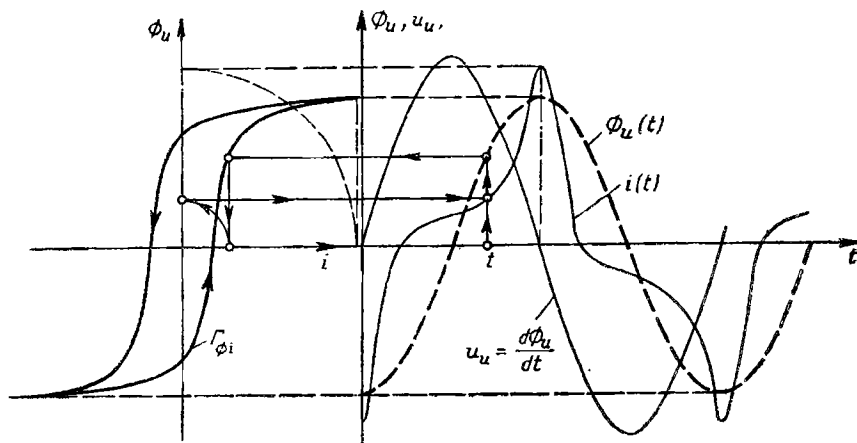


Fig. 49.6

dreptul abscisei t . Se observă că din cauza fenomenului de saturație curentul e puternic deformat, prezentînd *un maxim ascuțit*, iar din cauza existenței ciclului de magnetizare, curentul trece prin zero (cu valori crescătoare) *înaintea fluxului util* pe care îl produce. Din cauza simetriei ciclului față de origine, curentul satisface relația $i(t) = -i\left(t + \frac{T}{2}\right)$, adică conține numai armonici impare (v. rel. 47.1.2). Armonica fundamentală a curentului se poate determina cu metodele de analiză armonică grafică și rezultă defazată înaintea fluxului. *Nici în primă aproximație fluxul și curentul unei bobine cu miez de fier nu pot fi considerate în fază*; acest efect se datorește existenței pierderilor în fier.

49.4.3. Pierderile în fier. Înmulțind ecuația (49.51) cu curentul i , se obține ecuația bilanțului instantaneu al puterilor :

$$ui = r i^2 + \frac{d}{dt} \left(L_d \frac{i^2}{2} \right) + i \frac{d\Phi_s}{dt}, \quad (49.56)$$

iar puterea medie absorbită în regim periodic — adică puterea activă — rezultă (cu $f = 1/T$) :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T ui \, dt = r I^2 + f \oint_{\Gamma_{\Phi i}} i \, d\Phi_s. \quad (49.57)$$

Aici, integrala termenului al doilea — derivata energiei magnetice a cîmpului de dispersiune — e nulă : cîmpul magnetic de dispersiune schimbă periodic energie cu circuitul, dar în medie nu absoarbe putere. Ultima integrală se efectuează în planul (Φ_s, i) , în lungul ciclului de magnetizare și e egală cu aria $\mathcal{A}_{\Phi i}$ a acestui ciclu (exprimată în unități de curent înmulțite cu unități de flux, adică în unități de energie, de ex. jouli). În cazul existenței unui ciclu de magnetizare de arie nenulă — adică în cazul procesului de magnetizare real, care e ireversibil —, ultimul termen din relația (49.57) e diferit de zero și deoarece reprezintă diferența dintre puterea activă primită pe la borne și puterea disipată în rezistența r , nu poate fi decît puterea medie pierdută în procesul ciclic de magnetizare a circuitului magnetic al bobinei. Această putere se numește *putere de pierderi în fier* și are expresia :

$$P_{Fe} = P - r I^2 = f \oint_{\Gamma_{\Phi i}} i \, d\Phi_s = f \cdot \mathcal{A}_{\Phi i}. \quad (49.58)$$

Deoarece într-o secundă au loc f cicluri de magnetizare, iar P e energia pierdută într-o secundă, rezultă că

$$\mathcal{A}_{\Phi i} = \oint_{\Gamma_{\Phi i}} i \, d\Phi_s \quad [\text{J/ciclu}] \quad (49.59)$$

e energia totală pierdută într-un singur ciclu de magnetizare. Aria acestui ciclu are, așadar, o semnificație fizică imediată. Corespunzător descompunerii în doi

termeni a solenației (49.50), curentul înfășurării se poate descompune în doi termeni :

$$i = \frac{l}{N} H + \frac{K}{N^2} \frac{d\Phi_m}{dt}, \quad (49.60)$$

dintre care primul asigură magnetizarea miezului, iar al doilea compensează efectul curenților turbionari. Cu relația (49.60) și puterea de pierderi în fier se poate descompune în doi termeni :

$$P_{Fe} = P_b + P_f, \quad (49.61)$$

dintre care primul, P_b , corespunde ciclului de isterezis al materialului și se numește *putere de pierderi prin isterezis*, iar al doilea, P_f , corespunde efectului Joule-Lenz al curenților turbionari și se numește *putere de pierderi prin curenți turbionari* (sau Foucault).

1. *Pierderile prin isterezis* au cu relațiile (49.58), (49.60) și (49.45) expresia

$$P_b = f \oint \frac{l}{N} H dB \quad (ANB) = V \int_{\Gamma_{BH}} f \cdot \oint H dB, \quad (49.62)$$

în care $V = Al$ e volumul circuitului magnetic omogen, iar

$$w_{bm} = \alpha_{BH} = \oint \frac{H dB}{\Gamma_{BH}} = \frac{P_b T}{V} \left[\frac{J}{m^3 \text{ ciclu}} \right] \quad (49.63)$$

e densitatea de volum a energiei pierdute pentru un ciclu de isterezis, egală cu aria ciclului de isterezis (fig. 49. 4), în unități magnetice. Această arie se determină experimental sau se calculează cu formula empirică (Steinmetz) :

$$w_{bm} = \eta E_{max}^n, \quad (49.64)$$

în care coeficientul η și exponentul n ($1,6 < n \leq 2$ pentru tolele obișnuite) depind de material. Produsul dintre w_{bm} și frecvența este puterea de pierderi în unitate de volum sau *puterea specifică de pierderi prin isterezis magnetic*

$$P_{bm} = \frac{P_b}{V} = f \int_{\Gamma_{BH}} w_{bm} = f \int_{\Gamma_{BH}} \oint H dB \left[\frac{W}{m^3} \right] \quad (49.65)$$

Formulele (49.62) și (49.65) arată că pierderile prin isterezis sînt proporționale cu frecvența¹. În cazul unui circuit magnetic neomogen trebuie calculate pierderile specifice p_{bi} în fiecare porțiune omogenă (i), în funcție de inducția maximă respectivă și pierderile totale rezultă prin însumare :

$$P_b = \sum_i V_i p_{bi} = f \sum_i V_i \eta (B_{max})_i^n. \quad (49.66)$$

¹ La frecvențe înalte, fenomenul de *viscozitate magnetică* (post-efect sau ereditate magnetică), care consistă în rămînerea în urmă a inducției magnetice față de intensitatea cîmpului magnetic la viteze mari de variație a acesteia, mărește aria ciclului de isterezis și deci pierderile. De aceea, la frecvențe înalte, pierderile prin isterezis cresc mai repede decît proporțional cu frecvența (la aceeași inducție maximă).

2. *Pierderile prin curenți turbionari* au cu relațiile (49.58), (49.60) și (49.45) expresia :

$$P_f = f \oint \frac{K}{N^2} \left(\frac{d\Phi_u}{dt} \right) d\Phi_u = f K A^2 \int_0^T \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 dt. \quad (49.67)$$

Dacă fluxul util e sinusoidal și inducția e sinusoidală, $B = B_{max} \sin \omega t$ și prin integrare se obține o expresie proporțională cu pătratul frecvenței și cu pătratul inducției maxime. Un calcul mai exact al acestor pierderi va fi efectuat în paragraful 55.3, unde se va obține pentru *pierderile specifice prin curenți turbionari* expresia

$$p_f = \frac{P_f}{V} = \frac{\pi^2}{6\rho} \Delta^2 f^2 B_{max}^2, \quad (49.68)$$

în care Δ e grosimea tolei (în electrotehnică : 0,35 mm — sau, mai rar, 0,5 mm — la aparate și mașini de frecvență industrială), iar ρ e rezistivitatea materialului. În cazul unui circuit magnetic neomogen, trebuie calculate pierderile specifice în p_{fi} fiecare porțiune omogenă (i) și puterea totală rezultă prin însumare :

$$P_f = \sum_i V_i p_{fi} = f^2 \sum_i \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{\Delta^2}{\rho} \right)_i V (B_{max})_i^2. \quad (49.69)$$

3. *Pierderile totale în fier* ale unei bobine rezultă prin însumarea expresiilor (49.66) și (49.69). Se obține o expresie de forma :

$$P_{Fe} = P_h + P_f = f \left(\sum_i V_i \eta (B_{max})_i^2 \right) + f^2 \left(\sum_i V_i \left(\frac{\Delta^2}{\rho} \right)_i \frac{\pi^2}{6} (B_{max})_i^2 \right). \quad (49.70)$$

Dacă frecvența variază și inducția maximă se menține constantă, pierderile în fier cresc cu frecvența și dependența diferită de frecvență a celor doi termeni permite determinarea lor experimentală (separarea pierderilor), dacă se măsoară P_{Fe} la două frecvențe diferite. De subliniat că dacă se menține constantă tensiunea efectivă aplicată, deoarece cu relația (49.55)

$$(B_{max})_i = \frac{U_u}{4,44 N A_i f} \quad (49.71)$$

pierderile au *altă* dependență de frecvență.

49.4.4. Curentul sinusoidal echivalent și ciclul de magnetizare eliptic echivalent. În aplicații tehnice, considerarea curentului real deformat, determinabil ca mai sus (fig. 49.6), pe cale grafică, complică prea mult calculele. De aceea se consideră un *curent sinusoidal echivalent*, care — în ipoteza că tensiunea utilă e sinusoidală și origine de fază (49.53) — are expresia :

$$i_e = I_e \sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi_e) = I_e \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \delta_{Fe} \right). \quad (49.72)$$

Curentul sinusoidal echivalent e defazat în urma tensiunii utile cu unghiul φ_e și înaintea fluxului util cu unghiul $\delta_{Fe} = \frac{\pi}{2} - \varphi_e$. numit *unghi de pierderi în fier*.

Cei doi parametri I_e și φ_e (sau δ_{Fe}) ai curentului sinusoidal echivalent se determină prin următoarele condiții :

- (1) pierderile în fier să fie aceleași cu cele reale date (P_{Fe});
- (2)_a valoarea maximă a curentului echivalent să fie egală cu valoarea maximă a curentului deformat (I_{max});

sau,

(2)_b valoarea efectivă a curentului echivalent să fie egală cu valoarea efectivă a curentului real deformat (condițiile 2a și 2b sînt practic echivalente, dacă curentul nu are un coeficient de distorsiune prea mare);

sau,

(2)_c curentul echivalent să fie prima armonică a curentului real fundamental. Această ultimă condiție e suficientă pentru a determina pe i și e compatibilă cu (1), dacă tensiunea utilă e sinusoidală — deoarece, în acest caz, numai prima armonică dă putere activă.

Cele trei condiții (2)_a, (2)_b, (2)_c sînt practic echivalente, dacă deformarea curentului e mică. Spre deosebire de (2)_b și (2)_c care necesită analiza armonică a curbei curentului, sau alte operații de calcul grafic, relativ complicate, condiția (2)_a e cea mai simplă, deoarece I_{max} se deduce imediat din ciclul de magnetizare — fără a fi necesară trasarea curbei curentului. În plus, această condiție se poate menține și în cazul unei tensiuni utile nesinusoidale.

Admițînd condițiile (1) și (2)_a, determinarea parametrilor curentului echivalent se face cu relațiile :

$$I_e = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}; \quad \cos \varphi_e = \sin \delta_{Fe} = \frac{P_{Fe}}{U_u I_e}. \quad (49.73)$$

Adesea se introduce formal — ca la bobinele liniare — o *inductivitate utilă aparentă*

$$L_{(max)} = \frac{\Phi_{max}}{I_{max}} = \frac{N^2}{R_m (max)}^1. \quad (49.74)$$

Această inductivitate poate fi exprimată ca la circuitele magnetice liniare (v. par. 27.2.2, vol. 1), în funcție de o reluctanță $R_m (max)$, care trebuie însă calculată cu *permeabilitatea magnetică aparentă*

$$\mu_{(max)} = \frac{B_{max}^2}{H_{max}}, \quad (49.75)$$

corespunzătoare vârfului ciclului de isterезis (fig. 49.4).

Determinarea curentului sinusoidal echivalent se face deci pornind de la valoarea efectivă a tensiunii utile U_u , astfel : din relația (49.54') se deduce Φ_{max} (și eventual B_{max}); din studiul materialului se deduc pierderile corespunzătoare $P_{Fe} = f \cdot \mathcal{A}_{\Phi i}$ și curentul maxim I_{max} (eventual prin intermediul inductivității — 49.74); din P_{Fe} și I_{max} se deduc, cu relațiile (49.73), I_e și φ_e . Eventual P_{Fe} și I_{max} se deduc din măsurători.

¹ Indicele (max), între paranteze, e pus pentru a arăta că această mărime corespunde valorilor maxime ale mărimilor în funcție de care e definită, fără a fi ea însăși o valoare maximă posibilă.

Considerarea curentului sinusoidal echivalent revine la înlocuirea ciclului de magnetizare real cu un *ciclu eliptic echivalent* ($\Gamma_e \Phi_i$ în fig. 49.7), deoarece ecuațiile (49.54) și (49.72) sînt ecuațiile parametrice ale unei elipse înscrise în dreptunghiul definit de valorile maxime ale ciclului real.

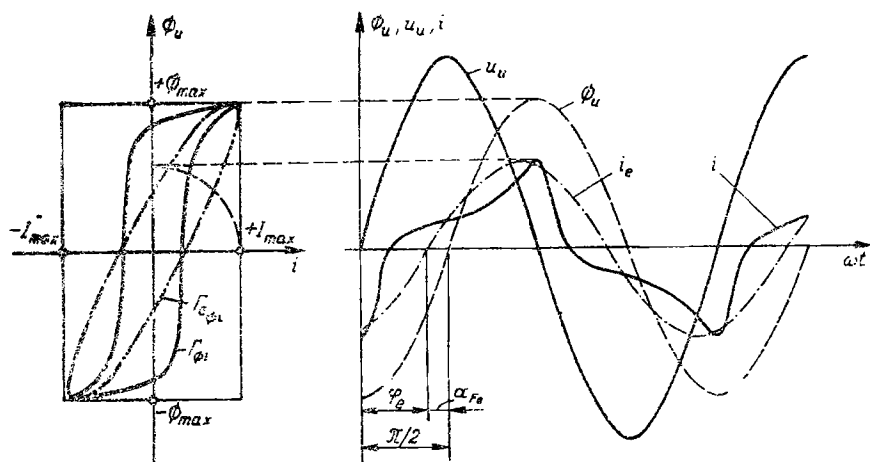


Fig. 49.7

Studiul bobinei cu miez de fier în aproximația înlocuirii ciclului de magnetizare real printr-un ciclu eliptic echivalent se mai numește *liniarizarea bobinei* și permite considerarea unui regim sinusoidal echivalent regimului deformant real.

49.4.5. Schemele echivalente ale bobinei cu miez de fier. Considerarea unui curent sinusoidal echivalent pentru bobina cu miez de fier mai revine la înlocuirea ei cu un receptor liniar (disipativ și inductiv), care, pentru bobina fără dispersiune și cu înfășurare fără rezistență (cu bornele fictive 2, 2' din fig. 49.3.b), are impedanța echivalentă :

$$\underline{Z}_2 = \frac{U_u}{I_e} = \frac{U_u}{I_e} e^{j\varphi_e} = R_{Fe} + j\omega L_u, \quad (49.76)$$

și admitanța echivalentă

$$\underline{Y}_2 = \frac{I_e}{U_u} = \frac{I_e}{U_u} e^{-j\varphi_e} = \frac{1}{R_{Fe}} + \frac{1}{j\omega L_u}. \quad (49.77)$$

Această impedanță poate fi reprezentată prin conectarea în serie a elementelor ideale R_{Fe} , și L_u , sau prin conectarea în paralel a elementelor ideale R_{Fe} și L_u . Pentru a obține schema echivalentă a bobinei reale cu dispersiune și cu înfășurare cu rezistență, se conectează $\underline{Z}_2$ în serie cu r și L_d . Se obțin astfel schemele echivalente din fig. 49.8 și 49.9.

Deoarece puterea de pierderi în fier P_{Fe} e proporțională (în primă aproximație) cu pătratul tensiunii aplicate (v. rel. 49.70 și 49.71 cu $n \approx 2$), cea mai adecvată e schema *tip paralel* (fig. 49.9), ale cărei elemente sînt :

— rezistența de pierderi-paralel

$$R_{Fe_p} = \frac{U_u^2}{P_{Fe}} = \frac{U_u}{I_e \cos \varphi_e} = \frac{\omega L_{(max)}}{\cos \varphi_e} \quad (49.78)$$

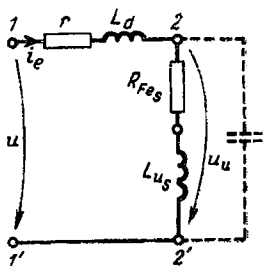


Fig. 49.8

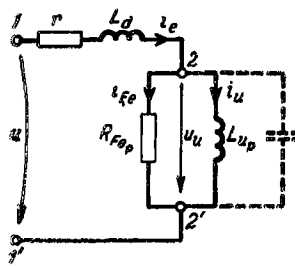


Fig. 49.9

inductivitatea utilă-paralel

$$L_{u_p} = \frac{U_u}{\omega I_e \sin \varphi_e} = \frac{\Phi_{max}}{I_{max} \sin \varphi_e} = \frac{L_{(max)}}{\sin \varphi_e}, \quad (49.79)$$

iar

$$\cos \varphi_e = \frac{\omega L_{u_p}}{\sqrt{R_{Fe_p}^2 + \omega^2 L_{u_p}^2}} \text{ și } \sin \varphi_e = \frac{R_{Fe_p}}{\sqrt{R_{Fe_p}^2 + \omega^2 L_{u_p}^2}}. \quad (49.80)$$

Elementele schemei *tip serie* se deduc din precedentele, egalînd Z_2 și $1/Y_2$ din relațiile (49.76) și (49.77).

— rezistența de pierderi-serie

$$R_{Fe_s} = R_{Fe_p} \cdot \frac{\omega^2 L_{u_p}^2}{R_{Fe_p}^2 + \omega^2 L_{u_p}^2} = \omega L_{(max)} \cos \varphi_e \quad (49.81)$$

~ inductivitatea utilă-serie

$$L_{u_s} = L_{u_p} \cdot \frac{R_{Fe_p}^2}{R_{Fe_p}^2 + \omega^2 L_{u_p}^2} = L_{(max)} \sin \varphi_e \quad (49.82)$$

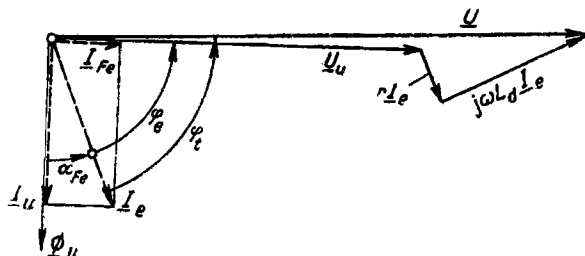


Fig. 49.10

În figura 49.10 e reprezentată diagrama vectorială corespunzătoare schemei echivalente paralel. Componenta I_u se numește curent de magnetizare, iar componenta I_{Fe} curent de pierderi.

Observații: a) Din cauza neliniarității bobinei parametrii curentului sinusoidal echivalent și elementele schemelor echivalente depind de tensiunea aplicată; totodată R_{Fe_p} , R_{Fe_s} , L_{u_p} , L_{u_s} depind de frecvență. De aceea, schemele echivalente se pot determina și utiliza numai la o frecvență dată și numai la tensiuni diferind cu puțin (cu cel mult câteva procente) de tensiunea considerată.

b) Un studiu similar celui de mai sus se poate face în cazul alimentării cu curent sinusoidal, cînd fluxul și tensiunea rezultă deformate (fluxul rezultă aplatizat din cauza saturației, iar tensiunea, cu vîrfuri ascuțite, corespunzătoare variațiilor rapide de flux la trecerea prin zero).

c) Studiul de mai sus presupune tensiunea utilă (u_u) sinusoidală și cunoscută. În practică, tensiunea aplicată la borne (u) este sinusoidală și cunoscută. Deoarece căderile de tensiune în r și L_d sînt mici, se consideră cu aproximație $u_u \approx u$. Pentru o aproximație mai bună, după ce s-au determinat mărimile R_{Fe_p} și L_{u_p} cu ipoteza $u_u \approx u$, se calculează curentul echivalent I_e și se determină tensiunea utilă $U_u = U - I_e (r + j\omega L_d)$. Cu această nouă valoare a tensiunii utile se deduc valori mai corecte pentru R_{Fe_p} și L_{u_p} .

d) Conceptul de inductivitate nu e univoc definit pentru o bobină cu miez de fier decît cu anumite convenții suplimentare. În studiul de mai sus au intervenit astfel mărimile $L_{(max)}$, L_{u_p} și L_{u_s} (făcînd abstracție de inductivitatea de dispersiune). În cazul materialelor magnetice

obișnuite, unghiul de pierderi e mic $\delta_{Fe} \ll \frac{\pi}{2}$, curentul de magnetizare e mult mai mare decît cel de pierderi, adică în schema-paralel $R_{Fe_p} \gg \omega L_{u_p}$ și $\sin \varphi_e \approx 1$. În acest caz, din relațiile (49.79) și (49.81) rezultă :

$$L_{u_p} \approx L_{(max)} \approx L_{u_s} \text{ și } R_{Fe_s} \approx \frac{\omega^2 L_{u_p}^2}{R_{Fe_p}}. \quad (49.83)$$

e) În cazul materialelor magnetice speciale, cu pierderi mici, dar cu permeabilitate magnetică foarte mare, în funcționare nesaturată, este posibil ca inductivitatea utilă-paralel să fie foarte mare, astfel ca $\omega L_{u_p} \gg R_{Fe_p}$. În acest caz, $\sin \varphi_e \approx 0$, $\cos \varphi_e \approx 1$ și deși $L_{(max)}$ e finit și foarte mare, rezultă :

$$R_{Fe_s} \approx R_{Fe_p} \text{ și } L_{u_s} \approx 0 \quad (49.84)$$

În acest caz (v. fig. 49.11), bobina cu miez de fier se comportă practic cu un rezistor de rezistență $r + R_{Fe_p}$ (cu inductivitatea parazită L_d) și admite un curent echivalent practic în fază cu tensiunea. Sugestiv, se poate spune că în schema echivalentă paralel, rezistența de pierderi

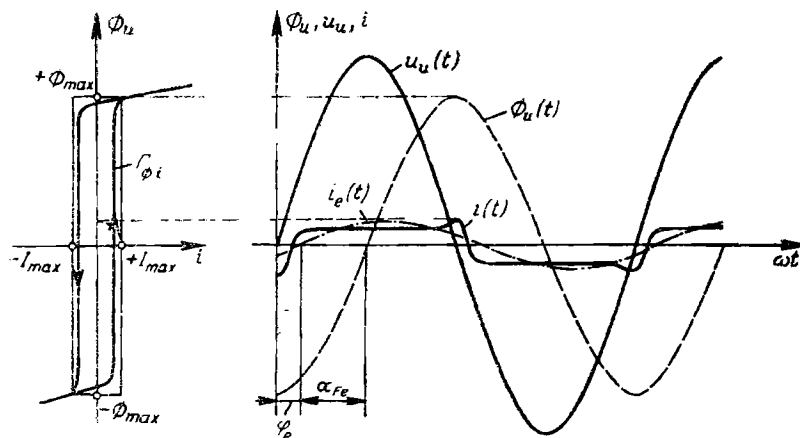


Fig. 49.11

scurtcircuitează inductivitatea utilă a bobinei. Această situație se realizează, de exemplu, la tolele laminate la rece, cu ciclu de magnetizare practic dreptunghiular, în regim nesaturat. Aceeași comportare o au bobinele cu miez de fier din materialele obișnuite, la frecvențe înalte, cînd de asemenea

$$\omega L_{u_p} \gg R_{Fe_p}.$$

f) La frecvențe înalte, în schema echivalentă a bobinei trebuie introdusă, în paralel cu inductivitatea utilă, o capacitate echivalentă capacității distribuite parazite a spirelor înfășurării (reprezentată punctat în schemele echivalente din fig. 49.8 și 49.9).

49.4.6. Reluctanța echivalentă complexă și permeabilitatea echivalentă complexă. Circuitul magnetic al bobinei cu miez de fier, liniarizată prin aproximația curentului echivalent sinusoidal, se poate studia cu reprezentarea în complex. Fie

$$I_e = I_e e^{-j\varphi_e} \iff i_e = I_e \sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi_e) \quad (49.85)$$

și

$$\Phi_{fu} = \frac{\Phi_{max}}{N\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{2}} \iff \Phi_{fu} = \frac{\Phi_{max}}{N} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad (49.86)$$

reprezentările în complex ale curentului echivalent și fluxului fascicular util, în ipoteza că tensiunea utilă e origine de fază. În circuitul magnetic — presupus, pentru simplificare, omogen, cu secțiunea A și lungimea medie l — se pot defini: reprezentarea în complex a inducției magnetice

$$\underline{B} = \frac{\Phi_{fu}}{A} = \frac{\Phi_{max}}{\sqrt{2} NA} e^{-j\frac{\pi}{2}} = B_{max} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad (49.87)$$

și reprezentarea în complex a intensității cîmpului magnetic produs de curentul echivalent

$$\underline{H}_e = \frac{NI_e}{l} = \frac{NI_e}{l} e^{-j\varphi_e} = H_{e,max} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\varphi_e} \quad (49.88)$$

(intensitatea cîmpului magnetic, stabilită în fierul circuitului magnetic, e suma dintre această intensitate și aceea produsă de curenții turbionari).

În analogie cu circuitele magnetice de regim staționar (v. par. 26.1, vol. I), cîtul dintre reprezentarea în complex a solenității înfășurării și reprezentarea în complex a fluxului fascicular util se numește *reluctanță echivalentă complexă*

$$\underline{B}_{m_e} = \frac{NI_e}{\underline{\Phi}_{fu}} = \frac{N^2 I_e \sqrt{2}}{\Phi_{max}} e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_e\right)} = \frac{N^2}{L_{(max)}} e^{j\delta_{Fe}} \quad (49.89)$$

și caracterizează circuitul magnetic atît din punctul de vedere al magnetizării — avînd modulul egal cu reluctanța $R_{m(max)} = N^2/L_{(max)}$ corespunzătoare vîrfului ciclului de isterезis — cît și din punctul de vedere al pierderilor — avînd argumentul egal cu unghiul de pierderi

$$\delta_{Fe} = \frac{\pi}{2} - \varphi_e.$$

Cu relațiile (49.87) și (49.88), reluctanța echivalentă complexă a circuitului magnetic omogen se poate scrie:

$$\underline{R}_{m_e} = \frac{\underline{H}_e}{\underline{B}_e} \frac{l}{A} = \frac{l}{\underline{\mu}_e A} \quad (49.90)$$

(în analogie cu relația corespunzătoare de regim staționar), dacă se definește *permeabilitatea echivalentă complexă*,

$$\underline{\mu}_e = \frac{\underline{B}}{\underline{H}_e} = \frac{B_{max}}{H_{e,max}} e^{-j\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_e\right)} = \mu_{(max)} e^{-j\delta_{Fe}}. \quad (49.91)$$

Această permeabilitate echivalentă complexă are drept modul permeabilitatea aparentă (49.75), corespunzătoare virfului ciclului de isteresis și drept argument unghiul de pierderi în fier cu semn schimbat. Deoarece $\delta_{Fe} > 0$, din cauza caracterului pozitiv definit al pierderilor, rezultă că inducția e defazată în urma intensității. Mai trebuie observat că această mărime nu caracterizează local materialul feromagnetic, deoarece a fost definită numai cu o parte a intensității cimpului magnetic: aceea produsă de solenația înfășurării parcursă de curentul sinusoidal echivalent. Permeabilitatea complexă echivalentă constituie deci o caracteristică globală a circuitului magnetic, ca și reluctanța R_m , care ține seama atât de fenomenul de isteresis cât și de curenții turbionari.

49.5. Condensatorul cu pierderi

O teorie analogă celei prezentate pentru bobina cu miez de fier se poate dezvolta și pentru condensatoarele reale, (fig. 49.12) care au întotdeauna pierderi de putere în dielectric și sînt uneori și neliniare (condensatoarele cu dielectric din materiale feroelectrice).

49.5.1. Pierderile dielectrice. Pierderile de putere în dielectric se datorează atât faptului că dielectricul nu e perfect izolan — prezentînd o conductanță finită G_0 (măsurabilă în curent continuu) și deci pierderi prin conducție — cât și fenomenului de isteresis dielectric — pierderi prin isteresis. Fenomenul de isteresis e condiționat mai rar de neliniaritatea materialului (isteresis propriu zis, caracteristic materialelor feroelectrice) și mai frecvent de *viscozitatea electrică* (post efect electric sau polarizare ereditară) a acestui material, fenomen care consistă în rămînerea în urmă a inducției electrice $D(t)$ față de intensitatea cimpului electric $E(t)$.

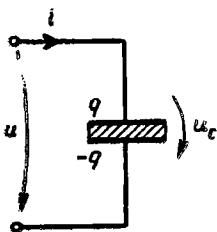


Fig. 49.12

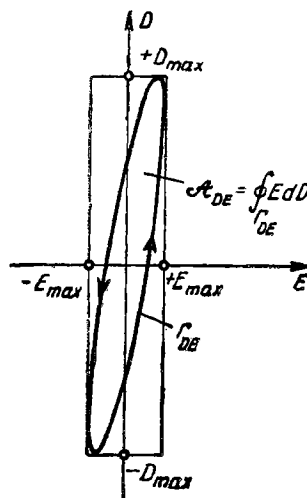


Fig. 49.13

Ca urmare, în regim sinusoidal, relația dintre inducție și intensitate e reprezentabilă prin *ciclul de polarizare electrică* $D = D(E)$ (curba Γ_{DE} în fig. 49.13), care este eliptic la condensatoare liniare — sau se aproximează printr-un ciclu eliptic la condensatoare neliniare (așa cum s-a procedat în cazul

bobinei cu miez de fier). Deoarece sarcina e proporțională cu inducția, iar tensiunea e proporțională cu intensitatea, aceeași relație se regăsește (la altă scară) între sarcina q și tensiunea u_C dintre armături, sub forma *ciclului de încărcare*

$q = q(u_C)$ al condensatorului (curba Γ_{QU} în fig. 49.14).

Din legea conservării sarcinii rezultă că între curentul i absorbit din exterior, curentul de conducție $i_0 = G_0 u_C$ prin dielectric și sarcina q există relația :

$$i = i_0 + \frac{dq}{dt} = G_0 u_C + \frac{dq}{dt} \quad (49.92)$$

(se observă că din cauza conducției dielectricului, în cazul condensatorului cu pierderi, $i \neq dq/dt$). Înmulțind această relație cu tensiunea u_C , rezultă bilanțul instantaneu al puterilor

$$u_C i = G_0 u_C^2 + u_C \frac{dq}{dt}. \quad (49.93)$$

Pierderile medii de putere din condensator sînt egale cu puterea activă (medie) absorbită — numită *putere de pierderi în dielectric*

$$P_d = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = G_0 U_C^2 + f \oint_{\Gamma_{QU}} u_C dq = P_J + P_b \quad (49.94)$$

și reprezintă suma dintre *pierderile prin conducție* (prin efect Joule-Lenz în dielectric)

$$P_J = G_0 U_C^2 \quad (49.95)$$

și *pierderile prin isterезis dielectric*

$$P_b = f \oint_{\Gamma_{QU}} u_C dq = f \cdot \mathcal{A}_{QU}. \quad (49.96)$$

Aici, integrala se efectuează de-a lungul conturului Γ_{QU} al ciclului de încărcare, fiind egală cu aria $\mathcal{A}_{QU}$ a acestuia (în unități de energie) și reprezentînd energia disipată sub formă de căldură într-un ciclu de încărcare, datorită fenomenului de isterезis dielectric. Considerînd, spre simplificare, un condensator plan, avînd aria A , distanța d între armături și un dielectric omogen,

$$q = D \cdot A \quad \text{și} \quad u_C = E \cdot d. \quad (49.97)$$

Înlocuind aceste expresii în relația (49.96), pierderile prin isterезis se exprimă astfel :

$$P_b = f \oint_{\Gamma_{DE}} E \cdot d \cdot d(DA) = f \oint_{\Gamma_{DE}} V \oint_{\Gamma_{DE}} E dD. \quad (49.98)$$

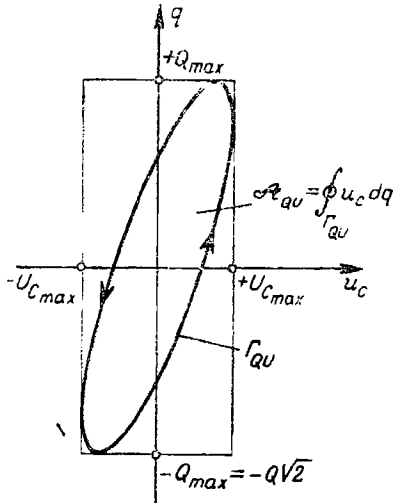


Fig. 49.14

Aici

$$w_{he} = \mathcal{A}_{DE} = \oint_{\Gamma_{DE}} E dD = \frac{P_b}{fV} \left[\frac{J}{m^3 \text{ciclu}} \right] \quad (49.99)$$

e densitatea de volum a energiei pierdute pentru un ciclu de polarizare electrică, egală cu aria ciclului de isterezis (fig. 49.13).
Produsul

$$P_{he} = f w_{he} = \frac{P_b}{V} = f \cdot \oint_{\Gamma_{DE}} E dD \quad (49.100)$$

e puterea specifică de pierderi prin isterezis dielectric.

Dacă în regim armonic sinusoidal, tensiunea

$$u_C = U_C \sqrt{2} \sin \omega t = U_{max} \sin \omega t \quad (49.101)$$

e luată origine de fază, sarcina

$$q = Q \sqrt{2} \sin (\omega t - \delta_b) = Q_{max} \sin (\omega t - \delta_b) \quad (49.102)$$

e defazată în urma tensiunii cu unghiul $\delta_b > 0$, numit *unghi de pierderi prin isterezis*. Mărimile u_C și q , nefiind în fază, nu se poate defini o capacitate a condensatorului ca în regim electrostatic, prin raportul lor (care e acum funcție de timp). Se poate defini însă o *capacitate aparentă*

$$C_{(max)} = \frac{Q_{max}}{U_{max}}, \quad (49.103)$$

cu valorile maxime luate din ciclul de încărcare (maxime care nu au loc simultan). Cu relația (49.97) rezultă că această capacitate aparentă se poate exprima în funcție de dimensiunile condensatorului, la fel ca în regim electrostatic:

$$C_{(max)} = \frac{A}{d} \frac{D_{max}}{E_{max}} = \frac{A}{d} \varepsilon_{(max)}, \quad (49.104)$$

pacă se utilizează *permitivitatea aparentă*

$$\varepsilon_{(max)} = \frac{D_{max}}{E_{max}}, \quad (49.105)$$

dedusă din ciclul de isterezis al materialului.

Cu relațiile (49.101) și (49.102), pierderile prin isterezis (49.96) se exprimă:

$$\begin{aligned} P_b &= f \oint u_C dq = \frac{1}{T} \int_0^T u_C \frac{dq}{dt} dt = \omega \frac{U_{max} Q_{max}}{T} \int_0^T \sin \omega t \cos (\omega t - \delta_b) dt = \\ &= \omega \frac{U_{max} Q_{max}}{2} \sin \delta_b \end{aligned} \quad (49.106)$$

sau

$$\mathcal{A}_{QU} = \frac{P_b}{f} = \pi U_{max} Q_{max} \sin \delta_b, \quad (49.107)$$

iar

$$\mathcal{A}_{DE} = \frac{P_b}{f} = \frac{\mathcal{A}_{QU}}{V} = \pi E_{max} D_{max} \sin \delta_b. \quad (49.108)$$

Deci, dacă se cunoaște ciclul de polarizare, se pot determina cu relațiile (49.103) și (49.107) mărimile $C_{(max)}$ și δ_b , care intervin în relația dintre sarcină și tensiune.

49.5.2. Schemele echivalente ale condensatorului cu pierderi. Condensatorul cu pierderi e un element de circuit capacitiv, al cărui curent

$$i = I\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi_e) = I\sqrt{2} \sin(\omega t + |\varphi_e|) \quad (49.109)$$

e defazat înaintea tensiunii cu unghiul $-\varphi_e = |\varphi_e| > 0$. Dacă

$$\underline{I} = I e^{-j\varphi_e} \quad \underline{U}_C = U_C \quad Q = Q e^{-j\delta_b} \quad (49.110)$$

sînt reprezentările în complex ale mărimilor (49.109), (49.101), (49.102), ecuația (49.92) se reprezintă sub forma:

$$\underline{I} = \underline{I}_0 + j\omega Q = (G_0 + j\omega C_{(max)} e^{-j\delta_b}) \underline{U}_C, \quad (49.111)$$

în care am utilizat relația (49.104).

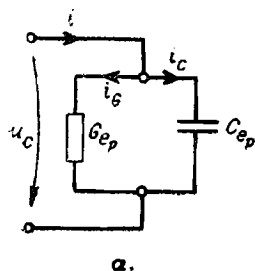
De aici rezultă *admitanța echivalentă complexă* a condensatorului:

$$\underline{Y}_e = \frac{\underline{I}}{\underline{U}_C} = G_0 + j\omega C_{(max)} e^{-j\delta_b}. \quad (49.112)$$

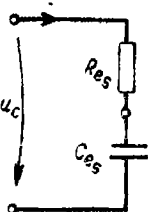
Separînd partea reală și cea imaginară,

$$\begin{aligned} \underline{Y}_e &= G_0 + \omega C_{(max)} \sin \delta_b + j\omega C_{(max)} \cos \delta_b \\ \underline{Y}_e &= G_{ep} + j\omega C_{ep}, \end{aligned} \quad (49.113)$$

se obțin *conductanța echivalentă-paralel* a dielectricului condensatorului:



a.



b.

Fig. 49.15

$$G_{ep} = \operatorname{Re} \{ \underline{Y}_e \} = G_0 + \omega C_{(max)} \sin \delta_b \quad (49.114)$$

și *capacitatea echivalentă-paralel* a condensatorului

$$C_{ep} = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \{ \underline{Y}_e \} = C_{(max)} \cos \delta_b. \quad (49.115)$$

Descompunerea relației (49.113) corespunde schemei echivalente paralel din figura 49.15, a.

Dacă se determină impedanța echivalentă

$$\underline{Z}_e = \frac{1}{\underline{Y}_e} = \frac{G_{ep}}{G_{ep}^2 + \omega^2 C_{ep}^2} - j\omega \frac{C_{ep}}{G_{ep}^2 + \omega^2 C_{ep}^2} = R_{e_s} + \frac{1}{j\omega C_{e_s}} \quad (49.116)$$

se obțin : *rezistența echivalentă-serie* a condensatorului :

$$R_{e_s} = \operatorname{Re} \{ \underline{Z}_e \} = \frac{G_{ep}}{G_{ep}^2 + \omega^2 C_{ep}^2} \quad (49.117)$$

și *capacitatea echivalentă-serie* :

$$C_{e_s} = - \frac{1}{\omega \operatorname{Im} \{ \underline{Z}_e \}} = \frac{G_{ep}^2 + \omega^2 C_{ep}^2}{\omega^2 C_{ep}}. \quad (49.118)$$

Descompunerea (49.116) corespunde schemei echivalente serie din figura 49.15, *b*.

Calculul elementelor schemelor echivalente se poate face cu relațiile (49.112) și (49.116), dacă se cunoaște conductanța de curent continuu G_0 , capacitatea aparentă $C_{(max)}$ (din ciclul de încărcare cu rel. 49.104) și unghiul de pierderi prin isterezis δ_b (din aria ciclului cu rel. 49.107).

49.5.3. Factorul de pierderi. Permitivitatea echivalentă complexă. În practică, descompunerea de mai sus a pierderilor totale în pierderi de conducție și pierderi prin isterezis nu prezintă interes și e util să se determine elementele schemelor echivalente direct din cunoașterea pierderilor totale. Pentru caracterizarea materialului (v. diagrama vectorială din fig. 49.16) se introduce *unghiul de pierderi totale* δ , egal cu complementul modulului unghiului de defazaj φ_e al curentului :

$$\delta = \frac{\pi}{2} - |\varphi_e| = \frac{\pi}{2} + \varphi_e; \quad (\varphi_e < 0). \quad (49.119)$$

Componenta activă a curentului (adică componenta lui în fază cu tensiunea) este :

$$I_G = I \cos \varphi_e = I \sin \delta = G_{ep} U_C, \quad (49.120)$$

componenta reactivă (în cuadratură cu tensiunea) este :

$$I_C = I \sin |\varphi_e| = I \cos \delta = \omega C_{ep} U_C, \quad (49.121)$$

iar pierderile totale de putere în dielectric sînt :

$$P_d = U_C I \cos \varphi_e = U_C I \sin \delta = G_{ep} U_C^2. \quad (49.122)$$

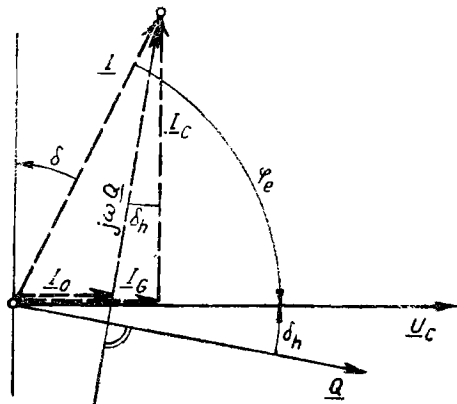


Fig. 49.16

Se obține, pentru tangenta unghiului de pierderi, numită și *factor de pierderi*, expresia :

$$\boxed{\operatorname{tg} \delta = \frac{I_G}{I_C} = \frac{G_{ep}}{\omega C_{ep}} = \omega C_{es} R_{es}} \quad (49.123)$$

E ușor de arătat că tangenta unghiului de pierderi e o caracteristică a materialului dielectric exprimabilă direct în funcțiune de conductivitatea lui σ și de $\varepsilon_{(max)}$ și δ_h . În adevăr, la condensatorul plan, conductanța de curent continuu este :

$$G_0 = \sigma \frac{A}{d} \quad (49.124)$$

Înlocuind această expresie și (49.104) în (49.114) și (49.115), se obțin relațiile :

$$G_{ep} = \frac{A}{d} (\sigma + \omega \varepsilon_{(max)} \sin \delta_h) \quad (49.125)$$

$$C_{ep} = \frac{A}{d} \varepsilon_{(max)} \cos \delta_h \quad (49.126)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_{(max)} \cos \delta_h} + \operatorname{tg} \delta_h \quad (49.127)$$

Din acest motiv, factorul de pierderi $\operatorname{tg} \delta$, utilizat pentru caracterizarea materialelor dielectrice, e dat, în tabele sau curbe, ca funcțiune de frecvență. Cu cât acest factor e mai mic, cu atât pierderile sînt mai mici, puterea de pierderi exprimindu-se în funcție de puterea reactivă a condensatorului prin relația :

$$P_d = U_C I \sin \varphi_e \left| \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_e} \right| = |Q| \operatorname{tg} \delta \quad (49.128)$$

Dacă se cunosc $\operatorname{tg} \delta$, U_C și P_d , elementele schemelor echivalente rezultă imediat : cu relația (49.120) se determină G_{ep} , cu relația (49.121) se deduce C_{ep} , iar cu relațiile (49.117) și (49.118), R_{es} și C_{es} .

Permitivitatea echivalentă complexă. Pentru un condensator cu pierderi se poate defini o *capacitate echivalentă complexă* $\underline{C}_e$ prin relația :

$$\mathbf{j} \omega \underline{C}_e = \underline{Y}_e = \frac{\underline{I}}{\underline{U}_C} = G_{ep} + \mathbf{j} \omega C_{ep}, \quad (49.129)$$

iar pentru materialul unui condensator cu pierderi (presupus plan și cu dielectric omogen), o *permitivitate echivalentă complexă* prin relația :

$$\underline{C}_e = \frac{A}{d} \underline{\varepsilon}_e \quad (49.130)$$

Din aceste relații, cu (49.125) și (49.126) rezultă :

$$\underline{\varepsilon}_c = \frac{\sigma + \omega \varepsilon_{(max)} \sin \delta_b}{j\omega} + \varepsilon_{(max)} \cos \delta_b$$

$$\underline{\varepsilon}_c = \varepsilon_{(max)} e^{-j\delta_b} + \frac{\sigma}{j\omega} = \frac{D_{max}}{E_{max}} e^{-j\delta_b} + \frac{\sigma}{j\omega} = \frac{\underline{D} + \frac{\underline{J}}{j\omega}}{\underline{E}}, \quad (49.131)$$

dacă $\underline{J} = \sigma \underline{E}$ e reprezentarea în complex a densității curentului de conducție prin dielectric.

Observații : a) Ca și în cazul bobinei cu miez de fier, elementele schemelor echivalente depind de frecvență și, uneori, de tensiunea aplicată.

b) O schemă echivalentă mai completă cuprinde (v. fig. 49.17) și rezistența r a conductoarelor de legătură și (la frecvențe înalte) inductivitatea parazită l , echivalentă prezenței acestor conductoare.

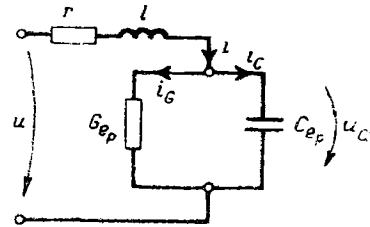


Fig. 49.17

CIRCUITE ELECTRICE **ÎN REGIM TRANZITORIU**

Teoria dezvoltată în capitolele 33...49 s-a referit la circuitele electrice în regim permanent, adică în regimul care se stabilește după trecerea unui timp suficient de mare față de constantele de timp ale circuitelor, pentru ca amortizarea regimului lor liber să fie practic completă¹. În acest caz, condițiile inițiale nu se mai resimt în modul de variație în timp al curenților, care rezultă univoc determinat de forma funcțiunilor de timp reprezentate de tensiunile electromotoare date ale surselor.

În practică prezintă importanță și regimul tranzitoriu al circuitelor și rețelelor electrice. În electroenergetică, toate procesele de comutație (închideri și deschideri de întreruptoare) și de avarie (scurtcircuite, întreruperi etc.) determină regimuri tranzitorii, care — deși durează uneori extrem de puțin, datorită valorilor mici ale constantelor de timp — pot periclita securitatea instalațiilor (prin supraințensiități și supratensiuni) sau stabilitatea funcționării lor. În electrocomunicații, numeroase clase de semnale — cum sînt, de exemplu, succesiunile de impulsii — au variații importante în intervale de timp de același ordin cu constantele de timp ale circuitelor și nu pot fi studiate decît în regim tranzitoriu; totodată, prelucrarea semnalelor (detectie, modulație, limitare etc.) utilizează adesea procese tranzitorii, care nu pot fi ignorate.

Regimul tranzitoriu al circuitelor liniare — la a cărui prezentare ne limităm — poate fi studiat cu *metoda directă de rezolvare a sistemelor de ecuații diferențiale ordinare, liniare, cu coeficienți constanți*. Această metodă consistă în următoarele :

— se scriu ecuațiile diferențiale ale circuitului (de ex. ecuațiile lui Kirchhoff în valori instantanee — rel. 36.5 și 36.10 — sau cele obținute din ele prin derivări, și, eventual, prin eliminarea unora dintre necunoscute);

— se caută *soluțiile de regim tranzitoriu* $i_m(t)$, sub forma unor sume ale *soluțiilor de regim liber* cu acelea de *regim forțat* (permanent);

— soluțiile de regim liber se determină cu ajutorul ecuațiilor caracteristice, ca soluții generale ale sistemului omogen (de ex. cu toate t.e.m. nule), care depind de un număr de constante arbitrare (egal cu numărul bobinelor și condensatoarelor din circuit, sau mai mic decît acest număr);

— soluțiile de regim permanent se determină ca soluții particulare ale sistemului neomogen — în cazul t.e.m. sinusoidale, fiind de aceeași formă cu aceste t.e.m. (determinarea acestor soluții se poate face cu oricare dintre metodele cunoscute de la studiul regimului permanent);

¹ Ne referim la circuite disipative, cu regim liber amortizat (v. par. 32) și al căror regim forțat coincide cu regimul permanent.

— se determină constantele arbitrare din expresiile complete, de regim tranzitoriu, ale soluțiilor, cu ajutorul condițiilor inițiale.

Această metodă a fost utilizată în paragraful 32, pentru studiul regimului tranzitoriu al circuitelor simple. Dacă circuitele au o structură mai complicată, dacă t.e.m. nu sînt periodice și dacă se cere să se determine numai una dintre funcțiunile necunoscute, această metodă e relativ laborioasă. Totodată, condițiile inițiale, exprimate prin valorile inițiale ale funcțiunilor necunoscute și ale derivatelor lor, necesită o analiză prealabilă a circuitului, care să stabilească care dintre mărimi trec continuu prin momentul inițial considerat (în general, un moment de discontinuitate). Aceste mărimi sînt, de obicei, fluxurile bobinelor — ale căror discontinuități ar determina tensiuni electromotoare induse infinite — și sarcinile condensatoarelor — ale căror discontinuități ar determina curenți absorbiți infinite.

Studiul regimului tranzitoriu se sistematizează prin utilizarea unor metode speciale, care înlătură, în total sau în parte, dificultățile aplicării metodei directe și, uneori, îl apropie de studiul regimului permanent sinusoidal, care e mai familiar inginerului electrician. În această parte a cursului se vor expune trei dintre aceste metode : metoda descompunerii spectrale (transformarea Fourier), metoda răspunsului tranzitoriu (integrala Duhamel) și metoda operațională (transformarea Laplace). Expunerea va privi numai elementele de bază ale acestor metode, a căror dezvoltare depășește cadrul acestui curs.

50. METODA DESCOMPUNERII SPECTRALE (TRANSFORMAREA FOURIER)

50.1. Integrala Fourier și transformarea Fourier

Seria Fourier complexă (47.19), în care coeficienții (amplitudinile spectrale) sînt înlocuite cu (47.20), capătă forma ¹ :

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^T f(\tau) e^{jn\omega(t-\tau)} d\tau. \quad (50.1)$$

Deoarece $f(t)$ e o funcțiune periodică cu perioada T , integrala de mai sus se poate extinde asupra oricărui interval egal cu o perioadă, în particular asupra intervalului $\left(-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right)$. Cu substituțiile

$$\omega \rightarrow \Delta\omega, \quad n\omega \rightarrow \omega_n, \quad \frac{1}{T} \rightarrow \frac{\Delta\omega}{2\pi}, \quad (50.2)$$

relația (50.1) se poate scrie :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\omega_n=-\infty}^{+\infty} \Delta\omega \int_{-\frac{\pi}{\Delta\omega}}^{+\frac{\pi}{\Delta\omega}} f(\tau) e^{j\omega_n(t-\tau)} d\tau. \quad (50.3)$$

¹ Pentru a evita confuziile, variabila de integrare din relația (47.20) a fost notată τ în loc de t , care rămîne simbolul variabilei independente în relația (49.19).

Pentru $T \rightarrow \infty$, $\Delta \omega \rightarrow 0$ și, notînd $\omega_n = \omega$, această relație tinde formal către egalitatea

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau, \quad (50.4)$$

numită *integrala Fourier* (complexă) — și se referă la o funcție definită într-un interval provenit din $(-T/2, +T/2)$ prin extinderea la întreaga axă reală, ceea ce elimină condiția de periodicitate, considerată la început (perioada e acum infinită).

În analiza matematică¹ se demonstrează că această egalitate are loc efectiv pentru orice funcțiune netedă pe porțiuni (v. nota de picior de la începutul paragrafului 47.1.1.) și absolut integrabilă pe toată axa variabilei reale t , pentru care deci :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\tau)| d\tau < \infty \quad (50.5)$$

ceea ce impune anularea funcțiunii pentru $t \rightarrow \pm \infty$

$$f(-\infty) = 0, f(+\infty) = 0 \quad (50.6)$$

și exclude posibilitatea ca această funcțiune să fie periodică (cu perioada finită).

Dacă se introduce funcțiunea complexă de o variabilă imaginară :

$$\boxed{\underline{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau} = \underline{F}^*(-j\omega), \quad (50.7)$$

integrala Fourier capătă forma :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{F}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (50.8)$$

Funcțiunea $\underline{F}(j\omega)$ se numește *transformata Fourier* sau *imaginea Fourier* a funcțiunii de timp $f(t)$, care satisface condițiile de existență ale integralei (50.4). Relația (50.7) se numește *transformarea Fourier directă* și permite să se asocieze biunivoc o imagine $\underline{F}(j\omega)$ fiecărei funcțiuni de timp neperiodice $f(t)$. Relația (50.8) se numește *transformarea Fourier inversă* sau *dezvoltarea în integrală Fourier* a funcțiunii neperiodice $f(t)$ și permite să se determine funcțiunea de timp, a cărei transformată e dată. De remarcat că în relațiile (50.4), (50.7) și (50.8) conceptul de pulsație e extins și la valori reale negative.

¹ v. G. P. Tolstov, *Serii Fourier*, Ed. tehnică, București, 1955.

50.2. Descompunerea spectrală a funcțiilor de timp

Relația (50.8) poate fi interpretată ca o prezentare a funcțiunii de timp $f(t)$, sub forma unei suprapunerii de componente armonice elementare (reprezentate în complex) de forma :

$$\frac{1}{2\pi} F(j\omega) d\omega e^{j\omega t} \quad (50.9)$$

ale căror amplitudini sînt infinit mici. De aceea, transformata Fourier se mai numește *densitatea spectrală* (complexă) a funcțiunii de timp $f(t)$, fiind cîtu dintre *amplitudinea spectrală elementară* $\frac{1}{2\pi} F(j\omega) d\omega$ și intervalul de frecvență

$df = d\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$ la care se referă. Această interpretare permite să se considere dezvoltarea în integrală Fourier ca o extindere la funcțiuni de timp oarecare a analizei armonice a funcțiunilor periodice nesinusoidale. Reprezentarea grafică a *modulului densității spectrale*

$$|F(j\omega)| = \Phi(\omega)$$

se numește *spectrul funcțiunii* $f(t)$.

Exemplu: Fie tensiunea $u(t)$ de forma unei impulsii dreptunghiulare izolate, de amplitudine U_0 și durată T_0 (fig. 50.1, a)

$$u(t) = \begin{cases} U_0 & \text{pentru } 0 < t \leq T_0 \\ 0 & \text{pentru } t \leq 0 \text{ și } t > T_0. \end{cases} \quad (50.10)$$

Se observă imediat că sînt satisfăcute condițiile existenței transformării Fourier și se obține densitatea spectrală :

$$\underline{U}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = U_0 \int_0^{T_0} e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{U_0}{j\omega} (1 - e^{-j\omega T_0}), \quad (50.11)$$

cu modulul

$$|\underline{U}(j\omega)| = \frac{2U_0}{\omega} \left| \sin \frac{\omega T_0}{2} \right|, \quad (50.12)$$

corespunzător spectrului din figura 50.1, b.

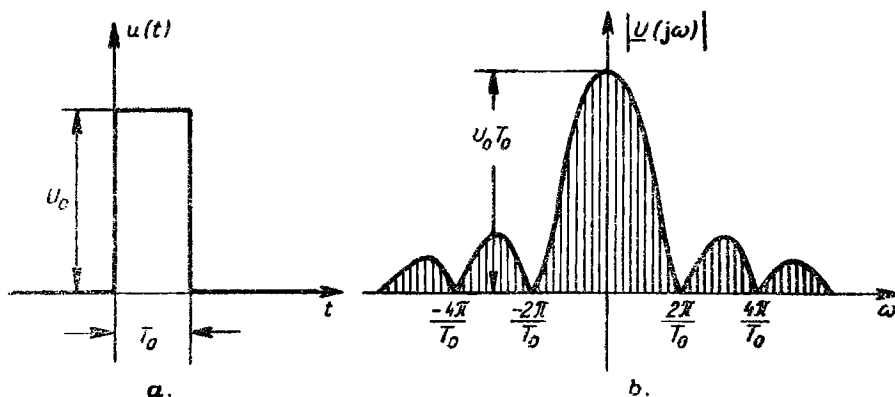


Fig. 50.1

50.3. Aplicarea descompunerii spectrale la studiul regimului tranzitoriu

Deoarece dezvoltarea în integrală Fourier (50.8) e interpretabilă ca o descompunere în componente armonice elementare, studiul regimului tranzitoriu se poate efectua generalizînd metoda suprapunerii efectelor, aplicată în cazul regimului permanent nesinusoidal (par. 48.2), cu condiția ca circuitul să fie liniar, iar funcțiunile de timp care intervin să admită o transformată Fourier.

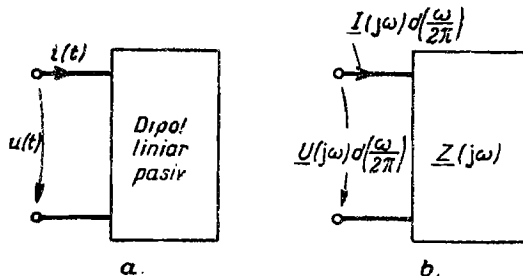


Fig. 50.2

Ultima condiție e realizată în cazul tensiunilor și curenților care sînt mărginiți, sînt nuli pentru $t < 0$ și tind către zero suficient de repede pentru $t \rightarrow \infty$. Această condiție nu e realizată în cazul existenței unui regim permanent periodic, cînd regimul tranzitoriu nu poate fi studiat pe această cale.

Considerăm, pentru exemplificare, un dipol liniar și pasiv (fig. 50.2, a), în condiții inițiale „de repaus” (toți curenții și toate tensiunile nule pentru $t < 0$), căruia i se aplică, la $t = 0$, tensiunea :

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{U}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (50.13)$$

și se cere curentul tranzitoriu

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{I}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (50.14)$$

Circuitul fiind liniar și pasiv și în condiții inițiale de „repaus”, curentul e suma (integrala) curenților armonici elementari :

$$\underline{\delta I} = \underline{I}(j\omega) e^{j\omega t} d\left(\frac{\omega}{2\pi}\right), \quad (50.15)$$

produși de fiecare componentă armonică elementară a tensiunii

$$\underline{\delta u} = \underline{U}(j\omega) e^{j\omega t} d\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \quad (50.16)$$

în parte. Deoarece aceste componente elementare au aceeași formă ca la reprezentarea în complex nesimplificată, relația dintre tensiune și curent e determinată de impedența complexă a circuitului, fiind valabilă egalitatea (v. fig. 50.2, b) :

$$\underline{Z} = \underline{Z}(j\omega) = \frac{\underline{\delta U}}{\underline{\delta I}} = \frac{\underline{U}(j\omega)}{\underline{I}(j\omega)}, \quad (50.17)$$

Concluzie : Dacă se cunoaște transformata Fourier a tensiunii

$$\underline{U}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (50.18)$$

din cunoașterea impedanței complexe și a aplicării teoremei superpoziției rezultă transformata Fourier a curentului

$$\underline{I}(j\omega) = \frac{\underline{U}(j\omega)}{\underline{Z}(j\omega)} \quad (50.19)$$

și expresia instantanee a acestuia (din relația (50.14))

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\underline{U}(j\omega)}{\underline{Z}(j\omega)} e^{j\omega t} d\omega. \quad (50.20)$$

În cazuri mai generale, metoda se aplică unui sistem de transmisiune diport liniar, pasiv (v. par. 45.2), a cărui mărime de intrare e

$$u_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{U}_i(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (50.21)$$

și pentru care se cere mărimea de ieșire

$$u_e(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{U}_e(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (50.22)$$

Dacă $\underline{A}(j\omega)$ e raportul de transmisiune al sistemului (v. par. 45.2), aplicarea metodei suprapunerii efectelor, în cazul unor condiții inițiale „de repaus”, conduce la soluția :

$$u_e(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\underline{U}_i(j\omega)}{\underline{A}(j\omega)} e^{j\omega t} d\omega \quad (50.23)$$

50.4. Aplicație

Fie circuitul R, C din figura 50.3, a, a cărui impedanță complexă e $\underline{Z} = R + \frac{1}{j\omega C}$ și la care se aplică o impulsie dreptunghiulară de tensiune de forma (50.10), cu transformata Fourier (50.4). Rezultă pentru curent transformata :

$$\underline{I}(j\omega) = \frac{\underline{U}(j\omega)}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{CU_0(1 - e^{-j\omega T_0})}{1 + j\omega CR}.$$

Curentul instantaneu este :

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{I}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{CU_0}{2\pi j} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t}}{1 + j\omega CR} d(j\omega) - \int_{+\infty}^{-j\infty} \frac{e^{j\omega(t-T_0)}}{1 + j\omega CR} d(j\omega) \right].$$

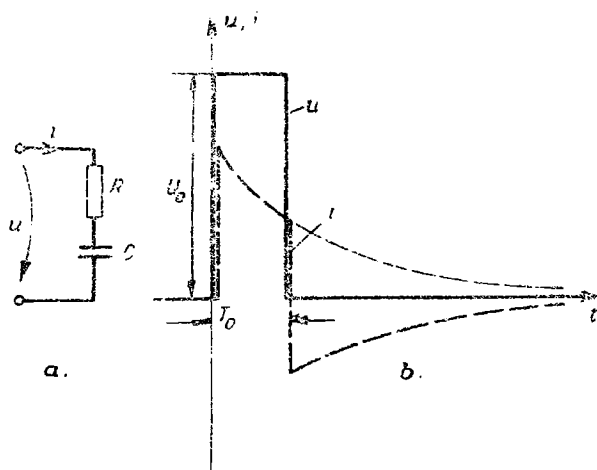


Fig. 50.3

Integralele se pot efectua cu metoda reziduurilor, introducînd variabila complexă $p = \sigma + j\omega$ și efectuînd integrarea pe axa imaginară, completată cu un semicerc de rază infinită, astfel ales încît (în acord cu lema lui Jordan) să aducă o contribuție nulă. Se obține :

$$i(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t \leq 0 \\ \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{CR}} & \text{pentru } 0 < t \leq T_0 \\ \frac{U_0}{R} \left[e^{-\frac{t}{CR}} - e^{-\frac{t-T_0}{RC}} \right] & \text{pentru } t > T_0 \end{cases} \quad (50.24)$$

În figura 50.3, *b* sînt reprezentate variațiile în timp ale tensiunii și ale curentului la acest circuit.

51. || METODA RĂSPUNSULUI TRANZITORIU (INTEGRALA DUHAMEL)

51.1. Funcțiunea de răspuns tranzitoriu

În numeroase aplicații interesează determinarea regimului tranzitoriu pentru o anumită mărime de ieșire $u_e(t)$, cînd unei rețele liniare și pasive *i* se aplică o anumită mărime de intrare $u_i(t)$, în condiții inițiale „de repaus” (v. par. 45.2). În metoda răspunsului tranzitoriu se rezolvă în prealabil o pro-

blemă mai simplă, și anume determinarea mărimii de ieșire, când mărimea de intrare e o funcțiune treaptă unitate (fig. 51.1, a)

$$\gamma(t)^1 = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t \leq 0 \\ 1 & \text{pentru } t > 0 \end{cases} \quad (51.1)$$

Soluția acestei probleme mai simple, adică funcțiunea

$$f(t) = u_c(t) \Big|_{u_i(t)} \quad (f(t) = 0 \text{ la } t < 0) \quad (51.2)$$

se numește funcțiunea de răspuns tranzitoriu a sistemului și constituie o caracteristică a lui (caracteristica tranzitorie), tot așa cum raportul de transmisiune (par. 45.2) constituie o caracteristică de regim permanent a sistemului. În prezentarea metodei vom avea nevoie și de funcțiunea treaptă unitate retardată (fig. 51.1, b) :

$$\gamma(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t \leq \tau \\ 1 & \text{pentru } t > \tau \end{cases} \quad (51.3)$$

Se observă imediat că o funcțiune treaptă oarecare, cu amplitudinea A și retardarea τ , e reprezentabilă prin expresia (fig. 51.1, c)

$$A\gamma(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t \leq \tau \\ A & \text{pentru } t > \tau. \end{cases} \quad (51.4)$$

În cazul unei rețele liniare, dacă $f(t)$ e răspunsul pentru mărimea de intrare $\gamma(t)$, răspunsul pentru o mărime de intrare de forma (51.4) va fi, evident, mărimea de ieșire :

$$Af(t-\tau) \quad (51.5)$$

(care, conform cu 51.2, se anulează pentru $t < \tau$).

Exemplu: Considerăm circuitul R, C studiat în aplicația 50.4. În paragraful 32.2 am determinat curentul de regim tranzitoriu al acestui circuit, când, începînd cu momentul $t = 0$, i se aplică tensiunea constantă și am obținut (v. rel. 32.20) :

$$i(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t > 0) \quad (51.6)$$

Dacă vom considera acest curent ca mărime de ieșire și tensiunea aplicată la borne ca mărime de intrare, vom observa imediat că în cazul $U_0 = 1$, tensiunea aplicată e o funcțiune treaptă unitate. De aceea, funcțiunea de răspuns tranzitoriu corespunzătoare este

$$f(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t > 0) \quad (51.7)$$

¹ Pentru funcțiunea treaptă unitate se mai utilizează notațiile :

$1(t), Y(t), \varepsilon(t).$

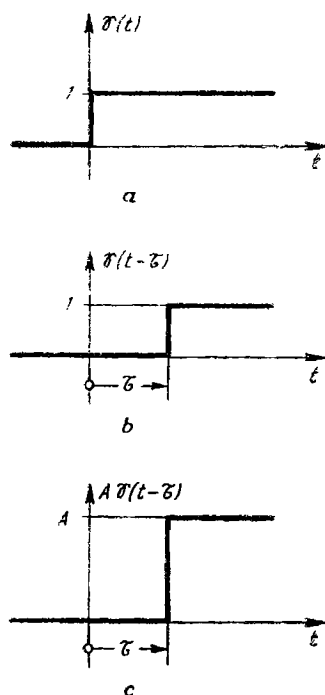


Fig. 51.1

51.2. Integrala Duhamel

Metoda răspunsului tranzitoriu utilizează funcțiunea de răspuns tranzitoriu (51.2), pentru a construi soluția $u_i(t)$, nulă pentru $t < 0$, folosind principiul superpoziției. De aceea și această metodă e aplicabilă (în forma prezentată aici) numai circuitelor liniare, pasive, cu condiții inițiale „de repaus”. De data aceasta, orice funcțiune de timp (nulă pentru $t < 0$, continuă și derivabilă

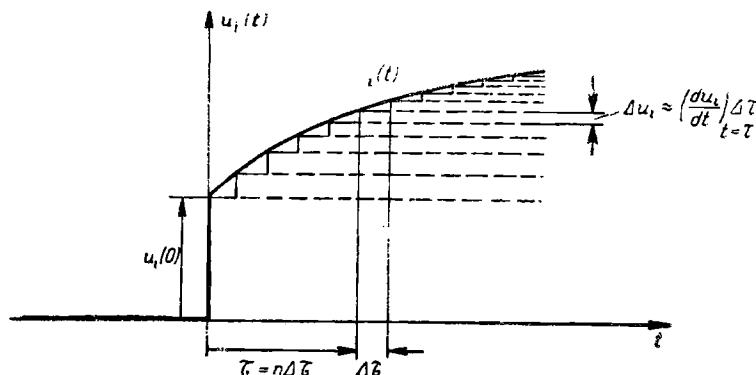


Fig. 51.2

pentru $t > 0$), reprezentînd o mărime de intrare $u_i(t)$, se obține prin suprapunerea unei mulțimi infinite de funcțiuni treaptă, cu amplitudini și retardări convenabil alese (v. fig. 51.2), conform relației:

$$u_i(t) = u_i(+0)\gamma(t) + \int_0^t \left(\frac{du_i}{dt}\right) \gamma(t-\tau) d\tau. \quad (51.8)$$

În adevăr, prima treaptă (neretardată) are amplitudinea $u_i(+0)$, iar celelalte sînt trepte elementare retardate cu $\tau < t$, de amplitudini:

$$\Delta u_i \approx \left(\frac{du_i}{dt}\right) \Delta \tau \longrightarrow \left(\frac{du_i}{dt}\right) d\tau = u_i'(\tau) d\tau, \quad (51.9)$$

adică de forma:

$$\left(\frac{du_i}{d\tau}\right) d\tau \gamma(t-\tau) = u_i'(\tau) \gamma(t-\tau) d\tau. \quad (51.10)$$

Se verifică imediat că, deoarece în expresia (51.8) $t > 0$ și $\tau < t$, se poate înlocui $\gamma(t-\tau)$ și $\gamma(t)$ cu 1 (v. 51.3), obținîndu-se identitatea:

$$u_i(t) = u_i(+0) + \int_0^t \frac{du_i}{d\tau} d\tau \equiv u_i(+0) + \int_0^t du_i \quad (t > 0).$$

¹ Notăția $g(+0)$ indică limita la dreapta, în origine, a funcțiunii oarecare $g(x)$.

Ținând seama de definiția funcției de răspuns tranzitoriu (51.2), prima treaptă $u_i(+0)\gamma(t)$ a mărimii de intrare determină o mărime de ieșire

$$u_i(+0)f(t), \quad (51.11)$$

iar fiecare dintre treptele elementare retardate (51.10) determină câte o mărime de ieșire elementară de forma :

$$u_i'(\tau)f(t-\tau)d\tau. \quad (51.12)$$

Conform teoremei superpoziției, aplicabilă rețelei liniare și pasive considerate, mărimea de ieșire pentru cazul când se aplică mărimea de intrare (51.8) va fi obținută adunând expresia (51.11) cu integrala răspunsului elementar (51.12). Se obține relația :

$$u_e(t) = u_i(+0)f(t) + \int_0^t u_i'(\tau)f(t-\tau)d\tau, \quad (51.13)$$

numită *integrala Duhamel*. Prin integrare prin părți și schimbări de variabilă, integrala Duhamel se mai poate scrie sub una din următoarele forme :

$$u_e(t) = u_i(+0)f(t) + \int_0^t u_i'(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad (51.14)$$

$$u_e(t) = u_i(t)f(+0) + \int_0^t u_i(\tau)f'(t-\tau)d\tau \quad (51.15)$$

$$u_e(t) = u_i(t)f(+0) + \int_0^t u_i(t-\tau)f'(\tau)d\tau. \quad (51.16)$$

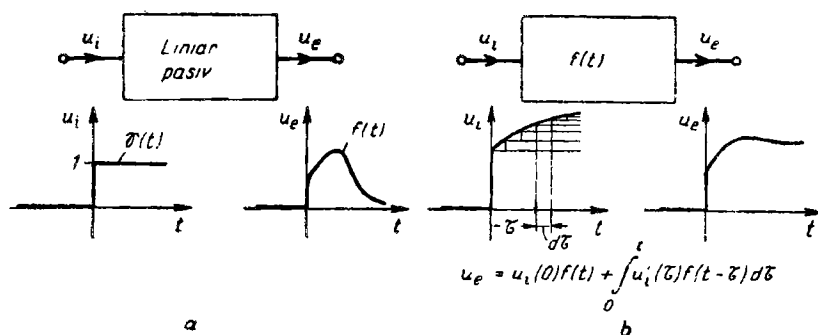


Fig. 51.3

Metoda răspunsului tranzitoriu consistă deci în următoarele :

1. Se determină funcțiunea de răspuns tranzitoriu a sistemului $f(t)$, adică mărimea de ieșire pentru o mărime de intrare treaptă unitate neretardată (fig. 51.3, a). Pentru această operație se poate folosi orice altă metodă (de ex. metoda directă sau calculul operațional — v. cap. 52).

2. Se determină mărimea de ieșire $u(t)$, determinată de o mărime de intrare oarecare $u(t)$, cu ajutorul oricăreia dintre integralele tip Duhamel (51.13), (51.14), (51.15), (51.16), (v. fig. 51.3, b).

Observații: a) Metoda se aplică numai sistemelor liniare și pasive, în condiții inițiale de repaus. Spre deosebire de metoda descompunerii spectrale, în cazul acesta funcțiunile $u_i(t)$ și $u_e(t)$ nu trebuie să fie absolut integrabile. De aceea, metoda permite și considerarea cazului regimului tranzitoriu corespunzător unui regim permanent periodic.

b) În relațiile de mai sus, $f(+0)$ și $u_i(+0)$ sînt considerate la $t = 0 + \varepsilon$, cu ε pozitiv și arbitrar de mic.

c) Se poate arăta că formulele (51.15) și (51.16) sînt aplicabile și cînd $u_i(t)$ are discontinuități de prima specie.

Aplicație: Considerăm ca exemplu circuitul R, C studiat și cu metoda precedentă (fig. 50.3). S-a văzut în exemplul din paragraful precedent că, în acest caz, funcțiunea de răspuns tranzitoriu este (51.7). Mărimea de intrare e , în acest caz, tensiunea aplicată $u(t)$, dat de relația (50.10), care cu ajutorul funcțiunilor treaptă se exprimă analitic:

$$u(t) = U_0(\gamma(t) - \gamma(t - T_0)). \quad (51.17)$$

Mărimea de ieșire e în acest caz curentul $i(t)$, care se poate calcula cu relația (51.16) (pentru a evita derivarea mărimii de intrare, care prezintă o discontinuitate de prima specie la $t = T_0$)

$$i(t) = u(t) f(+0) + \int_0^t u(t - \tau) f'(\tau) d\tau. \quad (51.18)$$

În acest caz, cu (51.7),

$$f(+0) = f(0 - \varepsilon) = \frac{1}{R} \quad \text{și} \quad f'(\tau) = -\frac{1}{R^2C} e^{-\frac{\tau}{RC}}, \quad (51.19)$$

așa că

$$\int_0^t u(t - \tau) f'(\tau) d\tau = -\frac{U_0}{R^2C} \int_0^t \gamma(t - \tau) e^{-\frac{\tau}{RC}} d\tau + \frac{U_0}{R^2C} \int_0^t \gamma(t - \tau - T_0) e^{-\frac{\tau}{RC}} d\tau.$$

Deoarece $\tau < t$ în prima integrală $\gamma(t - \tau) = 1$, iar în a doua $\gamma(t - \tau - T_0) = 1$ pentru $0 \leq \tau < t - T_0$ și e nulă în rest. Dacă $t \leq T_0$, a doua integrală e nulă și deci

$$\int_0^t u(t - \tau) f'(\tau) d\tau = -\frac{U_0}{R^2C} \int_0^t e^{-\frac{\tau}{RC}} d\tau = \frac{U_0}{R} \left(e^{-\frac{t}{RC}} - 1 \right), \quad t \leq T_0.$$

Dacă $t > T_0$, a doua integrală se poate efectua numai pînă la $t - T_0$, în rest integrandul fiind nul. Rezultă:

$$\int_0^t u(t - \tau) f'(\tau) d\tau = \frac{U_0}{R} \left(e^{-\frac{t}{RC}} - 1 \right) - \frac{U_0}{R} \left(e^{-\frac{t-T_0}{RC}} - 1 \right), \quad t > T_0.$$

Ambele cazuri se pot scrie cu ajutorul funcțiunii treaptă, astfel:

$$\int_0^t u(t - \tau) f'(\tau) d\tau = \frac{U_0}{R} \left(e^{-\frac{t}{RC}} - 1 \right) \gamma(t) - \frac{U_0}{R} \left(e^{-\frac{t-T_0}{RC}} - 1 \right) \gamma(t - T_0). \quad (51.20)$$

Cu relațiile (51.17), (51.19) și (51.20), soluția (51.18) se scrie :

$$i(t) = \frac{U_0}{R} (\gamma(t) - \gamma(t - T_0)) + \frac{U_0}{R} \left[\left(e^{-\frac{t}{RC}} - 1 \right) \gamma(t) - \left(e^{-\frac{t-T_0}{RC}} - 1 \right) \gamma(t - T_0) \right]$$

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \left[e^{-\frac{t}{RC}} \gamma(t) - e^{-\frac{t-T_0}{RC}} \gamma(t - T_0) \right]. \quad (51.21)$$

Am obținut exact soluția (50.24), scrisă acum strâns cu ajutorul funcțiunii treaptă unitate.

52. METODA OPERAȚIONALĂ (TRANSFORMAREA LAPLACE)

Prin aplicarea teoremelor lui Kirchhoff în valori instantanee, la studiul circuitelor electrice liniare, se obține un sistem de ecuații integro-diferențiale liniare, relațiile (36.5) și (36.10), cu coeficienți constanți, în care necunoscutele sînt de obicei valorile instantanee ale curenților.

În regim permanent sinusoidal acești curenți sînt complet determinați de valorile instantanee ale tensiunilor de alimentare. În capitolul 34 și următoarele am arătat că rezolvarea sistemului de ecuații se simplifică în mod esențial prin utilizarea reprezentării în complex a mărimilor sinusoidale, care asociază fiecărei asemenea mărime $i(t) = I \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma)$ o imagine în complex unică $\underline{I}$ prin regula

$$\mathcal{C}(I \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma)) = I e^{j\gamma} = \underline{I}, \quad (52.1)$$

cu următoarele proprietăți principale :

— biunivocitatea reprezentării, asigurată de faptul că și fiecărei imagini complexe îi corespunde o singură mărime sinusoidală, prin regula

$$\mathcal{C}^{-1}(\underline{I}) I \equiv \text{Im} \{ \sqrt{2} e^{j\omega t} \underline{I} \} = I \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma) \equiv i(t). \quad (52.2)$$

liniaritatea reprezentării :

$$\mathcal{C}(\lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2) \equiv \lambda_1 \mathcal{C}(i_1) + \lambda_2 \mathcal{C}(i_2). \quad (52.3)$$

— reprezentarea operației de derivare printr-o operație algebrică : înmulțirea cu un număr (imaginar),

$$\mathcal{C}\left(\frac{di}{dt}\right) = j\omega \mathcal{C}(i). \quad (52.4)$$

Avantajele pe care le prezintă metoda reprezentării în complex rezultă din aceste proprietăți și consistă în faptul că *sistemul de ecuații integro-diferențiale, satisfăcute de valorile instantanee sinusoidale, se reprezintă biunivoc într-un sistem de ecuații algebrice liniare, satisfăcute de imaginile lor în complex*. Ca urmare, calculul circuitului se face mai simplu și mai sistematic, rezolvînd acest sistem de ecuații algebrice (forma complexă — rel. 36.22 — a teoremelor lui Kirchhoff), determinînd astfel imaginile complexe ale funcțiunilor necunoscute și, cu ajutorul reprezentării inverse (52.2), aceste funcții însele.

O prescripție de calcul $\mathcal{F}$, care asociază univoc fiecărei funcțiuni $i(t)$ dintr-o anumită clasă o anumită imagine $\mathcal{F}(i)$, se numește *operator*. Operatorul $\mathcal{C}$ al reprezentării în complex este un operator liniar, (proprietatea (52.3), care admite un *operator invers* $\mathcal{C}^{-1}$ (52.2), și care are proprietatea remarcabilă (52.4) de a transforma derivarea într-o operație algebrică. Metoda reprezentării în complex este, în fond, un exemplu elementar de *metodă operațională*.

În regim tranzitoriu, curenții sînt funcțiuni de timp dintr-o clasă mult mai largă, complet determinați atît de valorile instantanee ale tensiunilor (componentele forțate ale curenților) cît și de condițiile inițiale (componentele de regim liber ale curenților). Simplificarea rezolvării sistemului de ecuații integro-diferențiale ale circuitelor liniare se poate obține cu o metodă operațională, dacă se găsește un operator liniar $\mathcal{L}$, care să asocieze biunivoc fiecărei funcțiuni de timp $i(t)$ din clasa dată o imagine $\mathcal{L}(i)$, astfel încît operația de derivare a funcțiunii de timp să se transforme într-o operație algebrică liniară, efectuată asupra imaginii.

Dacă aceste condiții sînt îndeplinite, ecuațiile integro-diferențiale liniare ale circuitelor se vor reprezenta prin ecuații algebrice. Se pot extinde astfel la studiul regimului tranzitoriu avantajele utilizării calculului în complex de la studiul regimului permanent. Metoda operațională e deci o metodă de reprezentare simbolică (v. cap. 34).

Se arată că există mai mulți operatori care satisfac condițiile de mai sus, pentru diferite clase de funcțiuni de timp, susceptibile de a prezenta interes în problemele de electrotehnică. Astfel, de exemplu, metoda descompunerii spectrale (cap. 50) poate fi prezentată ca o metodă operațională, în care operatorul, definit de transformarea funcțională (50.7), asociază univoc fiecărei funcțiuni de timp $f(t)$ (pentru care există integrala Fourier — rel. 50.4) o imagine complexă $F(j\omega)$, funcțiune de o variabilă imagină. E ușor de verificat că acest operator e liniar, că reprezentarea e biunivocă și că derivarea se transformă în înmulțirea cu $j\omega$. Clasa de funcțiuni de timp cărora li se poate aplica integrala Fourier e însă prea restrînsă, din cauza condițiilor (50.5) și (50.6), care exclud aplicarea acestei metode la regimuri tranzitorii, cu mărimi de regim permanent diferite de zero.

În electrotehnică se utilizează din ce în ce mai mult metoda operațională, în care operatorul $\mathcal{L}$ e definit cu ajutorul unei transformări funcționale, numită *transformarea lui Laplace*. Această metodă e aplicabilă unei clase mult mai largi de funcțiuni de timp decît aceea susceptibilă de transformarea Fourier. Metoda se utilizează mai ales pentru studiul regimurilor tranzitorii ale circuitelor liniare cu parametri concentrați (în care apar ecuații diferențiale ordinare liniare, cu coeficienți constanți), dar se poate aplica și la studiul regimurilor tranzitorii în circuite liniare cu parametri repartizați, cum sînt liniile electrice lungi, studiate în capitolele urînătoare (în care apar ecuații cu derivate parțiale liniare și cu coeficienți constanți).

Deoarece cea mai simplă operație neliniară, înmulțirea a două funcțiuni de timp, nu se reprezintă prin înmulțirea imaginilor acestor funcțiuni, *metoda operațională prezentată aici nu e aplicabilă circuitelor neliniare*.

52.1. Transformarea Laplace și proprietățile ei

52.1.1. Funcțiunile original. Transformarea Laplace e definită de integrala :

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad (52.5)$$

în care $f(t)$ e o funcțiune reală de timp, iar $p = \sigma + j\omega$ o variabilă complexă ¹. Se demonstrează convergența acestei integrale ² dacă sînt îndeplinite următoarele condiții :

a) Pentru $t > 0$, $f(t)$ să fie netedă pe porțiuni (v. nota de picior de la începutul paragrafului 47.1.1.).

¹ În acord cu notațiile uzuale, variabila complexă p și funcțiunile de această variabilă $F(p)$, care sînt imaginile Laplace ale funcțiunilor de timp, nu vor fi subliniate. Caracterul lor complex e suficient precizat prin prezența simbolului p .

² Pentru detalii privitoare la transformarea Laplace și la calculul operațional se poate consulta lucrarea : M. I. Kontorovici, „Calculul operațional și fenomenele tranzitorii în circuitele electrice“, Ed. energetică de Stat, 1955.

b) Pentru $t > t_0 > 0$, $f(t)$ să nu crească în modul mai repede decât o exponențială, adică să existe constantele pozitive A_0 , σ_0 și t_0 , astfel ca :

$$|f(t)| < A_0 e^{\sigma_0 t}, \text{ dacă } t > t_0. \quad (52.6)$$

c) Variabila complexă p să aibă partea reală suficient de mare, adică :

$$\sigma = \operatorname{Re}\{p\} > \sigma_a, \quad (52.7)$$

unde σ_a e marginea inferioară a constantelor σ_0 , pentru care e satisfăcută condiția (52.6) (abscisa absolută de convergență a integralei).

Clasa funcțiilor de timp pentru care se utilizează metoda operațională cu transformarea Laplace e definită în sens restrîns de condițiile a și b de mai sus și de intervalul de definiție al variabilei

$$0 \leq t \leq \infty. \quad (52.8)$$

Dacă această clasă se întregește și cu funcțiunea improprie a lui Dirac $\delta(t)$, studiată ca limită a impulsiei finite (v. par. 52.1.2) — deosebit de utilă pentru prezentarea fenomenelor tranzitorii în anumite circuite idealizate în care apar discontinuități — se obține o clasă de funcțiuni de timp suficient de largă pentru aplicațiile întâlnite în electrotehnică. Funcțiunile din această clasă se numesc *funcțiuni original*. În cele ce urmează presupunem că toate funcțiunile de timp care intervin sînt funcțiuni original.

52.1.2. **Funcțiunile imagine (transformatele Laplace).** Fiind dată o funcțiune original $f(t)$, se numește *imagine Laplace* sau *transformată Laplace* a ei funcția $F(p)$, de variabilă complexă p , univoc asociată primei prin expresia :

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \text{ cu } \operatorname{Re}\{p\} > \sigma_a. \quad (52.9)$$

Cînd $\operatorname{Re}\{p\} \leq \sigma_a$ și integrala (52.5) e divergentă imaginea Laplace e definită prin prelungirea analitică a funcțiunii de p , astfel obținută, (ceea ce înseamnă, practic, *prin expresia* în p obținută cu 52.9).

Transformata Laplace e astfel definită ca o funcțiune analitică de p în întreg planul complex, cu excepția singularităților care există în semiplanul $\operatorname{Re}\{p\} \leq \sigma_a$. Se demonstrează că această regulă de asociere e biunivocă, definind un operator notat cu simbolul $\mathcal{L}$

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[f], \quad (52.10)$$

care asociază fiecărei funcțiuni original $f(t)$ (cu $t \geq 0$) o imagine complexă $F(p)$ — și al cărui operator invers se notează cu simbolul $\mathcal{L}^{-1}$.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \mathcal{L}^{-1}[F] \quad (52.11)$$

și asociază fiecărei imagini complexe $F(p)$ o funcțiune de timp $f(t)$, univoc determinată pentru $t \geq 0$.

52.1.3. **Transformatoarele Laplace ale unor funcțiuni uzuale.** Folosind relația 52.9, calculăm imaginile unor funcțiuni frecvent întâlnite în studiul regimurilor tranzitorii.

1. *Imaginea unei constante.* Pentru o constantă C , lund $\sigma_a = 0$ și $\operatorname{Re}\{p\} > 0$, rezultă :

$$\mathfrak{L}[C] = \int_0^{\infty} C e^{-pt} dt = -\frac{C}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty}$$

sau

$$\mathfrak{L}[C] = \frac{C}{p}. \quad (52.12)$$

În particular,

$$\mathfrak{L}[0] = 0. \quad (52.12')$$

Se observă că, în acest caz, integrala e divergentă pentru $\operatorname{Re}\{p\} \leq 0$. Expresia (52.12) definește însă univoc o funcțiune analitică de p în tot planul complex, cu excepția originii unde are un pol.

2. *Imaginea funcțiunii treaptă unitate $\gamma(t)$.* Deoarece pentru $t > 0$, funcțiunea treaptă (51.1), e constantă de valoare unitate,

$$\mathfrak{L}[\gamma(t)] = \int_0^{\infty} \gamma(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \quad (52.13)$$

Imaginea unei exponențiale. Pentru funcțiunea exponențială $e^{\alpha t}$ se obține :

$$\mathfrak{L}[e^{\alpha t}] = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-pt} dt = -\frac{1}{\alpha - p} e^{(\alpha - p)t} \Big|_0^{\infty}$$

Considerind $\operatorname{Re}\{p\} > \alpha$, se obține imaginea căutată :

$$\mathfrak{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{p - \alpha} \quad (52.14)$$

și, în acest caz, integrala e divergentă pentru $\operatorname{Re}\{p\} \leq \alpha$, dar expresia (52.14) definește univoc o funcțiune analitică de p în întreg planul complex, cu excepția punctului $p = \alpha$, unde are un pol.

4. *Imaginile funcțiunilor $\sin \omega t$, $\cos \omega t$, $\operatorname{ch} \omega t$, $\operatorname{sh} \omega t$* se obțin simplu, exprimind aceste funcțiuni prin funcțiuni exponențiale. De exemplu,

$$\mathfrak{L}[\sin \omega t] = \int_0^{\infty} \sin \omega t e^{-pt} dt = \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} [e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}] e^{-pt} dt.$$

Calculînd integrala pentru $\operatorname{Re}\{p\} > 0$, rezultă imaginea :

$$\mathfrak{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}. \quad (52.15)$$

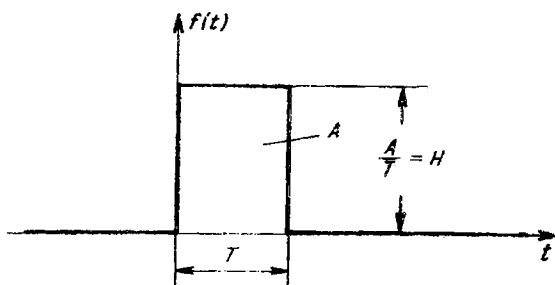


Fig. 52.1

5. *Imaginea impulsiei dreptunghiulare finite, neretardate.* O impulsie dreptunghiulară finită neretardată (fig. 52.1) e definită de condițiile :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t \leq 0 \text{ și} \\ & \text{pentru } t > T, \\ \frac{A}{T} = H & \text{pentru } 0 < t \leq T \end{cases} \quad (52.16)$$

unde T e durata impulsiei, $H = \frac{A}{T}$ amplitudinea impulsiei, iar A inte-

grala ei. Se observă că impulsia dreptunghiulară finită se poate exprima cu ajutorul funcțiunii treaptă unitate $\gamma(t)$ sub forma :

$$H[\gamma(t) - \gamma(t-T)] = \frac{A}{T} [\gamma(t) - \gamma(t-T)]. \quad (52.16')$$

Imaginea acestei impulsii rezultă :

$$\mathcal{L}[H\gamma(t) - H\gamma(t-T)] = H \int_0^T e^{-pt} dt = H \frac{1 - e^{-pT}}{p} = A \frac{1 - e^{-pT}}{pT}. \quad (52.17)$$

Dacă integrala (aria) impulsiei dreptunghiulare e egală cu unitatea $A = 1$, se obține impulsia unitate finită (neretardată), de durată finită T și amplitudine $1/T$, notată $\delta_T(t)$

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} [\gamma(t) - \gamma(t-T)]. \quad (52.18)$$

Imaginea impulsiei unitate finite rezultă :

$$\mathcal{L}[\delta_T(t)] = \frac{1 - e^{-pT}}{pT} \quad (52.18')$$

6. *Imaginea impulsiei delta (Dirac).* În aplicații interesează adesea cazul limită idealizat al impulsiei dreptunghiulare, de durată ΔT extrem de scurtă, $\Delta T \rightarrow 0$ și infinit de înaltă ($H = \frac{1}{\Delta T} \rightarrow \infty$), având arie finită și egală cu unitatea (fig. 52.2). Acest caz limită definește o funcțiune improprie — numită și *impulsie delta* sau funcțiunea delta a lui Dirac sau funcțiunea *impulsie unitate*, notată $\delta(t)$ — cu care se poate opera corect, dacă se efectuează calculele cu impulsia unitate finită și se trece la limită numai în expresiile finale. Formal se scrie :

$$\delta(t) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \delta_{\Delta T}(t). \quad (52.19)$$

Imaginea rezultă din relația (52.18') prin aplicarea regulii lui L'Hôpital :

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \mathcal{L}[\delta_{\Delta T}(t)] = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-p\Delta T}}{p\Delta T} = 1. \quad (52.20)$$

În tabela 52.1 se indică imaginile unor funcțiuni de timp, care intervin frecvent în studiul circuitelor.

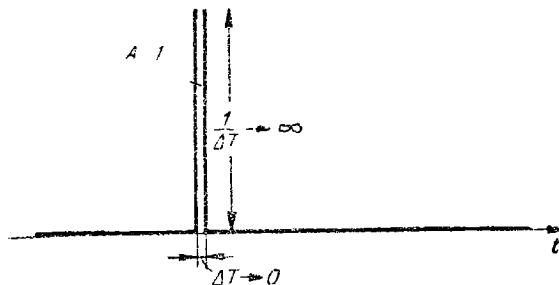


Fig. 52.2

Tabela 52.1.

	$\mathcal{L} [f(t)]$	$f(t)$
1	1	$\delta(t)$
2	$\frac{1}{p}$	1, $\gamma(t)$
3	$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}
4	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$t e^{-at}$
5	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$
6	$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{ab} + \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{b} e^{-bt} - \frac{1}{a} e^{-at} \right)$
7	$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{b-a} (b e^{-bt} - a e^{-at})$
8	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$
9	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
10	$\frac{a}{p^2 - a^2}$	$\text{sh } at$
11	$\frac{p}{p^2 - a^2}$	$\text{ch } at$
12	$\frac{1}{p^2 + \omega^2} (p \cos b - \omega \sin b)$	$\cos (\omega t + b)$
13	$\frac{1}{p^2 + \omega^2} (p \sin b + \omega \cos b)$	$\sin (\omega t + b)$
14	$\frac{\omega}{(p^2 + a^2) + \omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$
15	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$
16	$\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$t \sin \omega t$
17	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$t \cos \omega t$

Tabela 52.1. (continuare)

	$\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$
18	$\frac{1}{(p+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}$
19	e^{-pT}	$\delta(t-T)$
20	$\frac{1}{p} e^{-pT}$	$\gamma(t-T)$
21	$\frac{1}{p+a} e^{-pT}$	$\gamma(t-T) e^{-a(t-T)}$
22	$\frac{1}{p} (1 - e^{-pT})$	$T\delta_T(t) = \gamma(t) - \gamma(t-T)$

52.1.4. Corespondența operațiilor fundamentale prin transformarea Laplace. Operațiile fundamentale cu funcțiuni de timp care intervin în ecuațiile circuitelor sînt înmulțirea cu un scalar, adunarea, derivarea și integrarea. Prezentăm operațiile corespunzătoare cu imagini pe care le implică corespondența biunivocă stabilită de transformarea Laplace.

1. *Transformata Laplace a sumei a două (sau mai multe) funcțiuni de timp e egală cu suma transformatelor fiecăreia în parte.* În adevăr;

$$\int_0^{\infty} (f_1(t) + f_2(t))e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f_1(t)e^{-pt} dt + \int_0^{\infty} f_2(t)e^{-pt} dt$$

adică :

$$\mathcal{L}[f_1 + f_2] = \mathcal{L}[f_1] + \mathcal{L}[f_2], \quad (52.21)$$

în analogie cu (34.63').

2. *Transformata Laplace a produsului dintre o constantă λ și o funcțiune de timp e egală cu produsul dintre acea constantă și transformata funcțiunii.* În adevăr;

$$\int_0^{\infty} \lambda f(t)e^{-pt} dt = \lambda \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

adică :

$$\mathcal{L}[\lambda f] = \lambda \mathcal{L}[f], \quad (52.22)$$

în analogie cu (34.64'). Proprietățile (52.21) și (52.22) se prezintă strîns prin relația :

$$\mathcal{L}\left[\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k\right] = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathcal{L}[f_k], \quad (52.23)$$

care exprimă proprietatea de liniaritate a transformării Laplace (teorema liniarității).

3. Transformata Laplace a derivatei unei funcțiuni de timp e egală cu produsul imaginii funcțiunii prin p , mai puțin valoarea inițială a funcțiunii (teorema derivării). În adevăr, integrând prin părți, se obține :

$$\mathcal{L} \left[\frac{df}{dt} \right] = \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-pt} dt = f(t)e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} fe^{-pt} dt = p \int_0^{\infty} fe^{-pt} dt - f(0),$$

deoarece observînd condițiile (52.6) și (52.7), rezultă (cu $\text{Re}\{p\} = \sigma$)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)e^{-pt}| \geq A_0 \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-(\sigma - \sigma_a)t}| = A_0 \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\sigma - \sigma_a)t} = 0.$$

Așadar :

$$\mathcal{L} \left[\frac{df}{dt} \right] = p \mathcal{L}[f] - f(0). \quad (52.24)$$

În cazul unei derivate de ordinul (n) se obține, aplicînd de n ori regula de mai sus, relația :

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^n f}{dt^n} \right] = \mathcal{L}[f^{(n)}] = p^n \mathcal{L}[f] - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (52.25)$$

În cazul condițiilor inițiale „de repaus” $f(0) = 0$ și din (52.24) rezultă :

$$\mathcal{L} \left[\frac{df}{dt} \right] = p \mathcal{L}[f] \quad (52.26)$$

Adică, derivarea funcțiunii original în raport cu timpul se reprezintă prin înmulțirea imaginii cu variabila complexă p (în analogie cu 34.65').

4. Transformata Laplace a integralei în $(0, t)$ a unei funcțiuni de timp e egală cu produsul imaginii funcțiunii prin $\frac{1}{p}$ (teorema integrării). În adevăr, dacă

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau, \quad (52.27)$$

avem $\frac{dg}{dt} = f(t)$ și $g(0) = 0$. Cu (52.24) rezultă atunci :

$$\mathcal{L}[f] = \mathcal{L} \left[\frac{dg}{dt} \right] = p \mathcal{L}[g],$$

de unde cu relația (52.27)

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{p} \mathcal{L}[f]. \quad (52.28)$$

Integrarea funcțiunii original în timp de la 0 la t se reprezintă prin împărțirea imaginii cu variabila complexă p (în analogie cu 34.67').

Teoremele de mai sus arată că transformarea Laplace îndeplinește condițiile cerute de a asigura reprezentarea ecuațiilor integro-diferențiale ale circuitelor prin ecuații algebrice.

52.1.5. Alte teoreme privind transformarea Laplace

1. *Teorema retardării (a întârzierii)*: Dacă $\varphi(t)$ e o funcțiune original identic nulă pentru $t \leq 0$ ¹, atunci imaginea funcțiunii retardate (v. fig. 52.3) se obține din imaginea funcțiunii nerezardate $f(t)$, prin înmulțirea cu $e^{-p\tau}$:

$$\mathcal{L}[\varphi(t-\tau)] = e^{-p\tau} \mathcal{L}[\varphi(t)], \text{ cu } \varphi(t) = 0 \text{ dacă } t \leq 0. \quad (52.29)$$

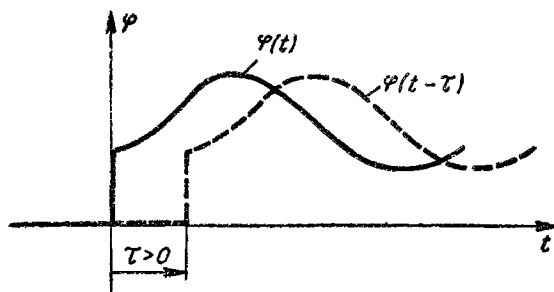


Fig. 52.3

În adevăr, deoarece $\varphi(t-\tau) = 0$ pentru $t \leq \tau$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\varphi(t-\tau)] &= \int_0^{\infty} \varphi(t-\tau) e^{-pt} dt = \int_{t=\tau}^{\infty} \varphi(t-\tau) e^{-p(t-\tau)} e^{-p\tau} dt = \\ &= e^{-p\tau} \int_{\xi=0}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-p\xi} d\xi = e^{-p\tau} \mathcal{L}[\varphi(t)]. \end{aligned}$$

2. *Teorema deplasării*: Dacă $F(p)$ e o imagine, atunci funcțiunea $F(p+\lambda)$ e imaginea produsului dintre originalul lui $F(p)$ și $e^{-\lambda t}$

$$\mathcal{L}[e^{-\lambda t} f(t)] = F(p+\lambda) \text{ dacă } \mathcal{L}(f) = F(p). \quad (52.30)$$

În adevăr

$$\mathcal{L}[e^{-\lambda t} f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p+\lambda)t} dt = F(p+\lambda),$$

dacă

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = F(p).$$

3. *Teorema lui Borel (a produsului, a înfășurării, a convoluției)*: Produsul imaginilor $F_1(p)$ și $F_2(p)$ a două funcții $f_1(t)$ și $f_2(t)$ e imaginea funcțiunii

$$f(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau, \quad (52.31)$$

¹ O astfel de funcțiune de timp se obține din orice funcțiune $f(t)$ dată în $-\infty < t < \infty$ prin înmulțire cu funcțiunea treaptă unitate $\gamma(t)$, (v. rel. 51.1).

adică

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] = \mathcal{L}[f_1] \cdot \mathcal{L}[f_2] = F_1(p) \cdot F_2(p)^1 \quad (52.32)$$

4. *Teorema asemănării*: Schimbarea variabilei t cu at corespunde împărțirii variabilei p și a întregii imagini cu a :

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \quad (52.33)$$

52.2. Determinarea funcțiunii original corespunzătoare unei transformate Laplace date

52.2.1. Metode de inversiune. Determinarea funcțiunii original corespunzătoare unei transformate Laplace date se mai numește inversiunea transformării Laplace. Principalele metode de inversiune, în ordinea utilizării lor în aplicații, sînt următoarele:

1. *Folosirea tabelor de transformări.* Datorită caracterului biunivoc al transformării, toate funcțiunile original identice pentru $t \geq 0$ au aceeași imagine și, reciproc, toate funcțiunile cu aceeași imagine sînt identice pentru $t \geq 0$. O primă posibilitate de determinare a funcțiunilor original consistă în folosirea unor tabele de corespondențe, care conțin imaginile calculate ale unui mare număr de funcțiuni original (cum e, în particular, tabela 52.1). Folosirea tabelelor se completează cu utilizarea teoremelor prezentate în paragraful 52.1.3. și 52.1.4.

2. *Teoremele dezvoltării ale lui Heaviside.* În cazul cînd funcțiunea imagine e raportul a două polinoame (în variabila p), din care numărătorul are un grad mai mic, se descompune această imagine în fracții simple (v. mai jos par. 52.2.2).

3. *Formula de inversiune Mellin-Fourier* (numită și formula Riemann-Mellin). În cazul general, funcțiunea original $f(t)$, cu $t \geq 0$, care are ca imagine o funcțiune $F(p)$ dată, analitică în semiplanul $\text{Re}\{p\} \geq \sigma_0$, este

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad (52.34)$$

integrarea făcîndu-se de-a lungul dreptei $\text{Re}\{p\} = \sigma_0$, care lasă la stînga ei² toate singularitățile funcțiunii imagine.

52.2.2. Teorema dezvoltării (prima formă). Considerăm cazul în care imaginea e raportul a două polinoame prime între ele, gradul polinomului de la numitor fiind mai mare decît gradul polinomului de la numărător și polinomul

¹ Pentru demonstrație a se consulta M. I. Kontorovici, lucrarea citată.

² Pentru demonstrație și indicații de utilizare se poate consulta M. I. Kontorovici, lucrarea citată.

de la numitor avînd n rădăcini (zerouri) simple p_k , evident diferite de cele ale polinomului de la numărător :

$$F(p) = \frac{P_1(p)}{P_2(p)} \quad (52.35)$$

(prin împărțire, raportul a două polinoame oarecare se poate aduce la această formă după separarea unui termen aditiv : polinomul-cît).

În acest caz, funcțiunea imagine se poate descompune într-o sumă de fracții raționale :

$$F(p) = \frac{P_1(p)}{P_2(p)} = \frac{C_1}{p-p_1} + \frac{C_2}{p-p_2} + \dots + \frac{C_n}{p-p_n}.$$

Pentru a calcula coeficienții C_k ai acestei descompuneri, se formează produsul $(p-p_k) \frac{P_1(p)}{P_2(p)}$ și se calculează limita acestui produs cînd p tinde către p_k , aplicînd regula lui L'Hôpital. Se obține :

$$\lim_{p \rightarrow p_k} \left[(p-p_k) \frac{P_1(p)}{P_2(p)} \right] = P_1(p_k) \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{p-p_k}{P_2(p)} = P_1(p_k) \frac{1}{P_2'(p_k)} = C_k.$$

Introducînd aceste valori ale coeficienților C_k în descompunerea în fracții raționale, rezultă relația :

$$F(p) = \sum_{k=1}^n \frac{P_1(p_k)}{P_2'(p_k)} \frac{1}{p-p_k} = \sum_{k=1}^n \frac{P_1(p_k)}{P_2'(p_k)} \mathcal{L}[e^{p_k t}],$$

în care am notat :

$$P_2'(p_k) = \left(\frac{dP_2}{dp} \right)_{p=p_k}$$

și am folosit relația (52.14), cu $\alpha = p_k$. Aplicînd teorema liniarității, relația (52.23), se obține :

$$F(p) = \sum_{k=1}^n \mathcal{L} \left[\frac{P_1(p_k)}{P_2'(p_k)} e^{p_k t} \right] = \mathcal{L} \left[\sum_{k=1}^n \frac{P_1(p_k)}{P_2'(p_k)} e^{p_k t} \right]$$

sau

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{P_1(p_k)}{P_2'(p_k)} e^{p_k t} = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{P_1(p)}{P_2(p)} \right]. \quad (52.36)$$

Această relație se numește prima formă a teoremei dezvoltării (a lui Heaviside).

52.2.3. Teorema dezvoltării (a doua formă). Considerăm cazul particular în care polinomul $P_2(p)$ are o rădăcină nulă și deci se poate pune sub forma :

$$P_2(p) = p P_3(p),$$

în care rădăcinile polinomului P_3 sînt p_k , cu $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Pentru găsirea funcțiunii original, aplicăm prima formă a teoremei (52.36), observind că $P'_2(p) = p P'_3(p) + P_3(p)$; $P'_2(0) = P_3(0)$ și $P'_2(p_k) = p_k P'_3(p_k)$, deoarece $P_3(p_k) = 0$, cu $k < n$.

Cu aceste valori relația (52.36) devine :

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{P_1(p_k)}{P'_2(p_k)} e^{p_k t} = \frac{P_1(0)}{P_3(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P_1(p_k)}{p_k P'_3(p_k)} e^{p_k t} = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{P_1(p)}{p P_3(p)} \right]. \quad (52.37)$$

Această relație se numește a doua formă a teoremei dezvoltării (a lui Heaviside).

52.3. Aplicarea transformării Laplace la studiul unor regimuri tranzitorii

Din egalitatea celor doi membri ai unei ecuații integro-diferențiale rezultă egalitatea imaginilor acestor membri. Pentru ecuații integro-diferențiale liniare și cu coeficienți constanți, această ultimă egalitate, pe baza teoremelor liniarității, derivării și integrării, se exprimă sub forma unei relații liniare între imaginile funcțiunilor care intervin în ecuația integro-diferențială dată. Ca urmare, determinarea imaginilor funcțiunilor necunoscute se poate face prin rezolvarea unor ecuații algebrice. După aflarea imaginilor funcțiilor necunoscute, cu ajutorul metodelor expuse în paragraful 52.2 se determină funcțiunile de timp corespunzătoare acestor imagini; aceste funcțiuni de timp reprezintă soluțiile căutate, care satisfac atât ecuațiile integro-diferențiale cât și condițiile inițiale date.

Exemple : 1. Se consideră circuitul inductiv din fig. 52.4, a, care pentru $t < 0$ e parcurs de curentul continuu $I_0 = \frac{U_0}{2R}$. În momentul $t = 0$ se închide întreruptorul care scurtcircuitază elementele R, L. Ecuația acestui circuit pentru $t > 0$ este :

$$Ri + L \frac{di}{dt} = 0.$$

Aplicăm transformarea Laplace acestei ecuații, folosind teorema liniarității (52.23) și a derivării (52.24) :

$$\mathcal{L} \left[Ri + L \frac{di}{dt} \right] = R\mathcal{L}[i] + L(p\mathcal{L}[i] - i(0)) \quad (52.38)$$

și cu $i(0) = I_0 = U_0/2R$ se obține ecuația operațională (între imagini) a circuitului :

$$(R + pL) \mathcal{L}[i] - L i(0) = \frac{L}{2R} U_0.$$

Din această ecuație rezultă imaginea curentului (funcția necunoscută) :

$$\mathcal{L}[i] = \frac{\frac{L}{2R} U_0}{R + pL} = \frac{U_0}{2R} \cdot \frac{1}{R + pL}. \quad (52.39)$$

Din tabela de transformări (52.1 poz. 3) și cu (52.22) rezultă curentul instantaneu :

$$i(t) = \frac{U_0}{2R} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{L}{R}, \quad (52.40)$$

reprezentat grafic în figura 52.4, *b* (de observat continuitatea curentului pentru $t = 0$).

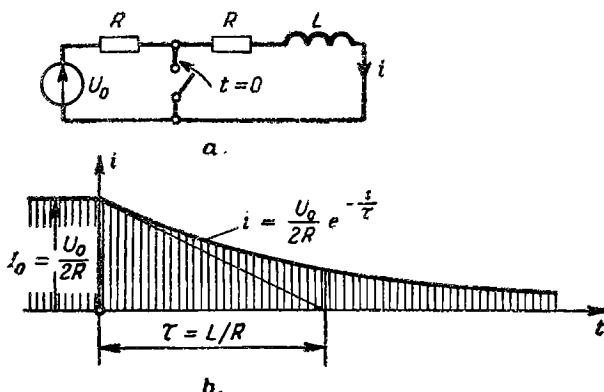


Fig. 52.4

2. Se consideră circuitul capacitiv din figura 52.5, *a*, al cărui condensator e încărcat cu sarcina Q_0 , pentru $t \leq 0$. În momentul $t = 0$ se închide întreruptorul, aplicându-se circuitului tensiunea

$$u = U_0 e^{-\frac{t}{\tau_0}} \quad \text{cu } U_0 > Q_0/C, \quad (52.41)$$

reprezentată în figura 52.5, *b*. Ecuația circuitului pentru $t > 0$ este

$$u = Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i \, dt + \frac{q(0)}{C} \quad (\text{cu } q(0) = Q_0). \quad (52.42)$$

Aplicăm transformarea Laplace acestei ecuații, folosind teorema liniarității (52.23) și a integrării (52.28). Se obține ecuația operațională (între imagini) a circuitului :

$$\mathcal{L}(u) - \mathcal{L}\left(\frac{Q_0}{C}\right) = \left(R + \frac{1}{Cp}\right) \mathcal{L}(i),$$

în care imaginile termenilor din membrul stâng se pot calcula cu relațiile, (52.41), (52.12), (52.14) și (52.22). Se obține astfel imaginea curentului (funcția necunoscută) în care am notat $\tau = R \cdot C$

$$\mathcal{L}(i) = \frac{U_0}{R} \frac{p}{\left(p + \frac{1}{\tau_0}\right)\left(p + \frac{1}{\tau}\right)} - \frac{Q_0}{\tau \left(p + \frac{1}{\tau}\right)}. \quad (52.43)$$

Folosind teorema liniarității (52.23) și prima formă a teoremei dezvoltării (52.36) — (sau poz. 3 și 7 din tabela de transformări 52.1), se obține valoarea instantanee a curentului:

$$\begin{aligned}
 i(t) &= \frac{U_0}{R} \frac{1}{\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau}} \left[\frac{1}{\tau_0} e^{-\frac{t}{\tau_0}} - \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right] - \frac{Q_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau_0}} = \\
 &= \frac{U_0}{R \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau}\right)} e^{-\frac{t}{\tau_0}} - \left(\frac{U_0}{R \left(\frac{\tau}{\tau_0} - 1\right)} + \frac{Q_0}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (52.44)
 \end{aligned}$$

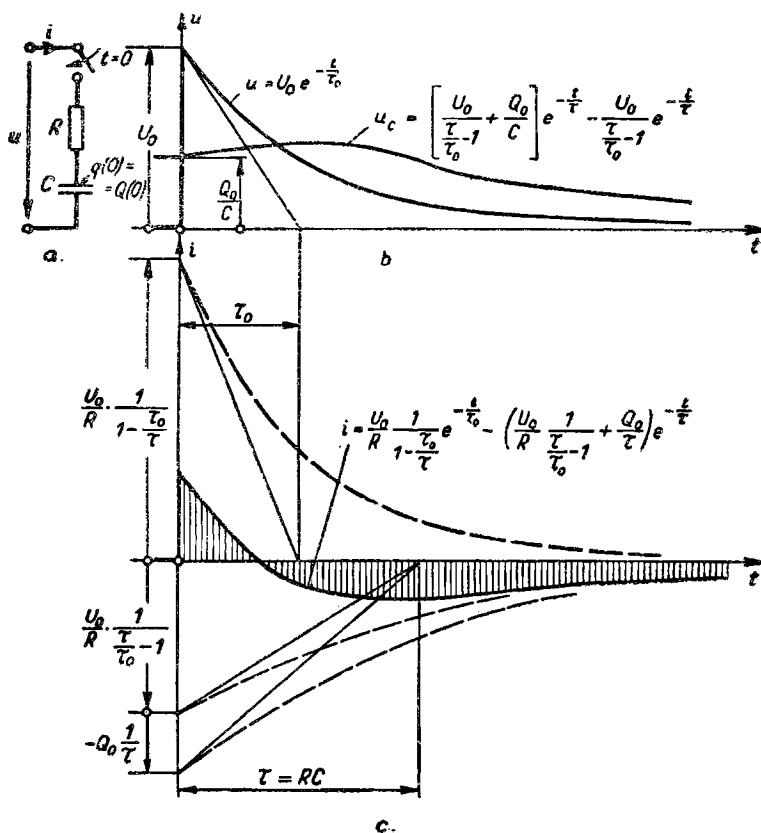


Fig. 52.5

În figura 52.5,c e reprezentată grafic evoluția curentului, iar în figura 52.5,b, evoluția tensiunii $u_c = u - Ri$ de la bornele condensatorului (de observat discontinuitatea curentului i și continuitatea tensiunii u_c pentru $t = 0$).

52.4. Forma operațională a teoremelor lui Kirchhoff

În aplicații, calculul se sistematizează scriind direct ecuațiile operaționale care exprimă relațiile dintre imaginile curenților și tensiunilor. În acest scop, în electrotehnică se utilizează formele operaționale ale teoremelor lui Kirchhoff.

52.4.1. Forma operațională a primei teoreme a lui Kirchhoff. Aplicând transformarea Laplace celor doi membri ai primei teoreme a lui Kirchhoff în valori instantanee (36.5), scrisă pentru un nod (b)

$$\sum_{k \in (b)} i_k = 0, \quad (52.45)$$

se obține

$$\mathcal{L}[\sum_{k \in (b)} i_k] = \mathcal{L}[0] = 0.$$

Conform teoremei liniarității (52.23) rezultă :

$$\sum_{k \in (b)} \mathcal{L}[i_k] = 0. \quad (52.46)$$

Aceasta e forma operațională a primei teoreme a lui Kirchhoff : *suma algebrică a imaginilor curenților care ies dintr-un nod (b) e nulă*. Notînd imaginile curenților :

$$\mathcal{L}[i_k] = I_k(p),$$

forma operațională a primei teoreme a lui Kirchhoff se scrie :

$$\boxed{\sum_{k \in (b)} I_k(p) = 0}. \quad (52.47)$$

52.4.2. Forma operațională a celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff. Aplicînd transformarea Laplace celor doi membri ai celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff în valori instantanee (36.8), scrisă pentru un ochi (q) :

$$\sum_{m \in (q)} e_m = \sum_{m \in (q)} (u_{R_m} + u_{C_m} + u_{L_m}) \quad (52.48)$$

se obține cu relația (52.33)

$$\sum_{m \in (q)} \mathcal{L}[e_m] = \sum_{m \in (q)} [\mathcal{L}[u_{R_m}] + \mathcal{L}[u_{C_m}] + \mathcal{L}[u_{L_m}]]. \quad (52.49)$$

Căderile de tensiune se exprimă, în funcție de curenți, prin relațiile :

$$u_{R_m} = R_m i_m, \quad u_{C_m} = \frac{1}{C_m} \int_0^t i_m dt + \frac{q_m(0)}{C_m}, \quad u_{L_m} = \frac{d\Phi_m}{dt} = \sum_{s=1}^L L_{ms} \frac{di_s}{dt}. \quad (52.50)$$

Imaginea căderii de tensiune rezistive rezultă din relația (52.22) :

$$\mathcal{L}[u_{R_m}] = R_m \mathcal{L}[i_m]. \quad (52.51)$$

Imaginea căderii de tensiune capacitive rezultă din relația (52.22), (52.28) și (52.12) :

$$\mathcal{L}[u_{C_m}] = \frac{1}{pC_m} \mathcal{L}[i_m] + \frac{q_m(0)}{pC_m}, \quad (52.52)$$

unde $q_m(0)$ e valoarea inițială a sarcinii condensatorului din latura m . Imaginea căderii de tensiune inductive rezultă din relațiile (52.23) și (52.24):

$$\mathcal{E}[u_{L_m}] = p \mathcal{E}[\Phi_m] - \Phi_m(0) = \sum_{s=1}^L p L_{ms} \mathcal{E}[i_s] - \Phi_m(0), \quad (52.53)$$

unde cazul $m = s$ corespunde inductivității proprii $L_{mm} = L_m$, cazul $m \neq s$, inductivităților mutuale, iar $\Phi_m(0) = \sum_{s=1}^L L_{ms} i_s(0)$ e valoarea inițială a fluxului bobinei din latura m .

Observînd analogia formală cu forma complexă a ecuațiilor din cazul regimului permanent, mărimile:

$$Z_{R_m}(p) = R_m; \quad Z_{C_m}(p) = \frac{1}{pC_m}; \quad Z_{L_m}(p) = pL_m \quad (52.54)$$

se numesc impedanțele operaționale proprii ale elementelor de circuit considerate, iar

$$Z_{ms}(p) = pL_{ms} \quad (52.55)$$

impedanța operațională de cuplaj magnetic (mutuală) dintre bobinele m și s .

Înlocuind în relația (52.49) expresiile operaționale ale căderilor de tensiune și trecînd în membrul stîng termenii determinați de condițiile inițiale din (52.52) și (52.53), se obține relația:

$$\sum_{m \in (q)} \left[\mathcal{E}[e_m] + \Phi_m(0) - \frac{1}{pC_m} q_m(0) \right] = \sum_{m \in (q)} \left[\left(R_m + pL_m + \frac{1}{pC_m} \right) \mathcal{E}[i_m] + \sum_{s=1}^L pL_{ms} \mathcal{E}[i_s] \right]. \quad (52.56)$$

Cu relația (52.55) și notînd cu

$$Z_{mm}(p) = Z_m(p) = R_m + pL_m + \frac{1}{pC_m} \quad (52.57)$$

impedanța operațională proprie a laturii m se obține, pentru forma operațională a celei de a doua teoreme a lui Kirchhoff, expresia:

$$\sum_{m \in (q)} \left[\mathcal{E}[e_m] + \Phi_m(0) - \frac{q_m(0)}{pC_m} \right] = \sum_{m \in (q)} \left[Z_m(p) \mathcal{E}[i_m] + \sum_{s=1}^L Z_{ms}(p) \mathcal{E}[i_s] \right] \quad (52.58)$$

sau

$$\sum_{m \in (q)} \left[\mathcal{E}[e_m] + \Phi_m(0) - \frac{q_m(0)}{pC_m} \right] = \sum_{m \in (q)} \sum_{s=1}^L Z_{ms}(p) \mathcal{E}[i_s]. \quad (52.59)$$

Fiecare termen din membrul stîng se numește tensiune electromotoare operațională echivalentă a laturii considerate, se notează :

$$E_e(p) = \mathcal{L}[e_m] + \Phi_m(0) - \frac{q_m(0)}{pC_m} = E_m(p) + E_{m0}(p) \quad (52.60)$$

și cuprinde, pe lângă imaginea Laplace a t.e.m. instantanee $E_m(p)$ și t.e.m., operaționale echivalente condițiilor inițiale $E_{m0}(p)$, corespunzătoare valorilor inițiale ale fluxurilor bobinelor și sarcinilor condensatoarelor :

$$E_{m0}(p) = \Phi_m(0) - \frac{q_m(0)}{pC_m} \quad (52.61)$$

Aceste t.e.m. operaționale echivalente sînt nule în cazul condițiilor inițiale „de repaus“

$$\Phi_m(0)=0, \quad q_m(0)=0, \rightarrow E_{m0}(p)=0. \quad (52.62)$$

În figura 52.6 sînt reprezentate schemele echivalente operaționale ale elementelor ideale pasive de circuit, în care apar și surse fictive corespunzătoare t.e.m. operaționale echivalente condițiilor inițiale. Notînd imaginile curenților $\mathcal{L}[i_s] = I_s(p)$, cu (52.60), forma operațională a teoremei a doua a lui Kirchhoff devine :

$$\sum_{m \in (q)} E_{e_m}(p) = \sum_{m \in (q)} \sum_{s=1}^L Z_{ms}(p) I_s(p) \quad (s = 1, 2, \dots, m, \dots, L) \quad (52.63)$$

și se enunță : Pentru orice ochi (q), suma algebrică a tensiunilor electromotoare operaționale (inclusiv cele echivalente condițiilor inițiale) e egală cu suma algebrică a căderilor de tensiune operaționale.

Din cele de mai sus se observă că, după introducerea în serie cu fiecare bobină și fiecare condensator a surselor fictive cu t.e.m. operaționale echivalente condițiilor inițiale, se realizează o analogie formală completă cu forma complexă a ecuațiilor lui Kirchhoff (36.22) de la regimul permanent sinusoidal. Corespondența dintre mărimile și relațiile utilizate în cele două metode este redată în tabela 52.2

Ca urmare a acestei corespondențe, metodele și teoremele cunoscute din cadrul studiului în complex al circuitelor în regim sinusoidal se pot extinde,

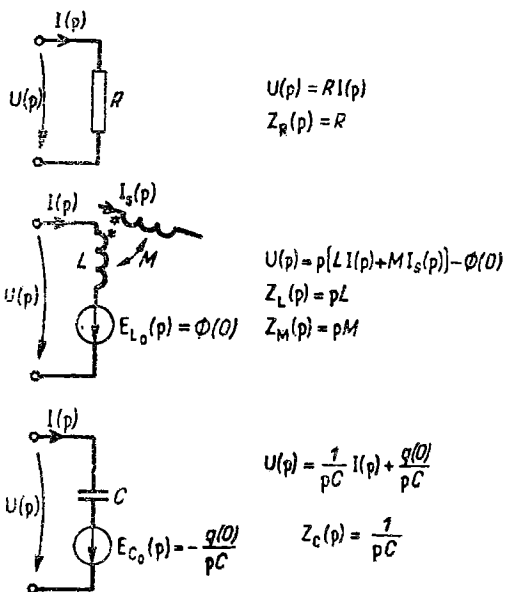


Fig. 52.6

Tabela 52.2.

Mărimea sau relația	Reprezentarea în complex	Metoda operațională
Mărimea instantanee	$i = I \sqrt{2} \sin (\omega t + \gamma)$	$i(t)$, funcțiune original.
Imaginea	$\underline{I} = I e^{j\gamma}$	$\mathcal{L}[i] = I(p) = \int_0^{\infty} i(t) e^{-pt} dt$
Impedanța — rezistorului — bobinei — de cuplaj magnetic ($m \neq s$) — condensatorului	$\underline{Z} = Z(j\omega)$ R $j\omega L$ $j\omega L_m$ $\frac{1}{j\omega C}$	$Z(p)$ R pL pL_m $\frac{1}{pC}$
Prima teoremă a lui Kirchhoff	$\Sigma \underline{I} = 0$	$\Sigma I(p) = 0$
A doua teoremă a lui Kirchhoff	$\Sigma E = \Sigma \Sigma \underline{Z} \underline{I}$	$\Sigma E(p) = \Sigma \Sigma Z(p) I(p)$

formal neschimbate, și la studiul regimurilor tranzitorii cu metoda operațională : metoda curenților de ochiuri, metoda potențialelor de noduri, teoremele impedanțelor echivalente, teoremele generatoarelor echivalente, teoremele transfigurărilor etc. Singura precauție deosebită se referă la luarea în considerare a condițiilor inițiale prin tensiunile electromotoare operaționale echivalente lor. Dacă însă se studiază rețele în condiții inițiale „de repaus” (rel. 52.62), *toate relațiile liniare stabilite în studiul rețelor de curent alternativ sinusoidal între reprezentările în complex ale tensiunilor și curenților rămân valabile între imaginile Laplace ale tensiunilor și curenților, dacă se înlocuiesc impedanțele complexe prin impedanțe operaționale.*

52.5. Metoda operațională de rezolvare a circuitelor în regim tranzitoriu

52.5.1. Metoda generală. Ținând seama de cele stabilite în paragraful precedent, metoda de rezolvare operațională a circuitelor electrice liniare cuprinde următoarele etape :

a) Se formează schema echivalentă operațională a circuitului cu sursele fictive corespunzătoare condițiilor inițiale (52.61) și sursele date. În schemă, mărimile se notează de obicei cu simbolurile operaționale.

b) Se aplică forma operațională (52.47) și (52.63) a ecuațiilor lui Kirchhoff, obținându-se ecuațiile operaționale ale circuitului și se rezolvă aceste ecuații în raport cu imaginile funcțiunilor necunoscute.

c) Se calculează imaginile funcțiilor de timp date (de obicei tensiunile electromotoare) cu transformarea directă (52.9), cu teoremele din paragrafele 52.1.3 și 52.1.4, sau cu tabelele de transformări; se introduc aceste imagini în expresiile imaginilor funcțiilor necunoscute, obținându-se astfel, explicit, ca funcțiuni de variabila p aceste imagini.

d) Se determină funcțiile de timp necunoscute cu metodele de inversiune (par. 52.2.1), căutând funcțiunile originale corespunzătoare imaginilor determinate la sfârșitul etapei precedente.

52.5.2. Aplicație la scrierea ecuațiilor operaționale pentru o rețea cu anumite condiții inițiale date. Considerăm rețeaua din fig. 52.7, a, în care la $t < 0$, întreruptorul K fiind deschis, se stabilește un regim permanent sub acțiunea sursei de tensiune electromotoare constantă $e_1 = E_0$. Curenții continui stabiliți în rețea sînt în acest caz:

$$I_1 = I_2 = I_0 = \frac{E_0}{R_1 + R_2}, \quad I_3 = I_4 = 0. \quad (52.64)$$

Presupunind că pentru $t < 0$ condensatorul C era încărcat (în circuit deschis) cu sarcina Q_0 și că în momentul $t = 0$ se închide întreruptorul K (fig. 52.7, b), se cere să se scrie ecuațiile operaționale necesare determinării imaginilor $I_1(p)$, $I_2(p)$, $I_3(p)$, $I_4(p)$, ale tuturor curenților din rețea. Conform relației (52.61) și a condițiilor inițiale arătate, în schema echivalentă operațională apar următoarele t.e.m. operaționale echivalente acestor condiții inițiale

$$E_{30}(p) = \Phi_3(0) = L_3 i_3(0) + L_{23} i_2(0) = L_2 I_0$$

$$E_{30}(p) = \Phi_3(0) = L_3 i_3(0) + L_{23} i_2(0) = \\ = L_{23} I_0 = L_{23} I_0$$

$$E_{40}(p) = -\frac{q_1(0)}{pC_4} = -\frac{Q_0}{pC_4}. \quad (52.65)$$

Deoarece imaginea sursei date din latura 1 este (cu relația 52.12):

$$E_1(p) = \mathcal{L}[e_1] = \mathcal{L}[E_0] = \frac{E_0}{p}, \quad (52.66)$$

se obține schema operațională din figura 52.7, c, cu ecuațiile de mai jos scrise pentru nodul (1), respectiv pentru ochiurile (1), (2), (3):

$$\begin{aligned} I_1(p) - I_2(p) - I_4(p) &= 0 \\ \frac{E_0}{p} - \frac{Q_0}{pC_4} &= R_1 I_1(p) + \frac{1}{pC_4} I_4(p) \\ L_2 I_0 + \frac{Q_0}{pC_4} &= -\frac{1}{pC_4} I_4(p) + \\ + (R_2 + pL_2) I_2(p) + pL_{23} I_3(p) \\ L_{23} I_0 &= (R_3 + pL_3) I_3(p) + pL_{23} I_2(p). \end{aligned} \quad (52.67)$$

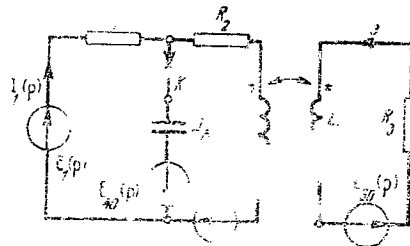
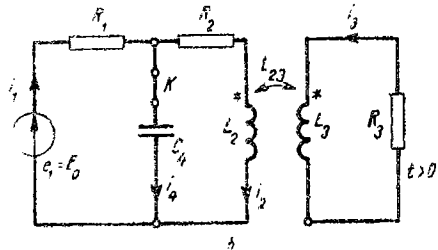
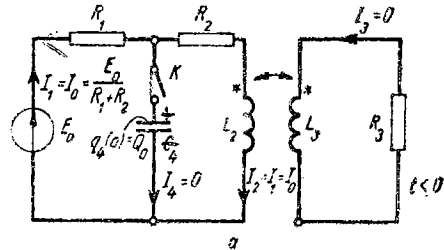


Fig. 52.7

Dacă se rezolvă aceste ecuații în raport cu $I_1(p)$, $I_2(p)$, $I_3(p)$, $I_4(p)$, se pot deduce valorile instan-
tane ale curenților :

$$i_1(t) = \mathcal{L}^{-1}(I_1(p)), \quad i_2(t) = \mathcal{L}^{-1}(I_2(p)), \quad i_3(t) = \mathcal{L}^{-1}(I_3(p)), \quad i_4(t) = \mathcal{L}^{-1}(I_4(p)) \quad (52.68)$$

cu teorema dezvoltării.

52.5.3. Aplicație la utilizarea formei operaționale a teoremei generatorului echivalent (Thevenin.) Considerăm un transformator, cu dispersiune magnetică neglijabilă ($L_{12} = \sqrt{L_1 L_2}$)

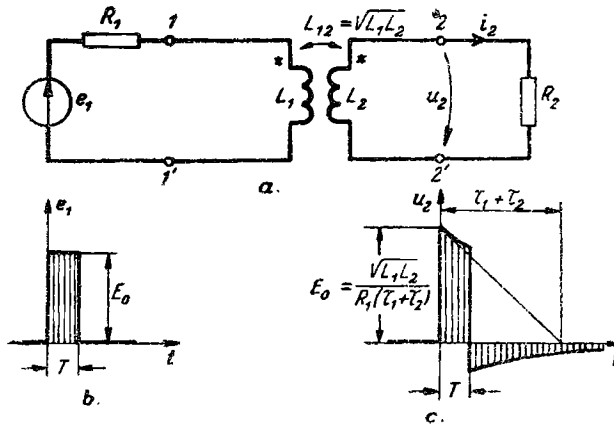


Fig. 52.8

și cu rezistențe neglijabile ale înfășurărilor (fig. 52.8, a), alimentat la bornele de intrare 1, 1' cu un generator de rezistență interioară R_1 , care produce impulsii dreptunghiulare de tensiune de forma (fig. 52.8, b) :

$$e_1 = E_0[\gamma(t) - \gamma(t-T)] = E_0 T \delta_T(t). \quad (52.69)$$

Se cere tensiunea de ieșire $u_2 = R_2 i_2$ la bornele rezistenței de sarcină R_2 .

În baza analogiei prezentate în paragraful 52.4.3 se poate aplica în acest caz teorema generatorului de tensiune echivalent sub forma

$$I_2(p) = \frac{U_{20}(p)}{R_2 + Z_{22}'(p)} \text{ sau } U_2(p) = R_2 I_2(p) = R_2 \frac{U_{20}(p)}{R_2 + Z_{22}'(p)}, \quad (52.70)$$

în care $U_{20}(p)$ e imaginea Laplace a tensiunii secundare de mers în gol, iar $Z_{22}'(p)$ e impedanța operațională echivalentă a rețelei (cu bornele 2, 2') pasivizate. Deoarece în complex am avea (v. și calculul analog pentru rel. 38.21)

$$U_{20} = E_1 \frac{j \omega L_{12}}{R_1 + j \omega L_1}; \quad Z_{22}' = j \omega L_2 + \frac{(j \omega L_{12})^2}{R_1 + j \omega L_1},$$

rezultă

$$U_2(p) = E_1(p) \frac{p L_{12}}{R_1 + p L_1}; \quad Z_{22}'(p) = p L_2 - \frac{p^2 L_{12}^2}{R_1 + p L_1}. \quad (52.71)$$

Cu relația (52.70) se obține (ținând seama că $L_{12}^2 = L_1 L_2$)

$$U_2(p) = R_2 E_1(p) \frac{p L_{12}}{(R_2 + p L_2)(R_1 + p L_1) - p^2 L_{12}^2} = E_1(p) \frac{\frac{\sqrt{L_1 L_2}}{R_1(\tau_1 + \tau_2)}}{p + \frac{1}{\tau_1 + \tau_2}}, \quad (52.72)$$

unde am notat

$$\tau_1 = \frac{L_1}{R_1}, \quad \tau_2 = \frac{L_2}{R_2}. \quad (52.73)$$

Imagina tensiunii electromotoare (52.69) este (v. rel. 52.17) :

$$E_1(p) = \frac{E_0}{p} (1 - e^{-pT}) \quad (52.74)$$

și imaginea explicită a tensiunii de ieșire rezultă :

$$U_2(p) = E_0 \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{R_1(\tau_1 + \tau_2)} \frac{1 - e^{-pT}}{p + \frac{1}{\tau_1 + \tau_2}}. \quad (52.75)$$

Cu teorema liniarității (52.23), a retardării (52.29) și cu (52.14) rezultă funcția original zentată în fig. 52.8, c) :

$$u_2(t) = E_0 \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{R_1(\tau_1 + \tau_2)} \left[e^{-\frac{t}{\tau_1 + \tau_2}} - \gamma(t-T) e^{-\frac{t-T}{\tau_1 + \tau_2}} \right] \quad (52.76)$$

52.5.4. Studiul regimului tranzitoriu prin separarea componentei de regim permanent. În numeroase probleme regimul permanent se poate determina fără dificultăți cu metodele cunoscute și e preferabil să se utilizeze calculul operațional numai pentru studiul regimului liber, cu condițiile inițiale corespunzătoare acestui regim. Ecuațiile operaționale ale re-

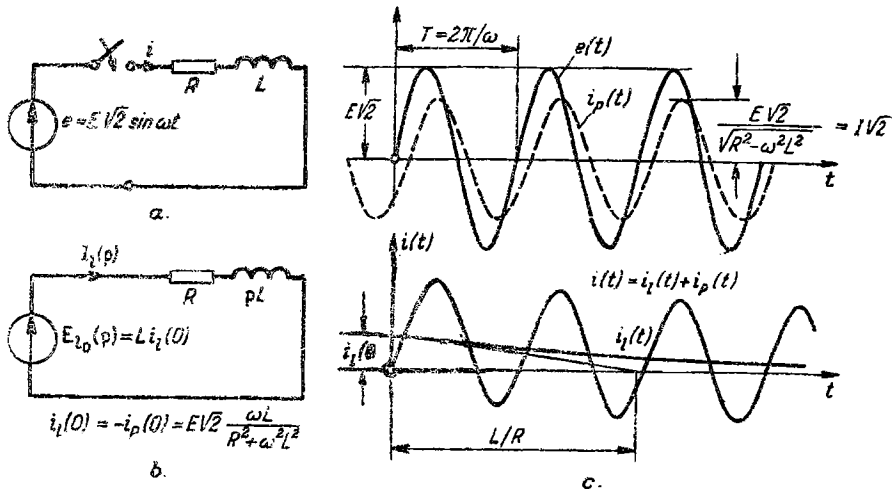


Fig. 52.9

gimului liber sînt ecuațiile obținute prin anularea imaginilor t.e.m. ale generatoarelor și prin introducerea t.e.m. operaționale echivalente condițiilor inițiale pentru componentele de regim liber ale curenților.

Studiem, ca exemplu, un circuit R, L (fig. 52.9, a), căruia în momentul $t = 0$ i se aplică tensiunea sinusoidală

$$e = E\sqrt{2} \sin \omega t \quad (52.77)$$

înainte de aplicarea tensiunii circuitul fiind în repaus: $i(0) = 0$. Deoarece, în general $i(t) = i_p(t) + i_l(t)$, unde

$$i_p(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi) \text{ cu } \sin \varphi = \frac{L \omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}. \quad (52.78)$$

e curenul de regim permanent, rezultă pentru curenul de regim liber valoarea inițială:

$$i_l(0) = i(0) - i_p(0) = -i_p(0) = \frac{E \sqrt{2} \sin \varphi}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}. \quad (52.79)$$

Schema operațională echivalentă pentru curenul de regim liber e reprezentată în figura 52.9, b și e obținută din schema inițială a circuitului, pasivizînd-o și introducînd apoi o sursă fictivă cu t.e.m. operațională echivalentă $E_{l0}(p) = L i_l(0)$ corespunzătoare condiției inițiale (52.79). Rezultă imaginea curenului de regim liber:

$$I_l(p) = \frac{E_{l0}(p)}{R + pL} = \frac{E \sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \sin \varphi \frac{1}{p + \frac{L}{R}} = L [i_l]. \quad (52.80)$$

Cu relația (52.14) se obține valoarea instantanee a acestui curen

$$i_l(t) = \frac{E \sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \sin \varphi e^{-\frac{t}{R}} \quad (52.81)$$

Curenul instantaneu total are deci expresia:

$$i(t) = i_p(t) + i_l(t) = \frac{E \sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \left[\sin(\omega t - \varphi) + \sin \varphi e^{-\frac{t}{R}} \right] \quad (52.82)$$

și e reprezentat în figura 52.9, c. De subliniat că, în regim tranzitoriu, curba curenului nu e simetrică față de axa absciselor din cauza componentei aperiodice de regim liber.

Observație: Dacă s-ar fi aplicat metoda operațională ecuației care determină curenul total, s-ar fi ajuns la același rezultat cu un calcul mai lung, din cauza formei mai complicate pe care ar fi avut-o imaginea curenului total, ca urmare a expresiei mai complicate a imaginii t.e.m. sinusoidale a sursei.

53. || LINII LUNGI ÎN REGIM TRANZITORIU

Am studiat pînă acum circuite electrice filiforme, cu parametri concentrați (v. par. 31.3), adică acele circuite care admit scheme echivalente, constituite din elemente ideale de circuit (r , L , C) strict localizate. Din punctul de vedere al ecuațiilor cîmpului electromagnetic, acest mod de prezentare reprezintă o aproximație cu atît mai bună, cu cît viteza de variație a stărilor (și deci frecvența) e mai mică și cu cît dielectricul care mărginește conductoarele e mai bun izolant.

În adevăr, aproximația parametrilor concentrați caracterizează în primul rînd regimul cuasistaționar (v. cap. 31), adică regimul în care nu se ia în considerare curentul de deplasare (v. par. 31.1), decît în dielectricul condensatoarelor. Ca urmare, valoarea intensității curentului electric de conducție se conservă în lungul unui conductor neramificat și perfect izolat (teorema continuității) — ceea ce corespunde neglijării vitezei de variație a sarcinii electrice q , localizate pe suprafața conductorului, și deci a intensității curentului de deplasare printr-o suprafață ce înconjoară conductorul

$$i_D = \frac{d\psi}{dt} = \iint_{\Sigma} \frac{\partial D}{\partial t} dA = \frac{dq}{dt}$$

În al doilea rînd, aproximația parametrilor concentrați e asociată neglijării pierderilor de curent de conducție prin mediul dielectric — niciodată perfect izolant — care înconjoară conductorul. În limitele acestor aproximații, în cazul unei linii cu două conductoare paralele (fig. 53.1), curentul are același sens și aceeași intensitate i prin toate secțiunile transversale ale fiecăruia dintre conductoare. Ca urmare, tensiunea electrică în lungul fiecăruia dintre conductoare e proporțională cu acest curent, ceea ce permite definirea unei rezistențe echivalente, concentrate, a celor două conductoare. De asemenea, cîmpul magnetic H e în fiecare punct proporțional cu intensitatea i a curentului; ca urmare, și fluxul magnetic prin suprafața sprijinită pe conductoare e proporțional cu acest curent, ceea ce permite definirea unei inductivități echivalente, concentrate, a întregii linii. De aceea am studiat în paragraful 35.6 linia de curent alternativ cu schema echivalentă din figura 35.14, *b*.

În numeroase aplicații întîlnite în tehnică, aproximația parametrilor concentrați nu e însă valabilă.

În electroenergetică, respectiv în telecomunicațiile pe fire, transmisiunea la distanțe mari a energiei electromagnetice, respectiv a semnalelor electromagnetice, se face cu ajutorul unor sisteme de conductoare filiforme paralele, cu lungimea foarte mare față de distanța dintre ele, numite *linii electrice lungi*.

În cele ce urmează vom considera astfel de linii *bifilare* (cu două conductoare) și *omogene* (cu proprietăți de material și configurație geometrică invariabile în lungul lor). La frecvențe nu prea joase și la lungimi suficient de mari, curentul

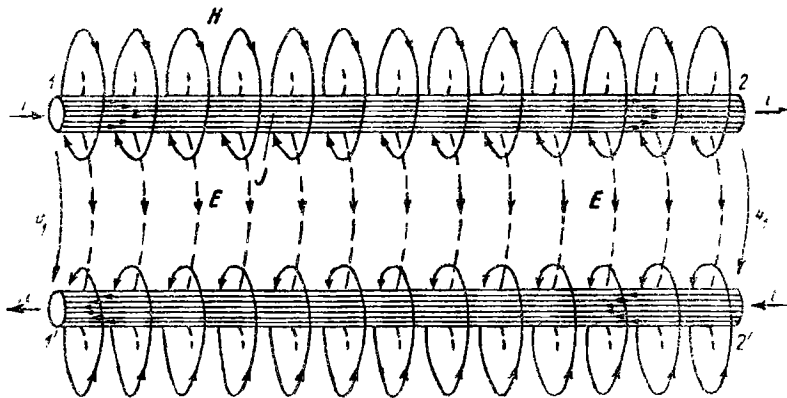


Fig. 53.1

de deplasare și curentul de pierderi prin dielectric, care, în condiții în rest egale, sînt proporționali cu suprafața conductoarelor și deci cu lungimea liniei, nu mai pot fi neglijăți. Ca urmare, curentul de conducție nu mai are aceeași intensitate în lungul fiecăruia dintre conductoare.

Teorema continuității nu se mai poate utiliza acum sub forma (31.10). Înlocuind în legea IX a conservării sarcinii (v. par. 31.1) valoarea sarcinii în funcțiune de fluxul electric (legea II), se observă că, în cazul general, se anulează fluxul prin suprafețe închise al vectorului

$$\mathbf{J}_t = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

adică

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{J}_t \cdot d\mathbf{A} = \iint_{\Sigma} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{A} = 0.$$

Vectorul $\mathbf{J}_t$, numit *densitatea curentului total*, e egal cu suma dintre densitatea curentului de conducție $\mathbf{J}$ și densitatea curentului de deplasare $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$.

Teorema continuității rămîne deci valabilă numai pentru curentul total și numai liniile vectorului $\mathbf{J}_t$ trebuie să fie linii (practic)¹ închise. În figura 53.2

¹ Condiția de anulare a fluxului printr-o suprafață închisă (și deci a divergenței) nu impune, de fapt, închiderea propriu-zisă a liniilor de cîmp, ci numai faptul că, urmărind suficient de mult o linie de cîmp, fără puncte la înfinit, se ajunge oricît de aproape de punctul de la care s-a plecat.

sînt schițate liniile de cîmp ale vectorilor J , E , H la propagarea unei unde armonice pe o linie electrică lungă. Se observă că, în acest caz, liniile de curent (total) se închid prin dielectricul de conductivitate σ și permitivitate ϵ , în care densi-

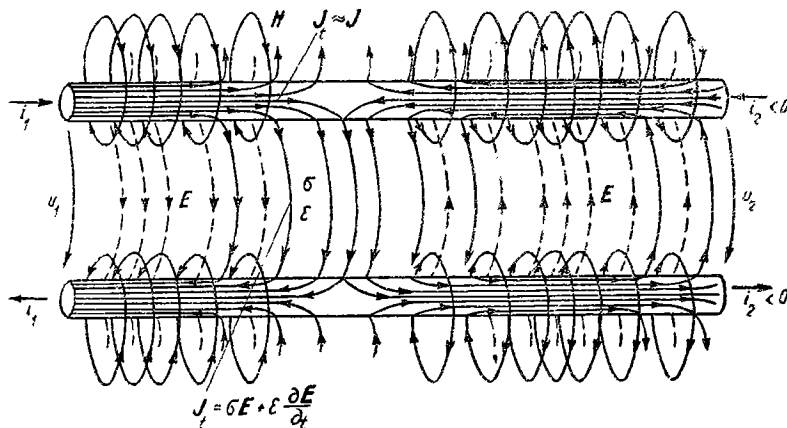


Fig. 53.2

tatea curentului de pierderi σE și a curentului de deplasare $\frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$ nu se mai neglijează. Datorită acestui fapt, curentul are diferite valori în lungul liniei și poate să-și schimbe eventual sensul.

53.1. Parametrii primari ai liniilor electrice lungi (parametrii lineiei)

Deoarece studiul fenomenelor care au loc pe liniile lungi nu se mai poate face în regim cvasistationar, ar trebui să se apeleze la ecuațiile lui Maxwell pentru cîmpul electromagnetic (v. cap. 29, vol. I). Studiul mai complicat, dar exact, efectuat pe această cale arată că aceste fenomene reprezintă una dintre modalitățile de propagare ale *undelor electromagnetice ghidate*.

Dacă frecvența nu e prea mare, se poate adopta însă următorul punct de vedere intermediar: se ține seama de curentul de deplasare transversal, care se închide între conductoare, ca și de curentul de pierderi transversal prin izolație; se neglijează însă componentele longitudinale ale acestor curenți, și deci contribuția acestor componente longitudinale la producerea cîmpului magnetic. În aceste condiții, în fiecare plan transversal al liniei se păstrează relațiile din regimul cvasistationar, între mărimile localizate în acest plan.

De exemplu, cîmpul magnetic, ale cărui linii închise sînt conținute în plane transversale, e proporțional cu curentul i din conductor, din dreptul acestor linii de cîmp, deoarece se neglijează componenta longitudinală a curenților din dielectric, care ar putea să contribuie la circulația cîmpului magnetic în lungul unei linii de cîmp; de aceea și fluxul magnetic $\Delta\Phi$, printr-o suprafață ΔS , sprijinită de conductoare și corespunzătoare unei porțiuni de lungime foarte mică Δx a liniei, e proporțional cu intensitatea curentului din conductoare, din dreptul acestei

porțiuni, ceea ce permite definirea unei inductivități $\Delta L = \frac{\Delta \Phi}{i}$ a acelei porțiuni. În mod analog se poate defini o capacitate ΔC între porțiunile corespunzătoare ale celor două conductoare, o conductanță ΔG a izolației dielectricului dintre ele și o rezistență ΔR a lor.

Acest mod de tratare permite să se evite rezolvarea problemelor liniilor electrice lungi din punctul de vedere al teoriei undelor electromagnetice (ceea ce ar complica foarte mult calculele) și permite să se explice proprietățile acestor linii — cu o aproximație suficientă în practică — din punctul de vedere al teoriei circuitelor electrice, mai familiar inginerului electrician. Întreaga linie apare astfel echivalentă unei succesiuni de cuadripoli cu parametri concentrați, și aproximația e cu atât mai bună, cu cât porțiunile Δx considerate sînt mai mici. De aceea se consideră porțiunile elementare, de lungime dx infinit mică, iar întreaga linie se prezintă ca un circuit electric cu parametri repartizați, caracterizabil local prin parametri locali, raportați la unitatea de lungime a liniei, numiți parametri lineici sau parametri primari.

Considerăm o linie bifilară (fig. 53.3), de lungime l , și notăm cu 1,1' bornele de intrare (dinspre generator) și cu 2,2' bornele de ieșire (dinspre receptor). Notăm cu x distanța elementului curent de lungime dx al liniei de la bornele de intrare (și cu $x' = l - x$ distanța de la bornele de ieșire). Se definesc următorii parametri lineici :

Rezistența lineică :

$$R_l = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(2 \frac{\Delta u_f}{i \Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta x} \quad \left[\frac{\Omega}{\text{m}} \right]. \quad (53.1)$$

Aici, Δu_f e căderea de tensiune din lungul uneia dintre porțiunile de conductor, pe lungimea Δx , i e curentul din conductor din dreptul acelei porțiuni, iar ΔR e rezistența electrică a ambelor conductoare pe porțiunea Δx . Cu ajutorul rezistenței lineice, căderea de tensiune elementară din lungul unui singur conductor pe porțiunea dx se exprimă prin relația :

$$du_f = \frac{R_l}{2} i dx. \quad (53.1')$$

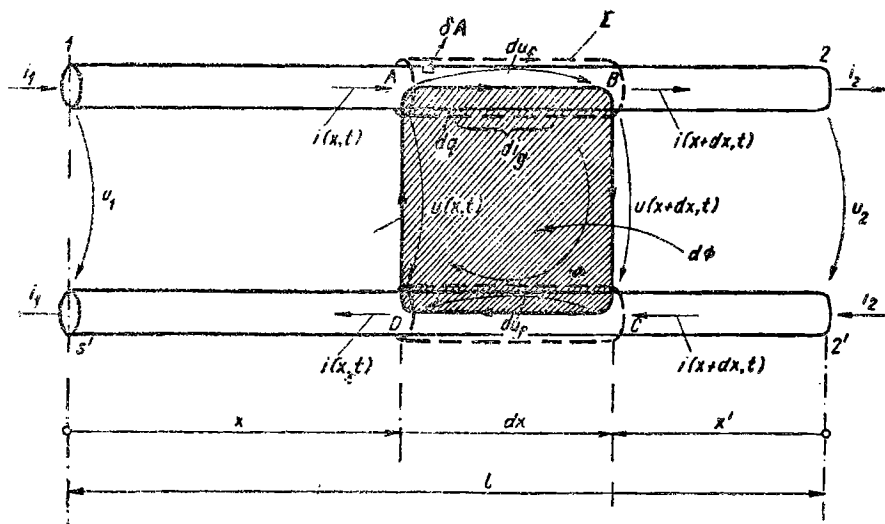


Fig. 53.3

Inductivitatea lineică :

$$L_l = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \Phi}{i \Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{\Delta x} \quad \left[\frac{H}{m} \right] \quad (53.2)$$

Aici, $\Delta \Phi$ e fluxul magnetic prin suprafața sprijinită pe cele două conductoare de lungime Δx , iar ΔL e inductivitatea proprie corespunzătoare acestei porțiuni a liniei. Cu ajutorul inductivității lineice, fluxul elementar prin suprafața S_Γ mărginită de curba $\Gamma \equiv ABB'A'A$, corespunzătoare elementului dx , se exprimă prin relația

$$d\Phi_\Gamma = L_l i dx. \quad (53.2')$$

Capacitatea lineică :

$$C_l = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta q}{u \Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} \quad \left[\frac{F}{m} \right] \quad (53.3)$$

Aici, Δq e sarcina electrică, localizată pe suprafața unuia dintre conductoare pe porțiunea Δx , u e tensiunea dintre acest conductor și celălalt în dreptul acestei porțiuni, iar ΔC e capacitatea între cele două conductoare pe porțiunea Δx . Cu ajutorul capacității lineice, sarcina elementară din interiorul unei suprafețe închise Σ , care înbracă o porțiune elementară dx a primului conductor, se exprimă prin relația :

$$dq_\Sigma = C_l u dx. \quad (53.3')$$

Conductanța lineică de izolație (sau perditanța) :

$$G_l = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta i_g}{u \Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta x} \quad \left[\frac{S}{m} = \frac{\Omega^{-1}}{m} \right]. \quad (53.4)$$

Aici, Δi_g e curentul de conducție, care se încheie prin izolantul imperfect dintre cele două porțiuni de conductoare pe lungimea Δx , iar ΔG e conductanța corespunzătoare acestei porțiuni din izolația liniei. Cu ajutorul conductanței lineice de izolație, curentul de pierdere elementar, care trece de la un conductor la celălalt, pe lungimea elementară dx , se exprimă prin relația :

$$di_g = G_l u dx. \quad (53.4')$$

Observație: a) Dacă parametrii liniei R_l , L_l , C_l , G_l nu depind de distanța x linia se numește omogenă.

b) La frecvențe suficient de joase, parametrii liniei se pot calcula ca în regim staționar, deoarece repartitia curentului pe secțiunea conductorului și repartitia sarcinii pe suprafața conductorului sînt practic neschimbate față de regimul staționar, iar dielectricul are numai pierderi prin conducție. La frecvențe mai înalte, repartitia curentului se modifică (v. efectul pelicular, cap. 55), iar dielectricul are și pierderi prin isterезis (v. par. 49.5). Ca urmare, în acest caz, parametrii liniei R_l , L_l , G_l , C_l sînt, de fapt, parametri echivalenți, care depind de frecvență.

c) În cazul unui dielectric omogen, de permitivitate ϵ și permeabilitate μ , cu pierderi mici, și neglijînd inductivitatea interioară a conductoarelor liniei, se pot utiliza următoarele expresii, stabilite în regim staționar.

— Pentru *linia bifilară* cu conductoare foarte subțiri, de rază a , situate la distanța $D \gg a$:

$$C_l = \frac{\varepsilon\pi}{\ln \frac{D}{a}} = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r\pi}{\ln \frac{D}{a}} \quad \left[\frac{F}{m} \right] \quad (53.5)$$

(v. par. 9.1, vol. I), cu $\varepsilon_0 = (1/36\pi) 10^{-10}$ F/m și $\varepsilon_r \approx 1$ (în aer);

$$L_l = \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{D}{a} = \mu_0 \frac{\mu_r}{\pi} \ln \frac{D}{a} \quad \left[\frac{H}{m} \right] \quad (53.6)$$

(v. par. 27.6.1, vol. I), cu $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m și $\mu_r \approx 1$.

— Pentru *linia coaxială* (cablul coaxial), constituită din două conductoare concentrice, de raze a și $b > a$:

$$C_l = \frac{\varepsilon 2\pi}{\ln \frac{b}{a}} = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r 2\pi}{\ln \frac{b}{a}} \quad \left[\frac{F}{m} \right] \quad (53.7)$$

par. 7.4.1, vol. I)

$$L_l = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = \mu_0 \frac{\mu_r}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad \left[\frac{H}{m} \right] \quad (53.8)$$

53.2. Ecuațiile telegrafistilor

Din cele expuse mai înainte rezultă că, în secțiunea curentă a liniei, atât curentul cât și tensiunea sînt funcțiuni de cele două variabile x și t , deoarece ele variază nu numai în timp, ci și în lungul liniei. Astfel, în secțiunea AD (la distanța x de bornele de intrare),

$$i = i(x, t) \quad \text{și} \quad u = u(x, t), \quad (53.9)$$

iar în secțiunea BC (la distanța $x + dx$ de bornele de intrare)

$$\text{și} \quad \left. \begin{aligned} i(x + dx, t) &= i(x, t) + \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} dx \\ u(x + dx, t) &= u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx. \end{aligned} \right\} \quad (53.10)$$

Funcțiunile $u(x, t)$ și $i(x, t)$ satisfac un sistem de ecuații cu derivate parțiale, numite ecuațiile telegrafistilor, deoarece au fost stabilite pentru prima dată¹, pentru a explica funcționarea cablurilor telegrafice.

53.2.1. Ecuațiile de prim ordin. Pentru a găsi aceste ecuații, vom aplica întâi *legea inducției electromagnetice* conturului $\Gamma = ABCDA$, și apoi *legea*

¹ De către W. Thomson (ulterior lord Kelvin) în 1855, fără a considera și inductivitatea lineică (neglijabilă la cabluri, în primă aproximație) și de către G. Kirchhoff în 1857, pînă la seama și de această inductivitate.

conservării sarcinii suprafeței Σ . Conturul Γ fiind imobil, legea inducției electromagnetice se scrie :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \, d\mathbf{s} = - \frac{\partial}{\partial t} (d\Phi_{\Gamma}).$$

Aici

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{s} = \int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{s} + \int_B^C \mathbf{E} d\mathbf{s} + \int_C^D \mathbf{E} d\mathbf{s} + \int_D^A \mathbf{E} d\mathbf{s} = du_f + (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) + du_f + (-u).$$

Înlocuind această expresie în legea inducției electromagnetice cu relațiile (53.1') și (53.2') și, după simplificări, rezultă ecuația :

$$\boxed{-\frac{\partial u}{\partial x} = R_l i + L_l \frac{\partial i}{\partial t}}, \quad (53.11)$$

care se poate interpreta spunînd că : scăderea tensiunii pe unitatea de lungime a liniei e egală cu suma dintre căderea de tensiune în rezistența ambelor conductoare și căderea de tensiune inductivă, ambele luate pe unitatea de lungime.

Suprafața Σ fiind imobilă, legea de conservare a sarcinii electrice se scrie :

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{J} d\mathbf{A} = - \frac{\partial}{\partial t} (dq_{\Sigma}).$$

Aici elementul de arie e orientat spre exterior, iar

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{J} d\mathbf{A} = (-i) + (i + \frac{\partial i}{\partial x} dx) + di_g,$$

termenii din paranteză fiind în ordine : curentul care intră în suprafața Σ prin punctul A (și care, în consecință, trebuie luat cu semn schimbat în calculul curentului care iese prin suprafața Σ), curentul care iese din suprafața Σ prin punctul B și curentul de pierdere prin izolație între porțiunea AB și porțiunea CD de conductor.

Prin înlocuirea expresiei de mai sus în legea de conservare a sarcinii electrice cu relațiile (53.3') și (53.4'), și după simplificări rezultă ecuația :

$$\boxed{-\frac{\partial i}{\partial x} = G_l u + C_l \frac{\partial u}{\partial t}}, \quad (53.12)$$

care se poate interpreta, spunînd că : scăderea de curent pe unitatea de lungime a liniei e egală cu suma dintre curentul de pierdere prin izolație și curentul de încărcare cu sarcină a conductoarelor, ambele luate pe unitatea de lungime. Ecuațiile (53.11) și (53.12) se numesc *ecuațiile de primul ordin ale telegrafistilor*

și constituie un sistem de ecuații cu derivate parțiale simultane. Interpretările date mai sus acestor ecuații permit să se stabilească pentru fiecare tronson elementar, de lungime dx al unei linii, schema echivalentă din figura 53.4, la utilizarea căreia toți înfîniiții mici de ordin superior sînt neglijabili.

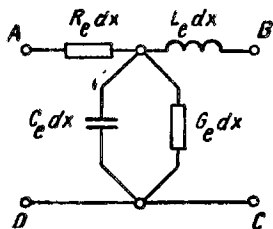


Fig. 53.4

53.2.2. Ecuațiile de al doilea ordin. Între ecuațiile (53.11) și (53.12) se pot elimina oricare dintre funcțiunile necunoscute. Pentru a elimina pe i , se derivează relația (53.11) în raport cu x și se obține relația :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -R_l \frac{\partial i}{\partial x} - L_l \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right)$$

(în care pentru ultimul termen s-a inversat ordinea de derivare); se înlocuiește apoi în această expresie $\frac{\partial i}{\partial x}$ din relația (53.12). Se obține astfel ecuația cu derivate parțiale a tensiunii :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = R_l G_l u + (R_l C_l + L_l G_l) \frac{\partial u}{\partial t} + L_l C_l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (53.13)$$

În mod asemănător, eliminînd pe u , se obține ecuația cu derivate parțiale a curentului :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = R_l G_l i + (R_l C_l + L_l G_l) \frac{\partial i}{\partial t} + L_l C_l \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}. \quad (53.14)$$

Curentul și tensiunea satisfac deci ecuații diferențiale cu derivate parțiale de aceeași formă, care se numesc *ecuațiile de ordinul al doilea ale telegrafiștilor*. Cele două ecuații (53.13) și (53.14) nu pot fi rezolvate independent una de alta, deoarece soluțiile lor sînt legate prin ecuațiile (53.11) și (53.12). Aceste soluții $i(x, t)$ și $u(x, t)$ mai depind și de condițiile inițiale și la limită (la capătul liniei).

Integrarea acestor ecuații în regim tranzitoriu e, în general, complicată și se face cu metode operaționale. În acest curs se va efectua (par. 53.3) numai în cazul cel mai simplu al liniei fără pierderi.

Dacă, pentru a indica secțiunea curentă, se utilizează distanța $x' = l - x$, măsurată de la bornele de ieșire ale liniei, ecuațiile de primul ordin iau forma :

$$\frac{\partial u}{\partial x'} = R_l i + L_l \frac{\partial i}{\partial t}; \quad \frac{\partial i}{\partial x'} = G_l u + C_l \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (53.15)$$

iar ecuațiile de ordinul al doilea iau forma :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} &= R_l G_l u + (R_l C_l + G_l L_l) \frac{\partial u}{\partial t} + L_l C_l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x'^2} &= R_l G_l i + (R_l C_l + G_l L_l) \frac{\partial i}{\partial t} + L_l C_l \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \end{aligned} \right\}, \quad (53.16)$$

în care funcțiunile necunoscute sînt $u(x', t)$ și $i(x', t)$.

53.2.3. Bilanțul instantaneu al puterilor pe linie. Înmulțind relația (53.11) cu i și ecuația (53.12) cu u și adunîndu-le, se obține relația :

$$-\frac{\partial(ui)}{\partial x} = R_l i^2 + G_l u^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(L_l \frac{i^2}{2} + G_l \frac{u^2}{2} \right). \quad (53.17)$$

Observînd că puterea transmisă printr-o secțiune a liniei este

$$p = ui \quad [W] \quad (53.18)$$

și că energia electromagnetică lineică este

$$W_l = L_l \frac{i^2}{2} + C_l \frac{u^2}{2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta x}, \quad [J/m] \quad (53.19)$$

relația (53.17) se scrie

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial W_l}{\partial t} + R_l i^2 + G_l u^2. \quad (53.20)$$

Scăderea specifică a puterii transmise în lungul liniei e egală cu suma dintre viteza de variație a energiei electromagnetice lineice și puterea specifică de pierderi pe linie, prin efect Joule-Lenz (și eventual prin isterezis), în conductoare și în izolație. Linia nu are pierderi numai dacă

$$R_l = 0 \quad \text{și} \quad G_l = 0. \quad (53.21)$$

53.3. Integrarea ecuațiilor telegrafistilor în regim tranzitoriu pentru liniile fără pierderi

În regim tranzitoriu, rezolvarea ecuațiilor telegrafistilor pentru o linie oarecare e relativ complicată și se poate face cu ajutorul integralei Fourier (v. cap. 50) sau al transformării Laplace (v. cap. 52). În cele ce urmează ne vom limita la linia fără pierderi¹, pentru care ecuațiile telegrafistilor au forma :

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L_l \frac{\partial i}{\partial t}; \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = C_l \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (53.22)$$

¹ La frecvențe suficient de înalte, această prezentare e adesea suficientă și pentru linii reale, cu pierderi, deoarece termenii cu derivate în raport cu timpul sînt proporționali cu frecvența și foarte mari față de termenii în care apar R_l și G_l (v. rel. 53.11 și 53.12).

respectiv

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_l C_l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L_l C_l \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}. \quad (53.23)$$

53.3.1. Ecuatiile liniilor fără pierderi. Fiecare dintre ecuațiile (53.23) este o ecuație cu derivate parțiale de ordinul al doilea, de tip hiperbolic, numită ecuația undelor, pe care am mai întâlnit-o în studiul undei electromagnetice plane (v. par. 29.3, vol. I). Urmind un raționament analog celui făcut cu ocazia acestui studiu, se găsește că cea mai generală soluție a ecuației (53.23) consistă în suprapunerea unei unde directe cu o undă inversă. În cazul ecuației tensiunii, de exemplu, cea mai generală soluție este

$$u = u_d(x - v_0 t) + u_i(x + v_0 t), \quad (53.24)$$

cu viteza de propagare

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{L_l C_l}}. \quad (53.25)$$

Aici, primul termen, $u_d(x - v_0 t)$ e o undă elementară directă de tensiune, adică o undă care se propagă fără atenuare și fără distorsiune în sensul x -lor pozitivi, cu viteza v_0 : valorile unei astfel de unde, în momentul t și din diferite puncte x , se regăsesc în momentul $t + \Delta t$ în punctele $x + \Delta x$, cu $\Delta x = v_0 \Delta t$, același pentru toate punctele x (v. fig. 53.5,a). De aceea, pentru un observator mobil, care s-ar deplasa în sensul x -ilor pozitivi, cu viteza v_0 , unda directă va apărea ca o repartitie spațială invariabilă. Al doilea termen, $u_i(x + v_0 t)$, e o undă elementară inversă de tensiune, adică o undă care se propagă fără atenuare și fără distorsiune în sensul x -ilor negativi, cu aceeași viteză v_0 : valorile unei astfel de unde, în momentul t și din diferite puncte x , se regăsesc în momentul $t + \Delta t$ în punctele $x - \Delta x$, cu $\Delta x = v_0 \Delta t$, același pentru toate punctele x (v. fig. 53.5,b). De aceea, pentru un observator mobil, care s-ar deplasa în sensul x -ilor negativi, cu viteza v_0 , unda inversă va apărea ca o repartitie spațială invariabilă.

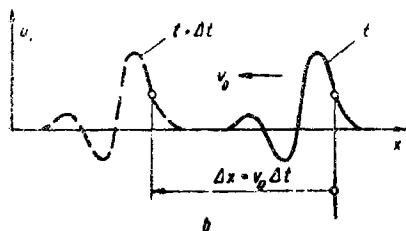
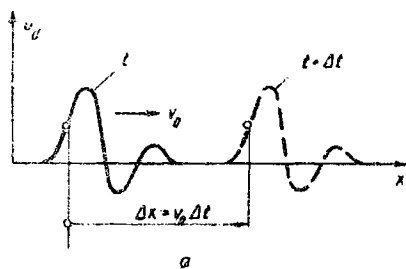


Fig. 53.5

Din punctul de vedere al ecuației undelor, funcțiunile $u_d(x - v_0 t)$ și $u_i(x + v_0 t)$ sînt arbitrare. Ele se determină prin condițiile concrete în care funcționează linia, și anume prin condițiile inițiale și cele de la capetele liniei. La utilizarea acestor din urmă condiții, trebuie subliniat că din proprietățile undelor elementare rezultă următoarele reguli: Într-un moment oarecare $t > 0$ și într-un punct oarecare x al liniei poate exista unda directă numai dacă într-un moment $t - \Delta t$ (anterior lui t) a existat această undă în punctul $x - v_0 \Delta t$, situat la stînga lui x ; și poate exista unda

inversă numai dacă într-un moment $t - \Delta t$ (anterior lui t) a existat această undă în punctul $x + v_0 \Delta t$, situat la dreapta lui x .

Dacă tensiunea e determinată, curentul i trebuie determinat din ecuațiile (53.22) (și nu din ecuația respectivă a undelor, care ar furniza soluții prea generale, independente de acelea ale ecuației tensiunii). Cu relația (53.24) și prima ecuație (53.22) rezultă :

$$-u'_d(x - v_0 t) - u'_i(x + v_0 t) = L_l \frac{\partial i}{\partial t}, \quad (53.26)$$

deoarece

$$\frac{\partial u_d}{\partial x} = \frac{du_d}{d(x - v_0 t)} = u'_d \quad \text{și} \quad \frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{du_i}{d(x + v_0 t)} = u'_i. \quad (53.27)$$

Observînd că

$$\frac{\partial u_d}{\partial t} = -v_0 u'_d \quad \text{și} \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} = +v_0 u'_i, \quad (53.28)$$

ecuația (53.26) devine

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[L_l i - \frac{1}{v_0} (u_d - u_i) \right] = 0,$$

de unde, prin integrare,

$$i = \frac{1}{v_0 L_l} (u_d - u_i) + f(x), \quad (53.29)$$

unde $f(x)$ e o funcțiune arbitrară de x . Înlocuind această expresie în a doua ecuație (53.22), se obține :

$$-\frac{1}{v_0 L_l} u'_d + \frac{1}{v_0 L_l} u'_i + f' = -C_l v_0 u'_i + C_l v_0 u'_d$$

și cu relația (53.25),

$$f' = 0, \text{ adică } f = \text{const.} \quad (53.30)$$

Mărima

$$Z_0 = \frac{1}{v_0 L_l} \quad v_0 C_l = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}} > 0 \quad (53.31)$$

se numește *impedanță caracteristică a liniei fără pierderi*. Cu relațiile (53.29), (53.30) și (53.31), expresia curentului se scrie :

$$i = \frac{1}{Z_0} u_d(x - v_0 t) - \frac{1}{Z_0} u_i(x + v_0 t) + \text{const.} \quad (53.32)$$

Aici, unda elementară directă de curent este

$$i_d = \frac{u_d(x - v_0 t)}{Z_0} = i_d(x - v_0 t). \quad (53.33)$$

iar unda elementară inversă de curent este

$$i_i = - \frac{u_i(x + v_0 t)}{Z_0} = i_i(x + v_0 t). \quad (53.34)$$

Constanta f e o componentă continuă arbitrară a curentului, aceeași în toate punctele liniei, determinabilă prin condițiile inițiale și independentă de tensiune. Ecuațiile (53.24) și (53.32) se numesc ecuațiile liniilor fără pierderi și reprezintă soluțiile ecuațiilor telegrafistilor în regim tranzitoriu. Deoarece o constantă poate fi totdeauna considerată fie ca undă directă, fie ca undă inversă, rezultă că scoțind un termen constant din u_d (de exemplu), ecuațiile liniilor fără pierderi pot fi scrise sub forma simetrică :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_d(x - v_0 t) + u_i(x + v_0 t) + U_0 \\ i(x, t) &= \frac{1}{Z_0} u_d(x - v_0 t) - \frac{1}{Z_0} u_i(x + v_0 t) + I_0 \end{aligned} \quad (53.35)$$

în care constantele U_0 și I_0 trebuie determinate prin condițiile inițiale (și sînt independente între ele, din punctul de vedere al ecuațiilor telegrafistilor), iar funcțiunile u_d și u_i trebuie determinate prin condițiile inițiale și cele de la capetele liniei.

Observații: a) În limitele de valabilitate ale formulelor (53.5), (53.6), (53.7), (53.8) pentru parametrii lineici ai liniei bifilare, respectiv coaxiale, se obține, pentru viteza de propagare pe aceste linii (presupuse fără pierderi) expresia :

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{L_l C_l}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = c. \quad (53.36)$$

egală cu a vitezei de propagare a undelor electromagnetice în dielectrici omogeni nelimitați (v. rel. 29.21, vol. I).

Dacă se iau însă în considerare sporul de inductivitate dat de cîmpul magnetic din interiorul conductoarelor și alte efecte, se constată că prezența conductoarelor reduce puțin viteza de propagare a undelor ghidate pe linie, față de aceea a undelor din medii omogene nelimitate.

b) În aceleași limite se obțin următoarele expresii pentru impedanțele caracteristice :

— Pentru linia bifilară fără pierderi :

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\ln \frac{D}{a}}{\pi} = \frac{\ln \frac{D}{a}}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad (53.37)$$

unde ζ e impedanța de undă a dielectricului (v. rel. 29.26, vol. I). Pentru liniile aeriene obișnuite se obțin valori între 300 și 600 Ω .

Pentru linia coaxială (cablul coaxial) :

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\ln \frac{b}{a}}{2\pi} = \zeta \frac{\ln \frac{b}{a}}{2\pi} \quad (53.37')$$

Deoarece $\frac{b}{a} \ll \frac{D}{a}$ impedanța caracteristică a cablurilor coaxiale e de ordinul a 30...75 Ω .

53.3.2. **Puterile transmise de undele elementare.** Puterea instantanee directă, transmisă de unda directă în sensul x -lor pozitivi, este

$$P_d = u_d i_d = \frac{u_d^2}{Z_0} = Z_0 i_d^2 > 0. \quad (53.38)$$

Energia electromagnetică lineică instantanee a undei directe este, cu relațiile (53.31) și (53.33),

$$W_{ld}(t) = L_l \frac{i_d^2}{2} + C_l \frac{u_d^2}{2} = L_l i_d^2 = C_l u_d^2, \quad (53.39)$$

și se observă că e în mod egal împărțită între cîmpul electric și cîmpul magnetic. Comparînd relațiile (53.36) și (53.37), rezultă, cu relația (53.25) :

$$P_d = v_0 W_{ld}. \quad (53.40)$$

Aceleași relații se obțin pentru unda inversă, dacă se calculează puterea inversă, transmisă în sensul x -lor negativi,

$$P_i = -u_i i_i = \frac{u_i^2}{Z_0} = Z_0 i_i^2 = v_0 W_{li} > 0. \quad (53.41)$$

În fiecare dintre undele elementare, puterea transmisă e egală cu produsul dintre viteza de propagare și energia acumulată pe unitatea de lungime a liniei.

53.3.3. **Aplicație:** Se consideră o linie lungă fără pierderi, de impedanță caracteristică Z_0 și viteză de propagare v_0 , avînd conectată o sarcină rezistivă, de rezistență R la bornele secundare (fig. 53.6). În momentul $t = 0$ ajunge la aceste borne o undă directă de tensiune, cu front dreptunghiular,

$$u_d = U. \quad (53.42)$$

Se cere repartitia tensiunii și a curentului într-un moment $t > 0$, știind că linia are bornele primare suficient de depărtate de bornele secundare.

În acest caz, în ecuațiile (53.35) avem $U_0 = 0$ și $I_0 = 0$ (nu există curenți și tensiuni continue pe linie înainte de $t = 0$) și $u_i = 0$ pentru $t < 0$. Ecuațiile liniilor devin :

$$\left. \begin{aligned} U + u_i(x, t) &= u(x, t) \\ U - u_i(x, t) &= Z_0 i(x, t) \end{aligned} \right\} \quad (53.43)$$

Considerînd aceste ecuații scrise pentru capătul liniei, unde $u = Ri$, rezultă, eliminînd necunoscutele și i , pentru $t > 0$,

$$u_i(l, t) = \frac{R - Z_0}{Z_0 + R} \cdot U \quad (53.44)$$

$$i = \frac{u_d}{Z_0} = \frac{U}{Z_0},$$

$$- \frac{u_i}{Z_0} = - \frac{1}{Z_0} \cdot \frac{R - Z_0}{Z_0 + R} \cdot U. \quad (53.45)$$

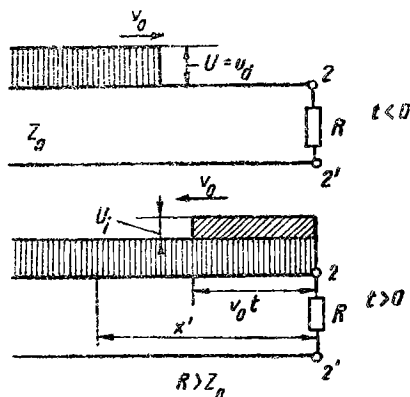


Fig. 53.6

În acest caz, unda inversă e o undă reflectată, și anume pozitivă, dacă $R > Z$ (cazul din fig. 53.6, care determină o supratensiune $u = u_d + u_i = \frac{2RU}{(Z_0 + R)}$) nulă, dacă $R = Z$, sau negativă, dacă $R < Z$ (caz care determină o supraindensitate $i = \frac{u_d - u_i}{Z_0} = \frac{2Z_0}{Z_0 + R} \cdot \frac{U}{Z_0}$). Pentru un moment $t > 0$

$$u_i(x', t) = \begin{cases} u_i(t, t) = \frac{R - Z_0}{R + Z_0} U & \text{dacă } x' < vt \\ 0 & \text{dacă } x' > vt \end{cases} \quad (53.46)$$

așa cum rezultă imediat din proprietățile undei inverse, care se propagă cu v_0 în sensul x -lor negativi (și deci al x' -lor pozitivi).

54. || LINII LUNGI ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

În acest capitol vom studia liniile lungi *în regim sinusoidal*, adică atunci cînd curentul și tensiunea sînt, în fiecare punct al liniei, funcțiuni sinusoidale de timp de aceeași frecvență f

$$u(x, t) = U(x) \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi(x)) \quad (54.1)$$

$$i(x, t) = I(x) \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi(x) - \varphi(x)), \quad (54.2)$$

cu valorile efective $U(x)$ și $I(x)$, fazele inițiale¹ $\psi(x)$ și $\psi(x) - \varphi(x)$ și cu defazajul $\varphi(x)$, dependente de punctul considerat x al liniei. Un astfel de regim se stabilește, de exemplu, într-o linie lungă, căreia i se aplică la capete tensiuni sinusoidale de aceeași frecvență, în regim permanent (adică, după completa amortizare a regimului liber, determinat de condițiile inițiale).

54.1. Studiul ecuațiilor telegrafistilor în complex

54.1.1. Forma complexă a ecuațiilor telegrafistilor soluțiile elementare. În regim permanent sinusoidal, tensiunea și curentul se pot reprezenta în complex simplificat, imaginile lor fiind acum funcțiuni de variabila spațială x :

$$u(x, t) \rightleftharpoons \underline{U}(x) = U(x) e^{j\psi(x)} \quad (54.3)$$

$$i(x, t) \rightleftharpoons \underline{I}(x) = I(x) e^{j(\psi(x) - \varphi(x))}. \quad (54.4)$$

¹ Nu am mai notat fazele inițiale cu β și γ , deoarece aceste simboluri au altă semnificație în teoria liniilor lungi.

În acest caz, derivatele parțiale ale acestor mărimi se reprezintă astfel :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im} \{ \underline{U}(x) \sqrt{2} e^{j\omega t} \} &= \operatorname{Im} \left\{ \frac{d\underline{U}}{dx} \sqrt{2} e^{j\omega t} \right\} \iff \frac{d\underline{U}}{dx} \\ \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Im} \{ \underline{U}(x) \sqrt{2} e^{j\omega t} \} &= \operatorname{Im} \{ \underline{U}(x) \sqrt{2} j\omega e^{j\omega t} \} \iff j\omega \underline{U} \end{aligned} \quad (54.5)$$

și, analog,

$$\iff \frac{d\underline{I}}{dx} \quad \frac{\partial \underline{I}}{\partial t} \iff j\omega \underline{I}. \quad (54.6)$$

Cu aceste reguli, sistemul de ecuații diferențiale cu derivate parțiale (în variabilele x și t), pe care îl constituie ecuațiile telegrafiștilor (53.11) și (53.12), se reprezintă în complex printr-un sistem de ecuații diferențiale ordinare (în variabila x)

$$\left[\begin{aligned} \frac{d\underline{U}}{dx} &= (R_l + j\omega L_l) \underline{I} \\ \frac{d\underline{I}}{dx} &= (G_l + j\omega C_l) \underline{U} \end{aligned} \right]. \quad (54.7)$$

Aceasta este *forma complexă a ecuațiilor de ordinul întâi ale telegrafiștilor*. Prin derivare se poate elimina succesiv oricare dintre funcțiunile necunoscute $\underline{U}$ și $\underline{I}$ obțin relațiile :

$$\left[\begin{aligned} \frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} &= (R_l + j\omega L_l) (G_l + j\omega C_l) \underline{U} \\ \frac{d^2 \underline{I}}{dx^2} &= (R_l + j\omega L_l) (G_l + j\omega C_l) \underline{I} \end{aligned} \right], \quad (54.8)$$

care reprezintă *forma complexă a ecuațiilor de ordinul al doilea ale telegrafiștilor*. Dacă se notează

$$\sqrt{(R_l + j\omega L_l) (G_l + j\omega C_l)} = \alpha - j\beta \quad (\alpha > 0) \quad (54.9)$$

alegînd, *prin definiție*, rădăcina cu parte reală pozitivă — ecuațiile de ordinul al doilea (54.8) capătă forma simplă :

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = \gamma^2 \underline{U}; \quad \frac{d^2 \underline{I}}{dx^2} = -\gamma^2 \underline{I}. \quad (54.10)$$

La rezolvarea acestor ecuații trebuie să se țină seama că $\underline{U}$ și $\underline{I}$ sînt legate prin ecuațiile de ordinul întâi (54.7). De aceea se rezolvă numai una dintre ecuații — de exemplu, aceea a tensiunii — curentul deducîndu-se din (54.7).

Ecuațiile (54.10) sînt ecuații diferențiale liniare de ordinul II, cu coeficienți constanți, avînd ecuația caracteristică

$$r^2 = \gamma^2,$$

cu soluțiile :

$$r = \pm \gamma = \pm (\alpha + j\beta). \quad (54.11)$$

Rezultă atunci, pentru soluția generală a tensiunii :

$$\underline{U}(x) = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{+\gamma x}, \quad (54.12)$$

în care $\underline{A}_1$ și $\underline{A}_2$ sînt constante arbitrare (în general complexe). Curentul se obține introducînd această relație în prima ecuație (54.7) :

$$\underline{I}(x) = - \frac{1}{R_l + j\omega L_l} \cdot \frac{d\underline{U}}{dx} = \frac{\gamma}{R_l + j\omega L_l} [\underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{+\gamma x}]. \quad (54.13)$$

Dacă se notează :

$$\underline{Z}_c = \frac{R_l + j\omega L_l}{\gamma} = \frac{\gamma}{G_l + j\omega C_l} = \sqrt{\frac{R_l + j\omega L_l}{G_l + j\omega C_l}} = Z_c e^{j\varphi_c}, \quad (54.14)$$

soluțiile generale ale formei complexe a ecuațiilor telegrafistilor se pot pune sub forma :

$$\begin{aligned} \underline{U}(x) &= \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{+\gamma x} \\ \underline{I}(x) &= \underline{A}_1 \frac{e^{-\gamma x}}{\underline{Z}_c} - \underline{A}_2 \frac{e^{+\gamma x}}{\underline{Z}_c}, \end{aligned} \quad (54.15)$$

în care constantele arbitrare complexe $\underline{A}_1$ și $\underline{A}_2$ sînt determinabile prin condițiile de la capetele liniei. Fiecare dintre termenii din relația (54.15) în parte se numește *soluție complexă elementară* a ecuațiilor telegrafistilor.

54.1.2. Interpretarea soluțiilor elementare. Atît tensiunea cît și curentul din soluția generală (54.15) rezultă prin suprapunerea a doi termeni : primul depinde de x prin factorul $e^{-\gamma x}$, iar al doilea prin factorul $e^{+\gamma x}$. Arătăm că aceste soluții elementare sînt reprezentările în complex ale unor unde elementare atenuate, directă și inversă. Astfel, *tensiunea directă*

$$\underline{U}_d(x) = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} \quad (54.16)$$

cu coeficientul

$$\underline{A}_1 = \underline{U}_d(0) = \underline{U}_{d0} = U_{d0} e^{j\psi_{d0}} \quad (54.17)$$

se poate scrie sub formă exponențială (adică separînd modulul și argumentul), cu relația (54.11),

$$\underline{U}_d(x) = \underline{U}_{d0} e^{-\gamma x} = U_{d0} e^{-\alpha x} e^{-j(\beta x - \psi_{d0})} \quad (54.18)$$

Valoarea instantanee corespunzătoare este :

$$u_d(x, t) = \text{Im} \{ \underline{U}_d \sqrt{2} e^{j\omega t} \} = U_{d0} e^{-\alpha x} \sqrt{2} \sin(\omega t - \beta x + \psi_{d0}) \quad (54.19)$$

sau

$$u_d(x, t) = U_{d0} e^{-\alpha x} \sqrt{2} \sin \left(-\beta \left(x - \frac{\omega}{\beta} t \right) + \psi_{d0} \right). \quad (54.19')$$

Se observă imediat că, făcând abstracție de factorul exponențial monoton descrescător $e^{-\alpha x}$ (deoarece $\alpha > 0$), această valoare instantanee reprezintă o undă elementară directă, de forma primului termen din relația (53.24), cu viteza de propagare :

$$v = \frac{\omega}{\beta} = 2\pi \frac{f}{\beta}, \quad (54.20)$$

numită, în acest caz, *viteză de fază* a undei — în sensul x -lor pozitivi. La un moment dat t , această undă directă are o repartiție spațială sinusoidală, cu perioada spațială λ , numită *lungime de undă*. Se observă că lungimea de undă cea mai mică distanță dintre două puncte, în care undele respective sînt în fază și, ca atare, e determinabilă prin condiția :

$$\omega t - \beta x = \omega t - \beta(x + \lambda) + 2\pi,$$

din care rezultă

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (54.21)$$

Întreaga repartiție se deplasează în sensul x -lor pozitivi, cu viteza de fază

$$v = \frac{\omega}{\beta} = f\lambda. \quad (54.22)$$

Ținînd acum seama și de factorul exponențial, rezultă că unda elementară directă e atenuată în sensul propagării cu o atenuare (v. rel. 45.32) :

$$\alpha x = \ln \left| \frac{U_d(0)}{U_d(x)} \right|, \quad (54.23)$$

proporțională cu distanța x . În figura 54.1, a se reprezintă o astfel de undă elementară atenuată directă în momentele t și $t + \Delta t$.

O analiză asemănătoare se poate face pentru *tensiunea inversă*

$$U_i(x) = \underline{A}_2 e^{+\gamma x} = \underline{U}_{i0} e^{+\gamma x} = \underline{U}_{i0} e^{\gamma l} e^{-\gamma x'} = \underline{A}'_2 e^{-\gamma x'}, \quad (54.24)$$

care are aceeași formă cu o componentă directă, dacă se exprimă în funcțiune de variabila $x' = l - x$. Această componentă corespunde, prin urmare, unei unde elementare atenuate inverse (v. fig. 54.1, b), care se propagă cu aceeași viteză (v) în sensul x -lor negativi, atenuîndu-se în sensul ei de propagare cu aceeași atenuare α pe unitatea de lungime.

În sfîrșit, în analogie cu tensiunea, din relația (54.15) mai rezultă că și curentul consistă în suprapunerea unor soluții complexe elementare, *curentul direct*:

$$\underline{I}_d(x) = \frac{\underline{U}_d(x)}{\underline{Z}_c} = \frac{\underline{U}_{d0}}{\underline{Z}_c} e^{-\gamma x}, \quad (54.25)$$

și curentul invers :

$$\underline{I}_i(x) = -\frac{\underline{U}_i(x)}{Z_c} = \frac{U_{i0}}{Z_c} e^{+\gamma x}. \quad (51.26)$$

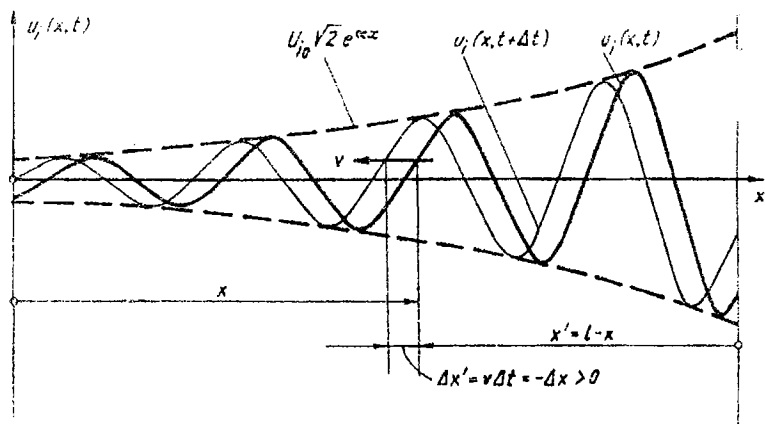
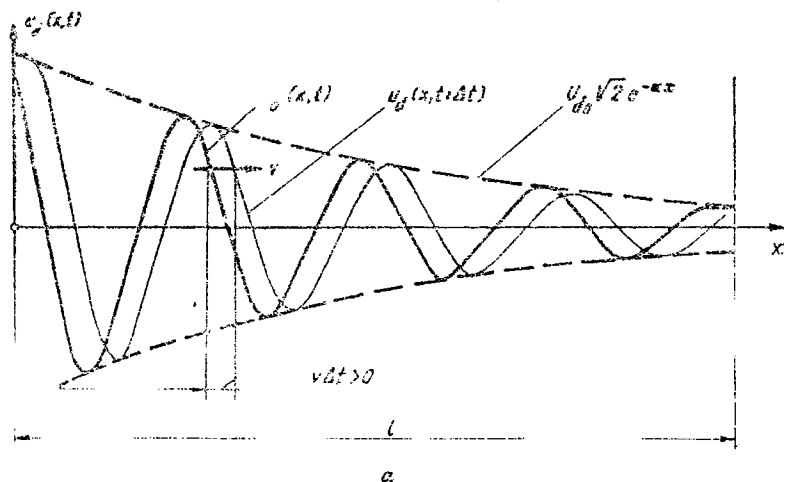


Fig. 54.1

54.1.3. Parametrii secundari ai liniilor : impedanța caracteristică și constanta de propagare. Soluțiile generale (54.15) pun în evidență proprietatea mărimilor complexe $\underline{Z}_c$ și $\underline{\gamma}$ de a caracteriza complet linia în regim permanent sinusoidal, de frecvență dată. Aceste mărimi sînt *parametrii secundari* liniilor, și anume :

Impedanța caracteristică complexă liniei :

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{U}_d(x)}{\underline{I}_d(x)} = \frac{\underline{U}_i(x)}{(-\underline{I}_i(x))} = \sqrt{\frac{R_l + j\omega L_l}{G_l + j\omega C_l}} = Z_c e^{j\varphi_c}. \quad (54.27)$$

Raportul dintre tensiunea complexă a unei unde elementare și curentul complex corespunzător (asociat după regula de la receptoare, în raport cu sensul de propagare respectiv) are aceeași valoare în toate punctele liniei, fiind egal cu impedanța caracteristică. Modulul acestei mărimi este *impedanța caracteristică scalară* și are valoarea :

$$Z_c = \left| \sqrt{\frac{R_l + j\omega L_l}{G_l + j\omega C_l}} \right| = \sqrt{\frac{|R_l + j\omega L_l|}{|G_l + j\omega C_l|}} = \sqrt{\frac{R_l^2 + \omega^2 L_l^2}{G_l^2 + \omega^2 C_l^2}} \quad (54.28)$$

argumentul acestei mărimi este *defazajul caracteristic* și are valoarea

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \arg \{Z_c^2\} &= \frac{1}{2} \left\{ \arctg \frac{\omega L_l}{R_l} - \arctg \frac{\omega C_l}{G_l} \right\} \\ \varphi_c &= \frac{1}{2} \arctg \frac{\left(\frac{L_l}{R_l} - \frac{C_l}{G_l} \right)}{1 + \frac{\omega^2 L_l C_l}{R_l G_l}} \end{aligned} \quad (54.29)$$

Se observă că

$$-\frac{\pi}{4} < \varphi_c < \frac{\pi}{4} \quad (54.29')$$

Constanta de propagare a liniei

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{x} \ln \frac{\underline{U}_d(0)}{\underline{U}_d(x)} = \sqrt{(R_l + j\omega L_l)(G_l + j\omega C_l)}} = \alpha + j\beta \quad (54.30)$$

unde, la extragerea radicalului, se reține rădăcina cu parte reală pozitivă ($\alpha > 0$).

Interpretarea arătată pentru soluțiile elementare stabilește că mărimea

$$\alpha = \operatorname{Re} \gamma = \frac{1}{x} \ln \left| \frac{\underline{U}_d(0)}{\underline{U}_d(x)} \right| \quad (54.31)$$

numită *constantă de atenuare*, caracterizează linia din punctul de vedere al atenuării undelor elementare pe unitatea de lungime, iar mărimea

$$\beta = \operatorname{Im} \gamma = \frac{1}{x} \left\{ \frac{\underline{U}_d(0)}{\underline{U}_d(x)} \right\} \quad (54.32)$$

numită *constantă de defazaj* sau *constantă de fază*, caracterizează linia din punctul de vedere al defazajului introdus în undele elementare pe unitatea de lungime.

Pentru a calcula constantele α și β în funcție de parametrii lineici R_l , L_l , G_l , C_l , observăm că din (54.30) rezultă relațiile:

$$\underline{\gamma}^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2j\alpha\beta = R_l G_l - \omega^2 L_l C_l + j\omega(L_l G_l + R_l C_l) \quad (54.33)$$

$$\alpha\beta = \frac{1}{2} \omega (L_l G_l + R_l C_l) \quad (54.34)$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = R_l G_l - \omega^2 L_l C_l \quad (54.35)$$

$$|\underline{\gamma}| = \sqrt{|R_l + j\omega L_l| |G_l + j\omega C_l|} = \sqrt{(R_l^2 + \omega^2 L_l^2)(G_l^2 + \omega^2 C_l^2)} \quad (54.36)$$

$$|\underline{\gamma}|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{(R_l^2 + \omega^2 L_l^2)(G_l^2 + \omega^2 C_l^2)}. \quad (54.37)$$

Făcînd semisuma și semidiferența expresiilor (54.34) și (54.36), rezultă expresiile căutate:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} (R_l G_l - \omega^2 L_l C_l) + \frac{1}{2} \sqrt{(R_l^2 + \omega^2 L_l^2)(G_l^2 + \omega^2 C_l^2)}} \geq 0 \quad (54.38)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} (\omega^2 L_l C_l - R_l G_l) + \frac{1}{2} \sqrt{(R_l^2 + \omega^2 L_l^2)(G_l^2 + \omega^2 C_l^2)}} > 0. \quad (54.39)$$

Constanta de atenuare e pozitivă prin însuși modul cum a fost definită constanta de propagare $\underline{\gamma}$; din relația (54.34) rezultă atunci că și constanta de fază e pozitivă.

Parametrii γ , α , β , Z_c , Z_0 , φ_c depind de frecvență, și anume într-un mod mai complicat decît rezultă din relațiile de mai sus, deoarece și parametrii lineici R_l , L_l , G_l , C_l depind de frecvență, din cauza efectului pelicular (v. cap. 56) și al pierderilor dielectrice (v. par. 49.5). De asemenea, viteza de fază a undelor:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = f\lambda = \frac{1}{\sqrt{L_l C_l}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{R_l G_l}{\omega^2 L_l C_l}\right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{R_l^2}{\omega^2 L_l^2}\right) \left(1 + \frac{C_l^2}{\omega^2 C_l^2}\right)}}} \quad (54.40)$$

depinde de frecvență.

Observații: a) În cazul liniei fără pierderi ($R_l \approx 0$, $G_l \approx 0$) parametrii secundari au valorile:

$$\alpha \approx 0, \quad \beta \approx \omega \sqrt{L_l C_l}, \quad Z_c \approx \sqrt{\frac{L_l}{C_l}} = Z_0, \quad \varphi_c \approx 0, \quad (54.41)$$

iar viteza de fază

$$v \approx \frac{1}{\sqrt{L_l C_l}} = v_0 \quad (54.42)$$

nu depinde de frecvență. De aceea, toate componentele sinusoidale ale unei unde directe periodice nesinusoidale se propagă neatenuate și cu aceeași viteză, asigurînd propagarea fără distorsiuni a acestei unde (cum rezultă și din studiul liniei fără pierderi în regim tranzitoriu — par. 53.3.1.).

b) În cazul unei linii cu pierderi mici, lucrând la frecvențe înalte ($R_l \ll L_l \omega$, $G_l \ll C_l \omega$), parametrii secundari iau valorile

$$\left. \begin{aligned} \alpha &\approx \frac{1}{2} R_l \sqrt{\frac{C_l}{L_l}} + \frac{1}{2} G_l \sqrt{\frac{L_l}{C_l}}, & \beta &\approx \omega \sqrt{L_l C_l} \\ Z_c &\approx \sqrt{\frac{L_l}{C_l}} = Z_0, & \varphi_c &\approx 0 \end{aligned} \right\} \quad (54.43)$$

iar viteza de fază

$$\approx \frac{1}{\sqrt{L_l C_l}} = v_0 \quad (54.44)$$

rezultă de asemenea independentă de frecvență.

c) În cazul liniei cu pierderi, atât viteza de fază cât și constanta de atenuare depind de frecvență. Dependența vitezei de fază de frecvență poartă numele de *dispersiune*, din cauza faptului că în optică această proprietate determină dependența de frecvență a indicelui de refracție și deci fenomenul de dispersiune a luminii. Dispersiunea are drept consecință deformarea undelor (directe sau inverse) care se propagă pe linie. În adevăr, considerind, pentru simplificare, o undă directă periodică, dar nesinusoidală, această undă poate fi considerată ca o suprapunere de armonice (prin dezvoltare în serie Fourier). Din cauza dispersiunii, armonicele au viteze de propagare diferite, ceea ce determină alte faze inițiale la ieșirea din linie decât la intrarea în linie. Ca urmare, unda rezultantă va avea la ieșire o altă formă decât la intrare. Pentru telecomunicații, acest fenomen e supărător, deoarece reduce fidelitatea transmisiunii semnalelor pe linie, producând distorsiuni.

Dacă însă parametrii lineici satisfac condiția lui Heaviside

$$\left| \frac{R_l}{L_l} = \frac{G_l}{C_l} \right|, \quad (54.45)$$

se observă din relația (54.40) că radicalul, dependent de frecvență, de la numitor devine egal cu unitatea și viteza de fază rezultă independentă de frecvență și egală cu viteza de propagare de pe liniile fără pierderi:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_l C_l}} = v_0 \quad (54.46)$$

Condiția (54.45) caracterizează linia fără dispersiune, pentru care parametrii secundari au valorile:

$$\alpha = R_l \sqrt{\frac{C_l}{L_l}} = G_l \sqrt{\frac{L_l}{C_l}} = \frac{R_l}{Z_0} = \frac{Z_0}{G_l}; \quad \beta = \omega \sqrt{L_l C_l}; \quad Z_c = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}} = Z_0; \quad \varphi_c = 0. \quad (54.47)$$

În telecomunicații, linia fără dispersiune prezintă deosebită importanță, din punctul de vedere al fidelității transmisiunii, în special la circuitele telefonice de frecvență vocală, situate în cabluri telefonice, pentru legături pe distanțe mari. Deoarece circuitele din cabluri au conductoare foarte apropiate, cu dielectric de permitivitate relativ mare, capacitatea lor pineică e foarte mare, iar inductivitatea lor lineică foarte mică, adică:

$$\frac{R_l}{L_l} > \frac{G_l}{C_l}$$

Pentru a satisface condiția lui Heaviside, se sporește în mod artificial inductivitatea lineică medie a liniei (încărcarea liniei) — fie prin intercalarea, la intervale regulate și mici față de lungimea de undă, a unor bobine de mare inductivitate (procedul Pupin) — fie prin utilizarea unor materiale feromagnetice în structura dielectricului.

d) La frecvențe extrem de joase se obțin pentru parametrii secundari expresiile

$$\sqrt{R_l G_l} = 0; \quad Z_c = \sqrt{\frac{R_l}{G_l}} = 0. \quad (54.48)$$

Aceleași expresii caracterizează cazul limită al liniei de curent continuu cu pierderi în izolație.

54.2. Ecuațiile liniilor electrice lungi

Se numesc *ecuațiile liniilor soluțiile complexe* ale ecuațiilor telegrafice, exprimate în funcție de mărimile de la capetele liniei.

54.2.1. Ecuațiile liniilor exprimate în funcție de unda directă și undă inversă. Dacă se dă unda directă de tensiune, respectiv undă inversă, la începutul liniei, respectiv la sfârșitul liniei

$$\underline{U}_d(0) = \underline{U}_{d0} = U_{d0} e^{i\psi_{d0}} \quad (54.49)$$

respectiv

$$\underline{U}_i(l) = \underline{U}_{i0} e^{i\psi_i} = \underline{U}_{il} = U_{il} e^{i\psi_{il}}, \quad (54.50)$$

soluțiile generale (54.15), cu relațiile (54.18), (54.24), (54.25) și (54.26) se scriu

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}(x) &= \underline{U}_d(x) + \underline{U}_i(x) = \underline{U}_{d0} e^{-\gamma x} + \underline{U}_{il} e^{-\gamma(l-x)} \\ \underline{I}(x) &= \underline{I}_d(x) + \underline{I}_i(x) = \frac{\underline{U}_{d0}}{Z_c} e^{-\gamma x} - \frac{\underline{U}_{il}}{Z_c} e^{-\gamma(l-x)} \end{aligned} \right\} \quad (54.51)$$

În valori instantanee rezultă expresiile:

$$\left\{ \begin{aligned} u(x, t) &= U_{d0} e^{-\alpha x} \sqrt{2} \sin(\omega t - \beta x + \psi_{d0}) + U_{il} e^{-\alpha(l-x)} \sqrt{2} \sin(\omega t - \beta(l-x) + \psi_{il}) \\ i(x, t) &= \frac{U_{d0}}{Z_c} e^{-\alpha x} \sqrt{2} \sin(\omega t - \beta x + \psi_{d0} - \varphi_c) - \frac{U_{il}}{Z_c} e^{-\alpha(l-x)} \sqrt{2} \sin(\omega t - \beta(l-x) + \\ &\quad + \psi_{il} - \varphi_c). \end{aligned} \right. \quad (54.52)$$

Se observă că, dacă $l \gg$ și linia are pierderi, $|e^{-\gamma(l-x)}| \ll 1$ și unda inversă practic neglijabilă, astfel că

$$\left\{ \begin{aligned} \underline{U}(x) &\approx \underline{U}_d(x) = \underline{U}_{d0} e^{-\gamma x} \\ \underline{I}(x) &\approx \underline{I}_d(x) = \frac{\underline{U}_{d0}}{Z_c} e^{-\gamma x} - \frac{\underline{U}(x)}{Z_c} \end{aligned} \right\} \quad (54.53)$$

Acestea sînt ecuațiile liniei *infini lungi* ($l \rightarrow \infty$).

54.2.2. Ecuațiile liniilor exprimate în funcție de mărimile de intrare. Dacă se dau tensiunea și curentul la bornele de intrare

$$\underline{U}_1 = \underline{U}(0) = \underline{A}_1 - \underline{A}_2 \quad (54.54)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}(0) = \frac{\underline{A}_1 + \underline{A}_2}{Z_c}. \quad (54.55)$$

constantele compexe $\underline{A}_1$ și $\underline{A}_2$ sînt date de relațiile

$$\underline{A}_1 = \frac{1}{2} (\underline{U}_1 + \underline{Z}_c \underline{I}_1); \quad \underline{A}_2 = \frac{1}{2} (\underline{U}_1 - \underline{Z}_c \underline{I}_1). \quad (54.56)$$

Cu aceste valori, soluțiile generale (54.15) devin:

$$\begin{cases} \underline{U}(x) = \underline{U}_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x - \underline{Z}_c \underline{I}_1 \operatorname{sh} \underline{\gamma} x \\ \underline{I}(x) = \underline{I}_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma} x \end{cases} \quad (54.57)$$

Observații a) *Linia fără pierderi*

$$\beta = j\omega \sqrt{L_0 C_0} = j \frac{2\pi}{\lambda} \quad \underline{Z}_c = \underline{Z}_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

și deoarece

$$\operatorname{ch} j\beta x = \cos \beta x \quad \operatorname{sh} j\beta x = j \sin \beta x$$

ecuațiile devin

$$\begin{cases} \underline{U}(x) = \underline{U}_1 \cos \beta x - j \underline{Z}_0 \underline{I}_1 \sin \beta x \\ \underline{I}(x) = \underline{I}_1 \cos \beta x - j \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_0} \sin \beta x \end{cases} \quad (54.58)$$

b) *La linia foarte scurtă*, cu $|\underline{\gamma} x| \ll 1$ pentru orice x , se pot reține, din dezvoltarea în a funcțiilor hiperbolice, numai termenii de gradul 0 și 1 în $\underline{\gamma}$. Se obțin, pentru întreaga (x) l., ecuațiile:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_2 = \underline{U}(l) &\approx \underline{U} - \underline{Z}_c \underline{\gamma} l \underline{I}_1 = \underline{U}_1 - (R_l l + j\omega L_l l) \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 = \underline{I}(l) &\approx \underline{I}_1 - \frac{\underline{\gamma} l}{\underline{Z}_c} \underline{U}_1 \approx \underline{I}_1 - \frac{\underline{\gamma} l}{\underline{Z}_c} \underline{U}_2 = \underline{I}_1 - (G_l l + j\omega C_l l) \underline{U}_2 \end{aligned} \right\} \quad (54.59)$$

spunzătoare schemei echivalente cu parametri concentrați din figura 54.2.

c) Observația precedentă permite să se stabilească un *criteriu cantitativ*, pentru a putea aprecia dacă un circuit poate fi tratat în aproximația parametrilor concentrați, adică în regim evasistationar. Pentru aceasta trebuie ca $\beta l \ll 1$, sau,

deci $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ trebuie c

$$l \ll \frac{v}{f} \quad (54.60)$$

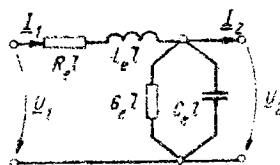


Fig. 54.2

Pot fi tratate ca linii scurte numai liniile avînd lungimea mică față de lungimea de undă corespunzătoare frecvenței de lucru.

De aceea, o linie de transmisie a energiei de 100 km, care lucrează la frecvența industrială de 50 Hz ($\lambda \approx 3.10^5/50 = 6\,000$ km) este o linie scurtă ($l/\lambda \approx 1/60$), pe cînd o linie de antenă de 10 m pentru televiziune, care lucrează la frecvențe de circa 50 MHz ($\lambda \approx 3.10^6/50.10^6 = 6$ m) este o linie lungă ($l/\lambda \approx 1$).

54.2.3. Ecuațiile liniilor exprimate în funcțiune de mărimile de ieșire. Dacă se dau tensiunea și curentul de la bornele de ieșire :

$$\underline{U}_2 = \underline{U}(l) = \underline{A}_1 e^{-\gamma l} + \underline{A}_2 e^{\gamma l} \quad (54.61)$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}(l) = \frac{\underline{A}_1}{Z_c} e^{-\gamma l} - \frac{\underline{A}_2}{Z_c} e^{\gamma l} \quad (54.62)$$

constantele complexe $\underline{A}_1 e^{-\gamma l}$ și $\underline{A}_2 e^{\gamma l}$ sînt date de relațiile :

$$\underline{A}_1 e^{-\gamma l} = \frac{1}{2} (\underline{U}_2 + Z_c \underline{I}_2); \quad \underline{A}_2 e^{\gamma l} = \frac{1}{2} (\underline{U}_2 - Z_c \underline{I}_2) \quad (54.63)$$

Cu aceste valori, soluțiile generale (54.15), exprimate în funcție de distanța $x' = l - x$, măsurată de la sfîrșitul liniei, devin :

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{U}(x') &= \underline{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x' + Z_c \underline{I}_2 \operatorname{sh} \gamma x' \\ \underline{I}(x') &= \underline{I}_2 \operatorname{ch} \gamma x' + \frac{\underline{U}_2}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma x' \end{aligned}} \quad (54.64)$$

Observații: a) La linia fără pierderi aceste ecuații devin (cu $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$) :

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}(x') &= \underline{U}_2 \cos \beta x' + j Z_0 \underline{I}_2 \sin \beta x' \\ \underline{I}(x') &= \underline{I}_2 \cos \beta x' + j \frac{\underline{U}_2}{Z_0} \sin \beta x' \end{aligned} \right\} \quad (54.65)$$

b) Întreaga linie ($x' = l$) reprezintă un cuadripol reciproc și simetric, cu ecuațiile fundamentale :

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \underline{I}_2 Z_c \operatorname{sh} \gamma l \\ \underline{I}_1 &= \underline{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \frac{\underline{U}_2}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma l \end{aligned} \right\} \quad (54.66)$$

54.3. Aplicații

54.3.1. Impedanța de intrare a unei linii. Dacă $Z_2 = \underline{U}_2 / \underline{I}_2$ e impedanța conectată la bornele de ieșire (v. fig. 54.3), impedanța echivalentă la intrare rezultă din relațiile (54.66)

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{Z}_2 \operatorname{ch} \gamma l + Z_c \operatorname{sh} \gamma l}{\underline{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \frac{\underline{U}_2}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma l} = Z_c \frac{\underline{Z}_2 + Z_c \operatorname{th} \gamma l}{Z_2 \operatorname{th} \gamma l + Z_c} \quad (54.67)$$

În cazul liniei fără pierde

$$\underline{Z}_c = Z_0; \quad \gamma = j\beta = j \frac{2\pi}{\lambda}$$

și se obține

$$\underline{Z}_1 = Z_0 \frac{\underline{Z}_2 + jZ_0 \operatorname{tg} \beta l}{jZ_0 \operatorname{tg} \beta l + Z_0} = Z_0 \frac{\underline{Z}_2 + jZ_0 \operatorname{tg} \left(2\pi \frac{l}{\lambda} \right)}{jZ_0 \operatorname{tg} \left(2\pi \frac{l}{\lambda} \right) + Z_0} \quad (54.68)$$

Se observă că o linie electrică fără pierderi acționează ca un transformator de impedanțe.

În cazul particular când $l = \frac{\lambda}{4}$ (linia în sfert de undă), se obține :

$$\underline{Z}_1 = \frac{Z_0^2}{\underline{Z}_2} \quad (54.69)$$

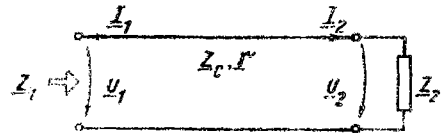


Fig. 54.3

O sarcină pur capacitivă determină, în acest caz, o impedanță de intrare inductivă, și invers (v. fig. 54.4, a și b).

54.3.2. Linia adaptată. Se cere valoarea impedanței de sarcină, care asigură anularea componentelor inverse de tensiune și de curent. Din ecuațiile (54.51), cu $x = l$ și $\underline{U}_2 = 0$, se obține :

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{d0} e^{-\gamma l} \quad \text{și} \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{d0}}{\underline{Z}_c} e^{-\gamma l},$$

de unde $\underline{U}_2 = \underline{Z}_c \underline{I}_2$. Cum $\underline{Z}_2 = \underline{U}_2 / \underline{I}_2$, rezultă :

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_c \quad (54.70)$$

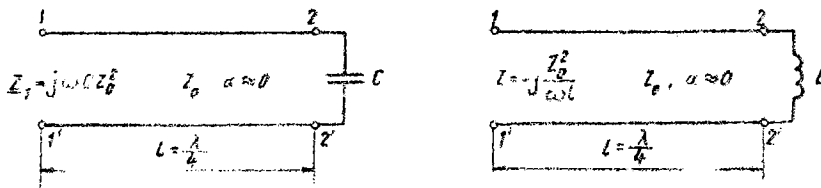


Fig. 54.4

Înlocuind această valoare în ecuația (54.67), se observă imediat că și impedanța de intrare rezultă egală cu $\underline{Z}_c$ (respectiv cu $\underline{Z}_2$),

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_c$$

și, ținând seama de această relație, din ecuațiile liniilor (54.57) se obține :

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_1 e^{-\gamma x}; \quad \underline{I}(x) = \underline{I}_1 e^{-\gamma x} = \frac{\underline{U}(x)}{\underline{Z}_c} \quad (54.71)$$

Condiția (54.69) e deci necesară și suficientă pentru anularea undelor inverse de tensiune și de curent în orice punct al liniei. În cazul când această condiție e realizată, linia se numește *adaptată* și raportul dintre tensiune și curent e egal cu impedanța caracteristică în orice punct al liniei.

54.3.3. Linia fără distorsiuni. Dacă o linie e adaptată (rel. 54.70) și nu prezintă dispersiune, adică dacă satisface și condiția lui Heaviside (54.45), pe linie se propagă numai unde directe, cu aceeași viteză, oricare ar fi frecvența lor, ceea ce asigură lipsa oricărei distorsiuni la transmiterea semnalelor nesinusoidale. De aceea, condițiile (54.45) și (54.70) caracterizează *linia fără distorsiuni*, pentru care, din relațiile (54.71), (54.46) și (54.47) rezultă :

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_0 e^{-G_0 Z_0 x} e^{-j \frac{\omega}{v_0} x} = \underline{Z}_0 \underline{I}(x) \quad (54.72)$$

$$u(x, t) = Z_0 i(x, t) = U \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v_0} \right) \right] \quad (54.73)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}} \quad v_0 = 1/\sqrt{L_l C_l}, \quad G_l Z_0 = \sqrt{\frac{R_l}{L_l}} \quad \frac{R_l}{Z_0} \text{ și } \underline{U}_1 = U_1 e^{j\psi_1}$$

CONDUCTOARE MASIVE

55. CÎMPUL ELECTROMAGNETIC ÎN CONDUCTOARE MASIVE

Studiul circuitelor electrice de curent variabil a fost făcut în cadrul a două aproximații fundamentale (v. cap. 31): caracterul evasistaționar al regimului de funcționare și caracterul filiform al conductoarelor care constituie circuitul. În studiul liniilor electrice lungi (cap. 53 și cap. 54) se înlătură (în cea mai mare parte) aproximația regimului evasistaționar, dar se menține, de fapt, ipoteza caracterului filiform al conductoarelor. În cele ce urmează se vor prezenta câteva probleme, în care se ia în considerare repartitia curentului în cuprinsul conductoarelor, adică se renunță la aproximația caracterului filiform. În schimb se menține ipoteza regimului evasistaționar, adică

neglijază densitatea curentului de deplasare $J_D = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}$ pe lângă densitatea curentului de conducție $J = \sigma E$. Cît timp se studiază materiale conductoare propriu-zise (metale), care au conductivitatea $\sigma > 10^6 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$, ipoteza regimului evasistaționar e pe deplin justificată în toate problemele tehnice relative la studiul cîmpului electromagnetic *din interiorul lor*.

În adevăr, admitînd o variație sinusoidală cu frecvența $f = \frac{\omega}{2\pi}$ a mărimilor, densitatea curentului de deplasare are valoarea efectivă $J_D = \varepsilon \omega E$, iar densitatea curentului de conducție are valoarea efectivă $J = \sigma E$. Regimul evasistaționar e realizat dacă $J_D \ll J$, adică dacă $\omega \ll \sigma$, de unde rezultă pentru pulsația de lucru condiția:

$$1 \quad (55.1)$$

τ fiind așa-numitul *timp de relaxare* al materialului.

Cu valor 10^6 cu $\varepsilon \approx \varepsilon_0$ $\frac{1}{36 \pi} \cdot 10^{-9}$ și cu $\omega = 2\pi f$ se obține acoperitor

$$f \ll 10^{16} \text{ Hz.}$$

Cele mai mari frecvențe utilizate azi în tehnică fiind de ordinul a $10\,000 \text{ MHz} = 10^{10} \text{ Hz}$, condiția aceasta e totdeauna satisfăcută. De aceea, chiar în regimul general variabil al undelor electromagnetice (v. cap. 57), în care se renunță în general și la aproximația regimului evasistaționar și la aceea a circuitelor filiforme, se neglijează curentul de deplasare în mediile de conductivitate ridicată, cum sînt metalele.

55.1. Ecuațiile câmpului electromagnetic în conductoare masive

55.1.1. Ecuațiile lui Maxwell pentru conductoare masive. Rezolvarea problemelor repartiției curentului în conductoare masive și a pierderilor prin efect Joule-Lenz corespunzătoare se poate face numai pe baza legilor câmpului electromagnetic și, în particular, pe baza ecuațiilor lui Maxwell (par. 29.2, vol. I). Aceste ecuații sînt :

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (55.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (55.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_v \quad (55.4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (55.5)$$

și reprezintă (în ordinea de mai sus) forma locală a *legii circuitului magnetic* în corpuri imobile, forma locală a *legii inducției electromagnetice* în medii imobile, forma locală a *legii fluxului electric* și forma locală a *legii fluxului magnetic*. Într-un mediu de permeabilitate μ , de permitivitate ϵ și de conductivitate $\sigma = \frac{1}{\rho}$ (unde ρ e rezistivitatea) și fără cîmp electric imprimat (cîmpul electric imprimat E_i e, în general, constant și nu prezintă interes în regim variabil), ecuațiile de mai sus se completează cu relațiile de material :

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E}, \quad (55.6)$$

care rezultă respectiv din legea magnetizării temporare, legea polarizației electrice temporare și legea conducției electrice (Ohm). În medii omogene, mărimile ϵ , μ și σ sînt constante. Introducînd relațiile (55.6) în primele două ecuații ale lui Maxwell și neglijînd densitatea curentului de deplasare $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, în conformitate cu cele arătate mai înainte, se obțin relațiile :

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \sigma \mathbf{E} = \mathbf{J} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{aligned}} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (55.7)$$

care reprezintă *ecuațiile fundamentale ale câmpului electromagnetic în conductoare masive omogene*. Luînd divergența primei ecuații și ținînd seama de ultima ecuație a lui Maxwell, mai rezultă că cei trei vectori cîmp $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ și $\mathbf{J}$ sînt, în acest caz, solenoidali :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{J} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (55.8)$$

Luînd rotorul fiecăreia dintre ecuațiile (55.7), folosind identitatea

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{G} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{G}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{G}) - (\nabla \nabla) \mathbf{G} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{G} - \Delta \mathbf{G}, \quad (55.9)$$

în care

$$\Delta \equiv \text{div grad} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (55.9')$$

operatorul laplacean și eliminând câte una dintre funcțiunile necunoscute, se obțin ecuațiile de ordinul al doilea, satisfăcute de vectorii câmp $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{J}$,

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathbf{H} &= \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; & \Delta \mathbf{B} &= \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \Delta \mathbf{J} &= \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}; & \Delta \mathbf{E} &= \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (55.10)$$

În problemele de determinare a cîmpului trebuie să se observe că ecuațiile de ordinul doi de mai sus au soluții care sînt legate între ele prin ecuațiile de ordinul întâi (55.7). Ele trebuie completate, la suprafețe de discontinuitate, cu condițiile de conservare a componentelor tangențiale ale vectorilor $\mathbf{E}$ și $\mathbf{H}$ (v. par. 21.4 și 22.4, vol. I):

$$E_{t_1} = E_{t_2}, \quad H_{t_1} = H_{t_2} \quad (55.11)$$

și a componentelor normale ale vectorilor $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ și $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ (v. par. 12.2.3 și 20.2, vol. I)

$$\mu_1 H_{n_1} = \mu_2 H_{n_2}, \quad \sigma_1 E_{n_1} = \sigma_2 E_{n_2} \quad (55.12)$$

Observații: a) În cele ce urmează vom studia numai probleme referitoare la regimul permanent sinusoidal, în care se poate utiliza și reprezentarea în complex, care, în cazul vectorilor, se aplică fiecărei componente în parte, conducînd la vectori complecși, funcții numai de punct. Dacă $\underline{\mathbf{E}}$, $\underline{\mathbf{H}}$ și $\underline{\mathbf{J}}$ sînt imaginile în complex ale vectorilor $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ și $\mathbf{J}$, ecuațiile (55.7) se reprezintă în complex sub forma:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \underline{\mathbf{H}} &= \sigma \underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{J}} \\ \text{rot } \underline{\mathbf{E}} &= -j \omega \underline{\mathbf{H}} \end{aligned} \right\} \quad (55.13)$$

b) Principalele clase de probleme de cîmp electromagnetic care interesează în tehnică sînt următoarele:

- *problemele de curenți turbionari* (sau Foucault), în care se studiază curenții induși într-un conductor masiv de un cîmp magnetic variabil în timp;
- *problemele de efect pelicular* (curenți de aducție), în care se studiază repartitia neuniformă a unui curent alternativ dat pe secțiunea conductorului străbătut de acest curent;
- *problemele de efect de proximitate*, în care se studiază modificarea repartitiei unui curent alternativ dat pe secțiunea conductorului, sub acțiunea cîmpului magnetic al altor conductoare vecine.

În cele ce urmează vom studia: o problemă idealizată — aceea a semi-spațiului conductor (par. 55.2), a cărei soluție permite rezolvarea aproximativă a problemelor de mai sus, în cazul frecvențelor foarte înalte; probleme de curenți turbionari (par. 55.3) și probleme de efect pelicular (cap. 56).

55.1.2. Puterea activă disipată prin efect Joule-Lenz în regim periodic. În problemele de cîmp electromagnetic, în conductoare masive interesează puterea disipată prin efect Joule-Lenz, într-o porțiune V_2 a unui mediu

conductor, mărginită de o suprafață Σ . Conform legii transformării de energie în conductori (XI, par. 31.1), valoarea instantanee a acestei puteri este

$$P_J(t) = \iiint_{V_\Sigma} \mathbf{E} \mathbf{J} \, dv = \iiint_{V_\Sigma} \rho \mathbf{J}^2 \, dv = \iiint_{V_\Sigma} \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}^2 \, dv. \quad (55.14)$$

Conform teoremei energiei electromagnetice (v. par. 29.4, vol. I, rel. 29.35), această putere mai poate scrie :

$$P_J(t) = -\frac{dW(t)}{dt} + \iint_{\Sigma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\mathbf{A}_{int} \quad (55.15)$$

unde primul membru variația energiei electromagnetice instantanee localizate în V_Σ , iar al doilea membru e fluxul de energie instantaneu din exteriorul spre interiorul suprafeței Σ (am operat cu normala interioară $d\mathbf{A}_{int} = -d\mathbf{A}$, unde $d\mathbf{A}$ e elementul de arie, orientat spre exterior), adică fluxul vectorului Poynting instantaneu

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (55.15')$$

În regim permanent periodic interesează numai valoarea medie pe o perioadă a acestor expresii, adică puterea activă disipată prin efect Joule-Lenz în conductor

$$P = \overline{P_J(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T P_J(t) \, dt.$$

Deoarece în acest regim și energia electromagnetică e o funcțiune periodică $W(t) = W(t + T)$, media derivatei energiei electromagnetice e nulă :

$$\overline{\frac{dW(t)}{dt}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dW}{dt} \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T dW = \frac{1}{T} [W(T) - W(0)] = 0. \quad (55.16)$$

Rezultă atunci, cu relația (55.14) și (55.15), că puterea activă disipată prin efect Joule-Lenz se poate calcula în două moduri :

— fie prin integrala de volum a mediei puterii dezvoltate în unitatea de volum :

$$P = \overline{P_J(t)} = \iiint_{V_\Sigma} \rho \mathbf{J}^2 \, dv = \iiint_{V_\Sigma} \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}_J^2 \, dv \quad (55.17)$$

— fie prin integrala de suprafață a mediei vectorului Poynting (afluxul de energie mediu) :

$$P = \overline{P_J(t)} = \iint_{\Sigma} (\overline{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}) d\mathbf{A}_{int} \quad (55.17')$$

1.2. Pătrunderea cîmpului electromagnetic în semispațiul conductor infinit

Considerăm un bloc de material conductor, de permeabilitate μ și conductivitate σ , limitat spre stînga de o față plană, teoretic infinit extinsă, și ocupînd întregul semispațiu drept (fig. 55.1). Alegem un sistem de axe cartezian, ca în figură, cu axa Ox normală pe fața blocului și dirijată spre interior.

Se cere să se studieze pătrunderea cîmpului electromagnetic și repartiția curentului în acest semispațiu conductor, știind că la suprafața lui e stabilit în exterior un cîmp magnetic omogen tangențial H_0 (cîrui orientare e aleasă cu axă Oz), care variază sinusoidal timp (origine de fază):

$$H_0 = kH_0(t), \quad \text{cu} \\ H_0(t) = H_{0max} \sin \omega t. \quad (55.18)$$

Se studiază numai regimul permanent și se consideră că, datorită extinderii infinite a blocului în direcțiile Oy și Oz

și a caracterului omogen al cîmpului magnetic la suprafața lui, toate mărimile de stare locală au aceeași valoare în toate punctele oricărui plan $x = \text{const.}$, paralel cu fața blocului. Altfel spus, toate aceste mărimi sînt funcțiuni numai de x și de t , adică în interiorul blocului:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(x, t); \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}(x, t); \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}(x, t). \quad (55.19)$$

55.2.1. Repartiția cîmpului și a curentului. Deoarece la suprafața blocului se conservă componentele tangențiale ale cîmpului $\mathbf{H}$, valoarea acestuia în interior pentru $x \rightarrow 0$ trebuie să fie egală cu cîmpul tangențial exterior (55.18)

$$\mathbf{H}(0, t) = \mathbf{H}_0 = k\mathbf{H}_0(t)$$

și putem admite că în oricare alt punct, $\mathbf{H}$ are numai componente după Oz , adică

$$\mathbf{H}(x, t) = k H_z(x, t), \quad (55.19')$$

$$H_z(0, t) = H_0(t) = H_{0max} \sin \omega t. \quad (55.20)$$

Din relațiile (55.10) rezultă atunci că în interiorul blocului această unică componentă a cîmpului magnetic satisface ecuația:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \sigma \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (55.21)$$

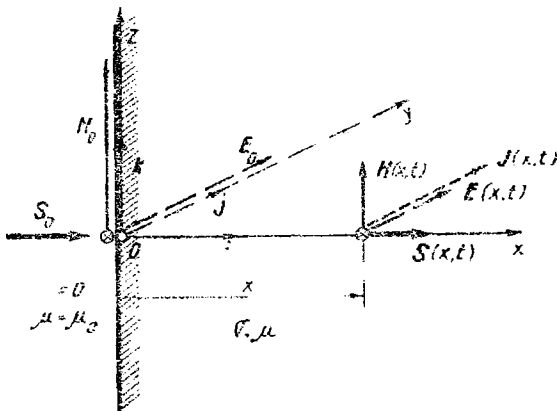


Fig.

În regim permanent sinusoidal, această ecuație se reprezintă în complex simplificat sub forma:

$$\frac{d^2 \underline{H}_z}{dx^2} = j \omega \mu \sigma \underline{H}_z = \underline{\gamma}^2 \underline{H}_z, \quad (55.22)$$

astfel că

$$H_z(x, t) = \text{Im} \{ \underline{H}_z \sqrt{2} e^{j\omega t} \}. \quad (55.23)$$

Ecuația (55.22) are forma ecuațiilor (54.10), studiate în teoria liniilor electrice lungi. În acest caz, *constanta de propagare* este:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{j \omega \mu \sigma} = \alpha (1 + j) = \sqrt{2} \alpha e^{j \frac{\pi}{4}} \quad (\alpha > 0), \quad (55.24)$$

deoarece $\sqrt{j} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + j)$. Se obține o constantă de atenuare egală cu constanta de fază:

$$\alpha = \text{Re} \{ \underline{\gamma} \} = \text{Im} \{ \underline{\gamma} \} = \frac{|\underline{\gamma}|}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}. \quad (55.25)$$

Cu aceste notații, soluția generală a ecuației (55.22) este analogă cu relația (54.12):

$$\underline{H}_z = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma} x} + \underline{A}_2 e^{+\underline{\gamma} x}$$

În acest caz, deoarece blocul conductor e presupus infinit extins ($0 \leq x \leq \infty$), unda inversă trebuie să se anuleze, pentru a avea câmp magnetic finit la $x \rightarrow \infty$, adică $\underline{A}_2 = 0$. Cu $x = 0$, $\underline{H}_z = \underline{H}_z(0) = \underline{A}_1$ rezultă soluția:

$$\underline{H}_z = \underline{H}_z(0) e^{-\underline{\gamma} x} \quad (55.26)$$

Dar

$$\underline{H}_z(0) = \underline{H}_0 = \frac{H_{0max}}{\sqrt{2}} \quad (55.27)$$

e imaginea complexă a câmpului magnetic de la fața blocului (55.20), așa că imaginea complexă a câmpului magnetic din interior, ținând seama și de relația (55.24), se scrie:

$$\underline{H}_z = \frac{H_{0max}}{\sqrt{2}} e^{-\alpha x} e^{-j\alpha x} = \frac{H_{0max}}{\sqrt{2}} e^{-\underline{\gamma} x}, \quad (55.28)$$

iar valoarea instantanee se scrie:

$$H_z(x, t) = H_{0max} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \alpha x). \quad (55.29)$$

Aceasta este o undă elementară directă, puternic atenuată, cu viteza de fază v și lungimea de undă λ , date de relațiile (v. par. 54.1.2):

$$v = \frac{\omega}{\alpha} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}; \quad \lambda = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\omega\mu\sigma}} \quad (55.30)$$

Densitatea de curent $\mathbf{J}$ și intensitatea cîmpului electric $\mathbf{E}$ se deduc din prima ecuație a lui Maxwell (55.7), observînd că, deoarece $\mathbf{H} = \mathbf{k} H_z(x, t)$, singurele componente nenule ale rotorului lui $\mathbf{H}$, și deci ale acestor vectori, sînt dirijate după Oy (adică paralel cu fața blocului și perpendicular pe direcția lui $\mathbf{H}$ (v. fig. 55.1) :

$$\mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} J_y(x, t); \quad \mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{J} = \mathbf{j} E_y(x, t). \quad (55.31)$$

Dezvoltînd rotorul lui $\mathbf{H}$ se obține cu relațiile (55.28) și (55.25) în complex

$$\left. \begin{aligned} \underline{J}_y(x) &= -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{H_{0max}}{\sqrt{2}} \alpha (1 + j) e^{-\gamma x} = \alpha H_{0max} e^{-\alpha x} e^{-j(\alpha x - \frac{\pi}{4})} \\ \underline{E}_y(x) &= \frac{1}{\sigma} \underline{J}_y(x) = \frac{H_{0max}}{\sqrt{2} \sigma} \alpha (1 + j) e^{-\gamma x} = \frac{\alpha}{\sigma} H_{0max} e^{-\alpha x} e^{-j(\alpha x - \frac{\pi}{4})} \end{aligned} \right\} \quad (55.32)$$

cu valorile instantanee

$$\left. \begin{aligned} J_y(x, t) &= \alpha H_{0max} \sqrt{2} e^{-\alpha x} \sin \left(\omega t - \alpha x + \frac{\pi}{4} \right) \\ E_y(x, t) &= \frac{\alpha}{\sigma} H_{0max} \sqrt{2} e^{-\alpha x} \sin \left(\omega t - \alpha x + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned} \right\} \quad (55.33)$$

defazate cu $\frac{\pi}{4}$ înaintea cîmpului magnetic (fig. 55.2).

Valoarea efectivă a intensității cîmpului electric la suprafața conductorului rezultă :

$$E_{0ef} = (E_y(0, t))_{ef} = \frac{\alpha}{\sigma} H_{0max} = \sqrt{2} \frac{\alpha}{\sigma} H_{0ef}, \quad (55.34)$$

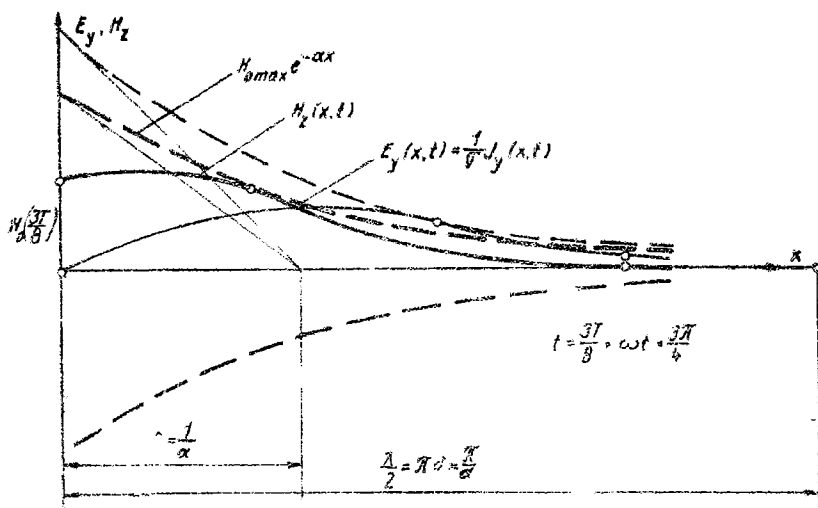


Fig. 55.2

unde $H_{0_{ef}} = \frac{H_{0_{max}}}{\sqrt{2}}$ e valoarea efectivă a intensității câmpului magnetic la suprafața conductorului.

55.2.2. Pierderile de putere. Deoarece $\mathbf{E} = jE_y$ și $\mathbf{H} = kH_z$, vectorul densității fluxului de energie, adică vectorul Poynting (55.15') e dirijat în sensul x -lor pozitivi (în care se propagă undele elementare $H_z(x, t)$ și $E_y(x, t)$),

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \times k E_y H_z = i E_y H_z = i S_x(x, t). \quad (55.35)$$

Cu relațiile (55.29) și (55.33) rezultă valoarea instantanee:

$$S_x(x, t) = H_{0_{max}}^2 \frac{\alpha}{\sigma} \sqrt{2} e^{-2\alpha x} \sin(\omega t - \alpha x) \sin\left(\omega t - \alpha x + \frac{\pi}{4}\right)$$

sau

$$S_x(x, t) = \frac{H_{0_{max}}^2}{\sqrt{2}} \frac{\alpha}{\sigma} e^{-2\alpha x} \left(\cos \frac{\pi}{4} - \cos\left(2\omega t - 2\alpha x + \frac{\pi}{4}\right) \right). \quad (55.36)$$

Așa cum știm, mărimea $S_x = |\mathbf{S}|$ reprezintă puterea instantanee transmisă prin unitatea de suprafață (a planelor $x = \text{const.}$). Acest aflux de energie provine de la câmpul electromagnetic exterior și scade rapid o dată cu pătrunderea în conductor. Deoarece în regim periodic energia electromagnetică a câmpului nu variază în medie (rel. 55.16), valoarea medie pe o perioadă a vectorului Poynting scade cu distanța x , datorită exclusiv faptului că acoperă pierderile locale de putere prin efect Joule-Lenz. Practic, aceste pierderi locale sînt importante numai aproape de suprafața blocului, unde $\alpha < \frac{1}{2x}$. Valoarea aportului de putere instantanee prin unitatea de suprafață a conductorului este

$$S_x(0, t) = S_0(t) = \frac{P(t)}{A} = \frac{H_{0_{max}}^2}{\sqrt{2}} \frac{\alpha}{\sigma} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \right)$$

și are ca medie în timp *puterea activă specifică* (primită prin unitatea de suprafață):

$$\frac{\overline{P(t)}}{A} = \frac{P}{A} = \boxed{\frac{H_{0_{max}}^2}{2} \frac{\alpha}{\sigma} = \frac{\alpha}{\sigma} H_{0_{ef}}^2 = \frac{\sigma}{2\alpha} E_{0_{ef}}^2}. \quad (55.37)$$

care acoperă pierderile medii de putere prin efect Joule-Lenz în conductor.

55.2.3. Adîncimea de pătrundere. Atît cîmpul electric și cel magnetic cît și densitatea de curent au valori importante numai în vecinătatea suprafeței conductorului, valorile lor efective scăzînd exponențial o dată cu depărtarea de la suprafața conductorului. Din relațiile (55.33) rezultă:

$$J_{y_{ef}}(x) = \alpha H_{0_{max}} e^{-\alpha x} \quad (55.38)$$

(v. curba plină din fig. 55.3).

Se numește *adâncime de pătrundere* (sau adâncime echivalentă de pătrundere) a cimpului electromagnetic în semispațiul conductor distanța δ de la suprafața acestui semispațiu, pe care ar trebui repartizat în mod uniform și sinfazic curentul total, pentru ca pierderile de putere activă să fie aceleași.

Curentul total înălțimea a (în sensul Oz) este în complex cu relațiile (55.32)

$$I = \int_0^{\infty} J_z(x) a \, dx = a \int_0^{\infty} \frac{\partial H_z}{\partial x} \, dx = a(H_z(0) - H_z(\infty)) = aH_0$$

are valoarea efectivă

$$I = aH_{0ef} = \frac{a}{\sqrt{2}} H_{0max} \quad (55.39)$$

Dacă ar fi repartizat uniform și sinfazic pe grosimea δ , ar avea o densitate de curent echivalentă (efectivă):

$$J_{yechivalent} = \frac{I}{a\delta} = \frac{H_{0max}}{\delta} \quad (55.40)$$

(v. curba punctată din fig. 55.3).

Valoarea adâncimii de pătrundere se obține egalînd pierderile reale de putere activă cu cele care s-ar obține cu repartiția uniformă a curentului în stratul de grosime δ .

Pentru o porțiune dreptunghiulară de arie $A = ab$ din fața blocului (v. fig. 55.4), puterea activă de pierderi absorbită de la cîmp este (cu 55.37)

$$P = \left(\frac{P}{A} \right) ab = \frac{a}{\sigma} \frac{H_{0max}^2}{2} ab. \quad (55.41)$$

Dacă curentul (55.39) ar fi uniform repartizat pe grosimea δ , ar determina în volumul paralelipipedic $a \cdot \delta \cdot b$, corespunzător ariei A (v. fig. 55.4), pierderile de putere:

$$P = RI^2 = \frac{1}{\sigma} \frac{b}{a\delta} \frac{a^2 H_{0max}^2}{2} = \frac{ab}{\sigma\delta^2} H_{0max}^2 \quad (55.42)$$

Egalînd aceste valori, rezultă pentru adâncimea de pătrundere expresia:

$$\delta = \frac{1}{\sigma} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu \sigma}} = \frac{\lambda}{2\pi}. \quad (55.43)$$

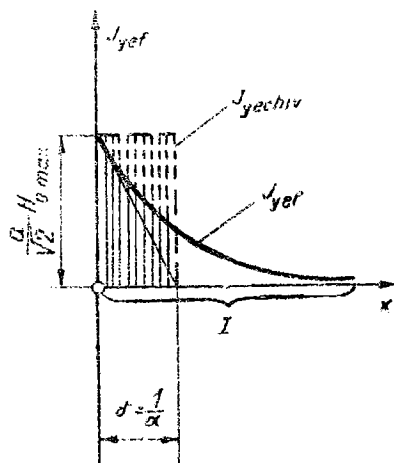


Fig.

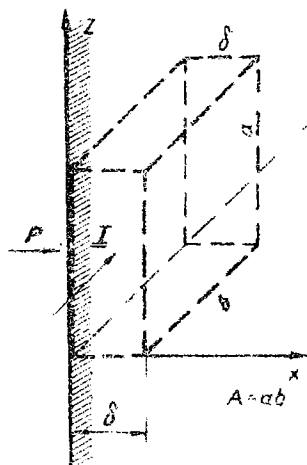


Fig. 55.4

Din această relație rezultă că adâncimea de pătrundere e o caracteristică a materialului, invers proporțională cu rădăcina pătrată a frecvenței. Această caracteristică e utilă atât pentru calculul pierderilor de putere (ca și cum întregul curent ar fi repartizat uniform la suprafața blocului pe grosimea δ), cât și pentru a aprecia cu aproximație pătrunderea câmpului electromagnetic în mediul conductor: pentru $x = \delta$ cîmpurile H_x , E_y , J_y scad de $e \approx 2,718$ ori, iar vectorul Poynting de $e^2 \approx 7,389$ ori. În tabela 55.1 sînt indicate cîteva valori ale adâncimii de pătrundere.

Observație: Teoria dezvoltată aici e riguros exactă numai pentru semispațiul conductor infinit. În cazul unui conductor oarecare finit, dacă dimensiunile și raza de curbă minimă a suprafeței lui sînt foarte mari față de adâncimea de pătrundere corespunzătoare frecvenței de lucru, această teorie se poate aplica local cu bună aproximație, permițînd calculul pierderilor de putere activă, care revin unității de suprafață, cu formula (55.37), în funcție de valoarea efectivă a cîmpului magnetic exterior tangențial (sau a celui electric). În acest caz se mai spune că pierderile au fost calculate cu metoda adâncimii de pătrundere. Deoarece adâncimea de pătrundere e invers proporțională cu rădăcina pătrată a frecvenței de lucru, la frecvențe suficient de înalte se poate întotdeauna aplica această metodă. În cazul unui conductor cilindric de cupru, de rază $a = 2$ mm, la $f = 50$ Hz, $\delta \approx 1$ cm $> a$ (v. tabela 55.1) și nu se poate face nici un fel de analogie cu problema semispațiului conductor infinit; la frecvența $f = 0,5$ MHz însă $\delta \approx 0,1$ mm $\ll a$ și suprafața exterioară a conductorului cu o rază de curbă mult mai mare decît adâncimea de pătrundere poate fi asimilată cu suprafața semispațiului conductor (v. și par. 56.3).

Tabela 55.1

Materialul	σ [$\Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$]	μ [$\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$]	δ [m]		
			$f = 50$ Hz	$f = 5000$ Hz	$f = 0,5$ MHz
Cupru	$57 \cdot 10^6$	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ $200 \mu_0$	$9,5 \cdot 10^{-3}$	$0,95 \cdot 10^{-3}$	$0,095 \cdot 10^{-3}$
Fier (cu $\mu_r \approx 200$)	$10 \cdot 10^6$		$1,8 \cdot 10^{-3}$	$0,18 \cdot 10^{-3}$	$0,018 \cdot 10^{-3}$
Apa de mare (valori indicative)	~ 5		30	3	
Sol (valori indicative)	$\sim 10^{-2}$		750	~ 75	

55.3. Probleme de curenți turbionari

Se numesc *curenți turbionari* sau *curenți Foucault*, curenții induși într-un conductor masiv de un cîmp magnetic variabil în timp.

În aplicațiile tehnice, curenții turbionari apar în miezurile feromagnetice ale circuitelor magnetice din mașinile și aparatele electrice de curent alternativ, determinînd pierderi suplimentare de putere prin efect Joule-Lenz

(v. și par. 49.4.3.) și înrăutățind funcționarea acestor mașini și aparate. Totodată, există numeroase aplicații utile ale acestor curenți: încălzirea electrică prin inducție (în care se utilizează puterea dezvoltată de acești curenți pentru a încălzi și chiar pentru a topi conductorul), frânele și ambreiajele electromagnetice de inducție (în care se utilizează forțele pe care cimpul magnetic le exercită asupra conductorului parcurs de acești curenți) etc.

Deoarece, prin apariția curenților turbionari și a cimpului magnetic suplimentar, produs de acești curenți (numit și cimp magnetic de reacțiune al curenților turbionari), repartiția cimpului magnetic în cuprinsul conductorului este mai mult sau mai puțin influențată, revolvarea exactă a acestor probleme necesită utilizarea ecuațiilor generale (55.6). În cazurile limită ale frecvențelor joase (cimp magnetic de reacțiune neglijabil) și ale frecvențelor înalte (adâncime de pătrundere mică față de dimensiunile conductorului) se utilizează metode aproximative, așa cum arătăm în cele ce urmează.

55.3.1. Pierderi prin curenți turbionari în tole feromagnetice. Miczul feromagnetic al unui circuit magnetic, cu o înfășurare de curent alternativ (fig. 55.5, *a*), e străbătut de un flux magnetic $\Phi = \Phi_m \sin \omega t$, sub acțiunea căruia se induc curenți cu liniile de curent conținute în plane transversale față de liniile cimpului magnetic (în fig. 55.5, *a* sînt indicate sensurile de referință pentru acești curenți, de densitate J sensurile reale instantanee depinzînd de momentul din perioadă considerat). Pentru a reduce pierderile de putere determinate de acești curenți (pierderile din fier prin curenți turbionari), se divizează miezul în tole izolate între ele (v. fig. 55.5, *b*, unde pentru claritatea desenului, s-au figurat numai trei tole) ceea ce mărește rezistența căilor de închidere ale acestor curenți și reduce intensitatea lor. Considerăm o astfel de tolă (fig. 55.6) de înălțime h , de lățime l și de grosime Δ foarte mică

$$\Delta \ll l, \quad \Delta \ll h \quad (55.44)$$

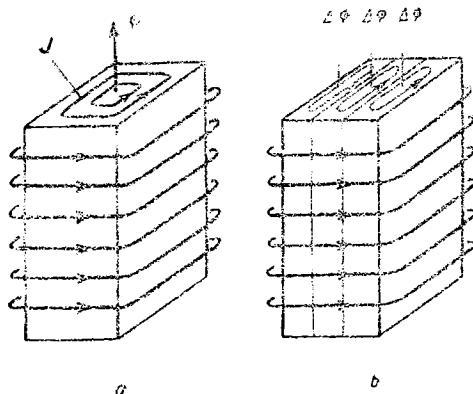


Fig. 55.5

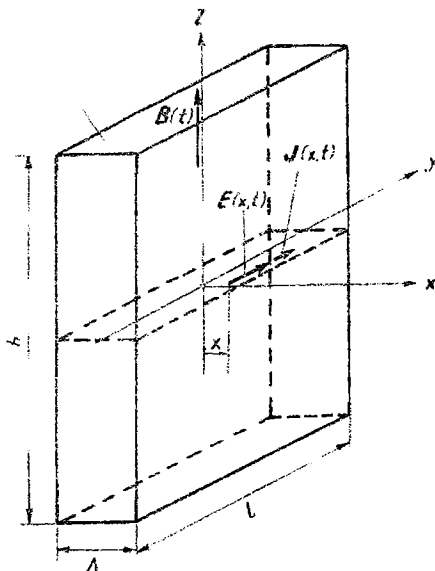


Fig. 55.6

și determinăm puterea activă dezvoltată în tolă de curenții induși, în ipoteza că se neglijează câmpul magnetic de reacțiune al acestor curenți. În acord cu această ipoteză și alegând axele ca în figura 55.6, inducția magnetică în tolă e un câmp omogen, dirijat după axa Oz

$$\mathbf{B} = k\mathbf{B}_z(t), \quad (55.45)$$

cu valoarea instantanee și reprezentarea complexă

$$B_z(t) = B \sin \omega t \iff \underline{B}_z = \frac{B_{max}}{\sqrt{2}} \quad (55.46)$$

Deoarece tola e foarte subțire (v. rel. 55.44), o putem considera infinit extinsă, din punctul de vedere al repartiției curentului în zona ei centrală (adică neglijând întoarcerea liniilor de curent la marginile ei). Putem admite atunci că densitatea de curent $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, care la fețele $x = \pm \frac{\Delta}{2}$ trebuie să fie tangențială, e dirijată în sensul axei Oy și depinde numai de variabila spațială x :

$$\mathbf{J} = j J_y(x, t), \quad \mathbf{E} = j E_y(x, t), \quad (55.47)$$

cu valorile instantanee și reprezentările în complex

$$J_y(x, t) = \sigma E_y(x, t) \iff \underline{I}_y(x) = \sigma \underline{E}_y(x). \quad (55.48)$$

Intensitatea câmpului electric indus în tolă $\mathbf{E}$ se poate calcula din inducția magnetică $\mathbf{B}$ cu ajutorul celei de-a doua ecuații a lui Maxwell (v. a doua rel. 55.7), care reprezintă forma locală a legii inducției electromagnetice. Reținând numai singura componentă nenulă a acestei ecuații (după Oz) se obține:

$$\frac{\partial E_y(x, t)}{\partial x} = - \frac{\partial B_z(t)}{\partial t} \quad (55.49)$$

sau, în complex,

$$\frac{d \underline{E}_y(x)}{dx} = -j \omega \underline{B}_z = -j \omega \frac{B_{max}}{\sqrt{2}} \quad (55.50)$$

Integrând,

$$\underline{E}_y(x) = -j \omega \frac{B_{max}}{\sqrt{2}} x + \text{const.} \quad (55.51)$$

Constanta de integrare este nulă, deoarece, din motive de simetrie,

$$\underline{E}_y(-x) = -\underline{E}_y(x) \quad (55.52)$$

și rezultă cu (55.48),

$$\underline{I}_y(x) = -j \omega \sigma \frac{B_{max}}{\sqrt{2}} x = \omega \sigma \frac{B_{max}}{\sqrt{2}} \quad (55.53)$$

valoarea instantanee :

$$J_y(x, t) = \omega \sigma B_m x \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (55.54)$$

Curenții induși sînt proporționali cu frecvența, sînt defazați în urma fluxului magnetic cu $\frac{\pi}{2}$ (așa cum am admis și la studiul ciclului de magnetizare al bobinei cu miez de fier) și variază liniar (cu x) în grosimea tolei. Densitatea de volum a puterii instantanee disipate prin efect Joule rezultă :

$$p_j(x, t) = \frac{1}{\sigma} J_y^2(x, t) = \omega^2 \sigma B_m^2 \frac{x^2}{2} (1 + \cos 2\omega t). \quad (55.55)$$

Puterea instantanee disipată în întreaga toală se obține prin integrare cu $l \, h \, dx$,

$$P_j(t) = \iiint p_j(x, t) \, dv = lh\omega^2 \sigma \frac{B_{max}^2}{2} (1 + \cos 2\omega t) \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} x^2 \, dx$$

$$P_j(t) = lh\omega^2 \sigma \frac{B_{max}^2}{24} \Delta^3 (1 + \cos 2\omega t). \quad (55.56)$$

Puterea activă disipată de curenții turbionari în toală se obține luînd media pe o perioadă a acestei expresii. Cu $\omega = 2\pi f$ rezultă :

$$\tilde{P}_j(t) = (\Delta lh) \frac{\pi^2}{6} \sigma B_{max}^2 \Delta^2 [f]. \quad (55.57)$$

Pierderile specifice prin curenți turbionari (adică pierderile pe unitatea de volum a tolei) se calculează împărțind această putere la volumul $\Delta \, l \, h$ al tolei. Înlocuind și conductivitatea $\sigma = \frac{1}{\rho}$ în funcție de rezistivitate, obține expresia

$$P_j = \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{\rho} \Delta^2 f^2 B_{max}^2 \left[\frac{W}{m^3} \right], \quad (55.58)$$

utilizată în studiul bobinei cu miez de fier (rel. 49.68).

Observații: a) Aceste pierderi au fost calculate la frecvențe suficient de joase, pentru a neglija cîmpul magnetic al curenților induși. Cum această aproximație corespunde neglijării variației cîmpului magnetic în cuprinsul tolei, rezultă, prin comparație cu studiul cîmpului în semispațiul conductor, că această aproximație corespunde cazului cînd grosimea tolei e foarte mică față de adîncimea de pătrundere :

$$\Delta \ll \delta \quad \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \quad (55.59)$$

În practică, la $f = 50$ Hz, în fier $\delta \approx 1...2$ mm, iar tolele au $\Delta = 0,5$ mm și 0,35 mm. Studiul exact arată că în aceste cazuri aproximația de mai sus e satisfăcătoare.

b) Pierderile sînt proporționale cu pătratul frecvenței, cu pătratul inducției maxime și cu pătratul grosimii tolei. La frecvență și tole date, proiectantul aparatelor și mașinilor electrice trebuie să asigure o inducție maximă compatibilă cu pierderi admisibile.

c) Pierderile sînt invers proporționale cu rezistivitatea tolelor. De aceea se utilizează tole cu rezistivitatea sporită, prin îmbogățirea fierului cu siliciu. Se ajunge astfel la pierderi prin curenți turbionari sub 1 W/kg pentru B_{max} de ordinul a 1 tesla (10^4 gauss). În practică interesează însă pierderile totale, care includ și pierderile prin isterezis cu valori de același ordin de mărime.

55.3.2. Încălzirea prin inducție la frecvențe înalte. În numeroase probleme de încălzire superficială prin inducție — cum sînt topirea unor șarje în cuptoare de inducție fără fier (S în fig. 55.7, a) sau călirea superficială a unor piese cilindrice (F în fig. 55.7, b), sub acțiunea

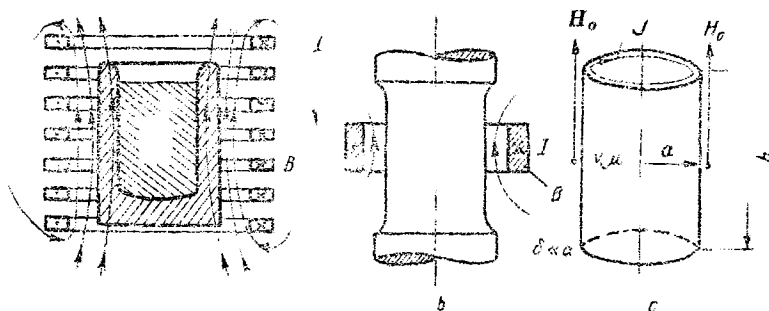


Fig. 55.7

unui cîmp magnetic de frecvență relativ înaltă (din punctul de vedere al pătrunderii cîmpului în materialul conductor încălzit), produs de o bobină inductoare B — se poate admite urmărirea schematizată (fig. 55.7, c): un corp conductor cilindric, de rază a și înălțime h e supus acțiunii unui cîmp magnetic tangențial sinusoidal

$$H_0(t) = H_{0max} \sin \omega t = H_{0ef} \sqrt{2} \sin \omega t. \quad (55.60)$$

În corpul conductor, de conductivitate σ și permeabilitate μ , se induc curenți turbionari și se cere puterea activă totală disipată de acești curenți. Dacă frecvența e suficient de înaltă, pentru ca adîncimea de pătrundere a cîmpului să fie mică față de raza conductorului

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \ll a, \quad (55.61)$$

curenții turbionari au linii de cîmp circulare, localizate în imediata apropiere a suprafeței conductorului. Încălzirea e deci superficială, dar căldura se transmite prin conducție și restului conductorului, dacă timpul de încălzire e suficient de mare (cazul topirii unei șarje în cuptoare). Adîncimea de pătrundere fiind mică, se poate calcula puterea cu formula (55.37) de la semispațiul conductor, considerînd cîmpul omogen repartizat (ceea ce reprezintă o primă aproximație) pe întreaga suprafață laterală

$$P = \left(\frac{P}{A} \right) \cdot 2\pi ah = 2\pi ah \frac{\alpha}{\sigma} H_{0ef}^2. \quad [W] \quad (55.62)$$

Cîmpul exterior H_0 trebuie calculat separat, ținînd seama de configurația bobinei inductoare care îl produce. În cazul din figura 55.7, a , în care bobina e un solenoid drept, suficient de lung, cu N , spire pe unitatea de lungime, parcurs de curențul efectiv I , se poate scrie (v. par. 21.5.1, vol. I):

$$H_{0ef} = N \cdot I \left[\frac{As}{m} \right] \quad (55.63)$$

56. || EFECTUL PELICULAR

Dacă un curent variabil $i(t)$ parcurge un conductor cilindric rectiliniu (fig. 56.1), repartitia curentului nu se mai face uniform pe secțiunea conductorului, ca în regim staționar (în curent continuu). În regim variabil, densitatea de curent are valori mai mici în axul conductorului și mai mari la periferia secțiunii acestuia. Acest fenomen se numește *efect pelicular* (sau *efect skin* — de la cuvântul skin — piele, în limba engleză) sau *efect de refulare a curentului* și are următoarele consecințe: sporirea pierderilor de putere prin efect Joule-Lenz în conductor (pierderi, care fiind proporționale cu pătratul densității de curent, sînt minime la repartitia uniformă a aceluiași curent total), sporirea rezistenței echivalente a conductorului, reducerea inductivității lui interioare și dependența tuturor acestor mărimi de frecvența de lucru.

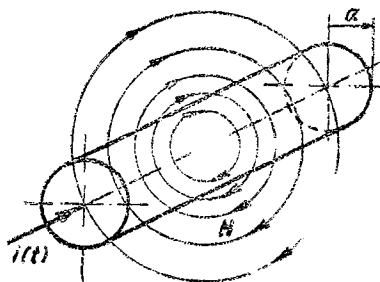


Fig. 56.1

56.1 Problemele efectului pelicular

56.1.1. Analiza calitativă și interpretarea efectului pelicular. Modificarea repartitiei curentului alternativ pe secțiunea conductorului o dată cu creșterea frecvenței se datorește curenților suplimentari, induși de cîmpul magnetic variabil în timp din interiorul conductorului.

Din punctul de vedere al pătrunderii cîmpului electromagnetic în conductoare (par. 55.2), efectul pelicular se poate analiza în funcție de raportul dintre raza a a conductorului și adîncimea de pătrundere δ .

$$\frac{a}{\delta} = \alpha = a\sqrt{\pi f \sigma \mu}. \quad (56.1)$$

În curent continuu, acest raport e nul ($f = 0$) și curentul se repartizează uniform pe secțiune (v. fig. 56.2, unde se reprezintă valoarea efectivă a densității de curent ca funcție de raza conductorului, cazul a).

La frecvențe suficient de joase, astfel ca $\delta \gg a$ și $\frac{a}{\delta} \ll 1$, pătrunderea cîmpului electromagnetic în conductor începe să fie incompletă și densitatea de curent e mai mică în ax (fig. 56.2, b). Aceasta e *efectul pelicular slab*, în care, în primă aproximație, se poate neglija cîmpul magnetic suplimentar al curenților induși (v. par. 56.2).

La frecvențe mai înalte, adîncimea de pătrundere scade și ajunge de același ordin cu raza conductorului, adică $\delta \approx a$ și $\frac{a}{\delta} \approx 1$. În acest caz, pătrunderea

cîmpului electromagnetic e parțială și efectul de refulare a curentului e important (fig. 56.2, c). Acesta e *efectul pelicular mediu*, în care determinarea repartiției curentului se poate face numai integrînd ecuațiile cîmpului (55.6), ceea ce conduce la calcule relativ complicate¹.

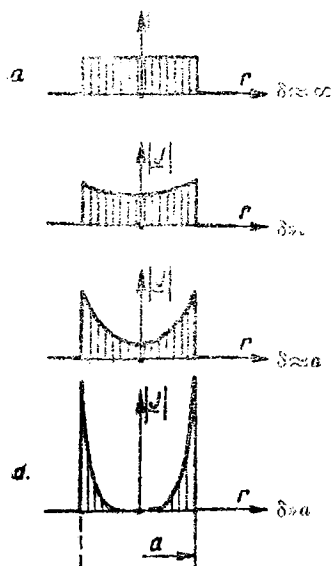


Fig. 56.2

La frecvențe foarte înalte, adîncimea pătrundere e foarte mică față de raza conductorului, adică $\delta \ll a$ și $\frac{a}{\delta} \gg 1$. În acest

cîmp electromagnetic pătrunde, practic, numai într-un strat superficial, de ordinul adîncimii de pătrundere, cu o repartiție practic identică cu aceea studiată în cazul semispațiului conductor infinit (fig. 56.2, d). Acesta e *efectul pelicular net* (sau pronunțat), care se studiază asimilînd suprafața conductorului cu aceea a unui semispațiu conductor (v. par. 56.3).

Din punctul de vedere al teoriei circuitelor electrice, efectul pelicular poate fi explicat, asimilînd conductorul masiv cu un ansamblu de conductoare tubulare concentrice, cu pereți suficient de subțiri, pentru ca în cuprinsul fiecăruia repartiția curentului să poată fi considerată uniformă. În acest caz, conductoarele din interior sînt înălțuite de mai multe linii de

cîmp magnetic, au o inductivitate mai mare și o impedanță mai mare și drept urmare — au un curent mai mic.

O analiză mai exactă se poate face în cazul simplu cînd conductorul studiat (fig. 56.1) e asimilat unui sistem de două conductoare concentrice (1) și (2), conectate în paralel (fig. 56.3).

Oricum s-ar considera închis prin exterior (curba Γ_{ex}) circuitul fiecăruia dintre aceste două conductoare, pentru a defini inductivitățile lor L_1 și L_2 , ele admit schema echivalentă din figura 56.4, în care apare și inductivitatea lor mutuală L_{12} și rezistențele lor R_1 și R_2 .

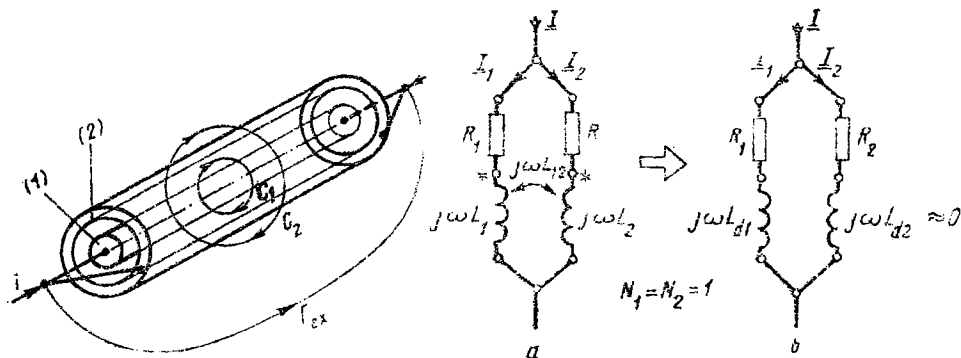


Fig.

F 56.4

V. R. Rădulescu, *Bazele teoretice ale electrotehnicii*, vol. IV, Efectul pelicular în conductorul cilindric, rezolvat prin metoda integrării ecuațiilor cîmpului.

Se observă că dacă se descompun fluxurile proprii (v. și par. 27.1, vol. I) care înălțuie aceste conductoare (prin suprafețe mărginite în exterior de Γ_{∞}) într-o parte utilă (corespunzătoare liniilor de cîmp care înălțuie și celălalt conductor) și o parte de dispersiune (corespunzătoare liniilor de cîmp care înălțuie numai conductorul considerat),

$$\Phi_{11} = \Phi_{u1} + \Phi_{d1}; \quad \Phi_{22} = \Phi_{u2} + \Phi_{d2}, \quad (56.2)$$

pot defini inductivitățile astfel

$$\left. \begin{aligned} L_{11} &= \frac{\Phi_{11}}{I_1} = \frac{\Phi_{u1}}{I_1} + \frac{\Phi_{d1}}{I_1} & I_1 &= L_{d1} \\ L_{22} &= \frac{\Phi_{22}}{I_2} = \frac{\Phi_{u2}}{I_2} + \frac{\Phi_{d2}}{I_2} & I_2 &= L_{d2} \end{aligned} \right\} \quad (L_{1u} \quad L_{2u}) \quad (56.3)$$

Pentru stabili repartiția curentului total în două conducte:

$$I = I_1 + I_2 \quad j\omega(L_{11})I_1 + j\omega(L_{22})I_2 = (R_1 + j\omega L_{d1})I_1 + j\omega L_{d2}I_2$$

din care

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= I \frac{R_2 + j\omega(L_{d2} - L_{12})}{R_1 + j\omega(L_{d1} + L_{d2} - 2L_{12})} \\ I_2 &= I \frac{R_1 + j\omega(L_{d1} - L_{21})}{R_2 + j\omega(L_{d1} + L_{d2} - 2L_{21})} \end{aligned} \right\} \quad (56.4)$$

Se constată că repartiția curentilor în cele două conductoare, echivalente cu două bobine cuplate magnetic și conectate în paralel, e hotărâtă de rezistențele lor și de reactanțele lor de dispersiune, în acord cu schema echivalentă mai simplă din figura 56.4, b.

În cazul celor două conductoare concentrice considerate mai sus, orice linie de cîmp (de ex. C_2 — fig. 56.3) care înălțuie conductorul (2), înălțuie și conductorul (1) din interiorul lui (2). Nu există deci flux de dispersiune a lui (2) față de (1), adică $L_{d2} = 0$. Există însă liniile de cîmp ale conductorului (1) care nu înălțuie pe (2), (de ex. C_1 — fig. 56.3). De aceea $L_{d1} \neq 0$. Cu aceste valori repartiția curentului, (56.4), devine

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1 + j\omega L_{d1}} \quad (56.5)$$

observă că cu cât frecvența e mai mare, cu atât acest raport diferă de valoarea corespunzătoare repartiției de curent continuu, curentul I_1 fiind mai mic. Dacă $\omega \rightarrow \infty$, $I_1 \rightarrow 0$ și $I_2 \rightarrow I$, adică întregul curent trece numai prin conductorul tubular exterior, în acord cu fenomenul de efect pelicular.

56.1. Rezistența echivalentă în curent alternativ și factorul în alternativ. În cazul efectului pelicular, circuitul nu mai poate fi considerat filiform și legea conducției electrice nu mai poate fi pusă sub forma relației (31.9), care pentru latură pasivă devine:

$$u_j = Ri. \quad (56.6)$$

Într-adevăr, în acest caz, tensionea în lungul firului $u_j = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ depinde

de linia de curent C , în lungul căreia se calculează (între capetele conductorului) și, ca urmare, rezistența conductorului nu se mai poate defini prin relația (56.6) ca în curent continuu. Puterea activă disipată prin efect Joule-

Lenz în conductor se poate însă calcula și în cazul unei repartiții neuniforme a curentului, și anume cu relația (55.17), respectiv (55.17'). Cunoscând această putere, prin integrare pe volumul conductorului, respectiv pe suprafața lui exterioară, rezistența în curent alternativ a conductorului se definește prin relația :

$$\boxed{R_a = \frac{P}{J^2}} = R_a(\omega) \quad (56.7)$$

și este o funcție de frecvență.

Citit dintre această rezistență și rezistența R_0 în curent continuu a acestui conductor se numește *factorul de creștere al rezistenței în curent alternativ*:

$$k_a = \frac{R_a}{R_0} = \frac{R_a(\omega)}{R_a(0)} = k_a(\omega), \quad (56.8)$$

sau, scurt, factorul în alternativ al conductorului. Acest factor depinde numai de forma și natura conductorului și de frecvență, și determinarea lui reprezintă principalul obiectiv al cercetărilor în domeniul efectului pelicular.

În domeniul efectului pelicular slab (cînd $\delta \gg a$), factorul în alternativ e puțin diferit de unitate și determinarea lui se poate face cu metoda iterației (par. 56.2); în domeniul efectului pelicular net (cînd $\delta \ll a$), factorul în alternativ e mult supraunitar și determinarea lui se poate face cu metoda adîncimii de pătrundere (par. 56.3); între aceste două situații extreme se poate folosi numai metoda exactă a integrării ecuațiilor cîmpului.

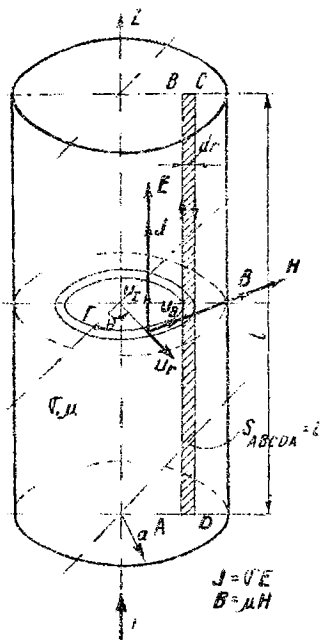


Fig. 56.5

56.2. Efectul pelicular slab în conductorul cilindric, studiat cu metoda iterației

Considerăm un conductor cilindric circular drept (fig. 56.5) de rază a și de lungime l foarte mare ($l \gg a$), avînd conductivitatea σ și permeabilitatea magnetică μ , străbătut în regim permanent de curentul

$$i = I\sqrt{2} \sin \omega t \rightleftharpoons \underline{I} = I. \quad (56.9)$$

Alegînd sistemul de coordonate cilindrice (r, θ, z) din figură, se observă că din motive de simetrie vectorii $\underline{J}$ și $\underline{E}$ nu au decît componente axiale, vectorii $\underline{H}$ și $\underline{B}$ nu au decît componente tangențiale și toți acești vectori nu depind decît de coordonata spațială r și de timp :

$$\begin{aligned} \underline{E} &= E(r, t) \underline{v}_z & \underline{J} &= \sigma \underline{E} = J(r, t) \underline{v}_z \\ \underline{H} &= H(r, t) \underline{v}_\theta & \underline{B} &= \mu \underline{H} = B(r, t) \underline{v}_\theta. \end{aligned} \quad (56.10)$$

56.2.1. Metoda iterației, aplicabilă în cazul unui efect pelicular slab, consistă în următoarele:

a) Se calculează cu legea circuitului magnetic cîmpul magnetic $H_0(r, t)$ pe care l-ar produce curentul total I , dacă ar fi uniform repartizat pe secțiunea conductorului (ca în curent continuu), adică cu densitatea omogenă:

$$\sigma E_0(t) = J_0(t) = \frac{i(t)}{\pi a^2} = \frac{I \sqrt{2}}{\pi a^2} \sin \omega t. \quad (56.11)$$

b) Se calculează cu legea inducției electromagnetice cîmpul electric suplimentar $E_1(r, t)$ indus de cîmpul magnetic $H_0(r, t)$ și densitatea de curent suplimentară $J_1(r, t) = \sigma E_1(r, t)$. În acest calcul, deoarece J_0 a fost dedus din curentul total I , densitatea de curent J_1 reprezintă o corecție care nu modifică valoarea curentului total, adică aduce o contribuție totală nulă pe întreaga secțiune S a conductorului,

$$\iint_S J_1 dA = 0. \quad (56.12)$$

c) În primă aproximație se neglijează cîmpul magnetic $H_1(r, t)$, produs de curenții cu densitatea J_1 , din punctul de vedere al contribuției lui la determinarea cîmpului electric indus. În această primă aproximație se consideră că densitatea de curent din conductor este

$$J(r, t) = J_0(t) + J_1(r, t) \quad (56.13)$$

și se calculează cu această expresie puterea activă de pierderi:

$$P = \iiint_{V_{cond}} \frac{1}{\sigma} (\widetilde{J_0 + J_1})^2 dv = \iiint_{V_{cond}} \frac{J_{ef}^2}{\sigma} dv. \quad (56.14)$$

din care se deduce rezistența în curent alternativ cu relația (56.7) și factorul în curent alternativ cu relația (56.8).

În principiu acest mod de calcul s-ar putea repeta oricît, trecînd succesiv prin etape analoge cu a și b (ceea ce explică denumirea metodei). De exemplu, pentru o aproximație mai bună s-ar putea calcula și cîmpul H_1 , produs de curenții cu densitatea J_1 și curenții suplimentari induși de acest cîmp, cu densitatea $J_2 = \sigma E_2$, considerîndu-se că $J \approx J_0 + J_1 + J_2$. Practic, calculele se complică atît de mult, încît metoda se folosește numai la efect pelicular slab, în care caz $|J_1| \ll |J_0|$ și nu mai e necesară o nouă iterație.

56.2.2. Determinarea intensității de curent în prima iterație.

a) Calculăm cîmpul H_0 , aplicînd legea circuitului magnetic unei linii de cîmp interioare (Γ) de rază r :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H}_0 ds = \iint_{S_{\Gamma}} \mathbf{J}_0 dA \quad 2\pi r H_0 = \pi r^2 J_0$$

Se obține

$$H_0(r, t) = J_0(t), \quad (56.15)$$

b) Calculăm cimpul electric $E_1(r, t)$ indus de $H_0(r, t)$, aplicind legea inducției electromagnetice conturului $ABCD$ I (fig. 56.5), cu aria infinitezimală $l \, dr$

$$\oint_{ABCD} \mathbf{E}_1 \, ds = \frac{d}{dt} (\mu H_0 l \, dr)$$

$$l(E_1(r) - E_1(r + dr, t)) = l \frac{\partial E_1}{\partial r} dr = l \mu \frac{\partial H_0}{\partial t}$$

Rezultă ecuația

$$\frac{\partial E_1}{\partial r} = \mu \frac{\partial H_0}{\partial t} \quad (56.16)$$

care se poate scrie și direct cu relațiile (55.6), exprimind rotorul în coordonate cilindrice. Cu relația (56.15) obține:

$$\frac{\partial E_1}{\partial r} = \mu \frac{dJ_0}{dt}$$

și integrând

$$E_1(r, t) = \mu \frac{dJ_0}{dt} \left(\frac{r^2}{2} - C \right), \quad (56.17)$$

unde C este o constantă de integrare. Cu legea lui Ohm obține densitatea J curenților suplimentari induși:

$$J_1(r, t) = \sigma E_1(r, t) = \sigma \mu \frac{dJ_0}{dt} \left(\frac{r^2}{4} - C \right). \quad (56.18)$$

Constanta C se determină din condiția (56.12), care, cu $dI = 2\pi r dr$, se scrie

$$\int_0^a J_1(r, t) r \, dr = 0 \quad (56.19)$$

sau

$$0 = \int_0^{\frac{a}{2}} \left(\frac{r^2}{4} - C \right) r \, dr = \frac{1}{16} C a^2 - C \frac{\pi a^2}{8} \quad (56.20)$$

Cu relațiile (56.18), (56.20) și (56.11) rezultă:

$$J_1(r, t) = \omega \sigma \mu \frac{I \sqrt{2}}{4\pi a^2} \left(r^2 - \frac{a^2}{2} \right) \cos \omega t = \frac{\pi^2}{2} \frac{I \sqrt{2}}{\pi a^2} \left(r^2 - \frac{a^2}{2} \right) \cos \omega t. \quad (56.21)$$

unde am introdus parametrul $\alpha = \frac{1}{\delta}$ caracteristic studiului cimpului electromagnetic în conductoare masive (v. rel. 55.25).

c) În primă aproximație, densitatea de curent totală rezultă :

$$J(r, t) \approx J_0(t) + J_1(r, t) = \frac{I\sqrt{2}}{\pi a^2} \sin \omega t + \frac{\alpha^2 I\sqrt{2}}{2\pi a^2} \left(r^2 - \frac{a^2}{2}\right) \cos \omega t. \quad (56.22)$$

Deoarece aceste două componente sînt în cuadratură, pătratul valorii efective rezultantei e egal cu suma pătratelor valorilor efective ale componentelor :

$$\begin{aligned} J_{ef}^2(r) &\approx J_{0ef}^2 + J_{1ef}^2 = \frac{I^2}{\pi^2 a^4} + \frac{\alpha^4 I^2}{4\pi^2 a^4} \left(r^2 - \frac{a^2}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{I^2}{\pi^2 a^4} \left[1 + \frac{\alpha^4}{4} \left(r^2 - \frac{a^2}{2}\right)^2\right]. \end{aligned} \quad (56.23)$$

56.2.3. Determinarea pierderilor și a factorului în alternativ. Cu relațiile (56.14) și (56.23) rezultă puterea activă de pierderi pe lungimea l (cu $dv = 2\pi r dr l$),

$$P = \frac{I^2 2l}{\pi a^4 \sigma} \int_0^a \left[1 + \frac{\alpha^4}{4} \left(r^2 - \frac{a^2}{2}\right)^2\right] r dr. \quad (56.24)$$

Efectuînd integrala, se obține :

$$P = \frac{I^2 l}{\pi a^2 \sigma} \left(1 + \frac{\alpha^4 a^4}{48}\right). \quad (56.25)$$

Cu relația (56.7) rezultă rezistența în curent alternativ

$$R_a = \frac{P}{I^2} = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{\pi a^2} \left(1 + \frac{\alpha^4 a^4}{48}\right) \quad (56.26)$$

și deoarece rezistența în curent continuu este $R_0 = \frac{l}{\sigma \pi a^2}$, factorul în alternativ rezultă

$$k_a = \frac{R_a}{R_0} = 1 + \frac{\pi^4 a^4}{48} = 1 + \frac{1}{48} \left(\frac{a}{\delta}\right)^4 \quad (56.27)$$

Deoarece cu această metodă am obținut numai o primă aproximație, rezultatul e valabil în măsura în care termenul de corecție e mic față de unitate, adică dacă

$$\alpha < \delta.$$

Ținînd seama că

$$\alpha = \frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} = \sqrt{\pi f \mu \sigma} \quad \sqrt{\pi f \mu_r \mu_0 \sigma} = 2\pi \cdot 10^{-3} \sqrt{\frac{f \mu_r \sigma}{10}}, \quad (56.28)$$

rezultă pentru factorul în alternativ expresia :

$$k_a = 1 + \frac{1}{3} \cdot 10^{-4} \pi^4 \mu_r^2 \sigma^2 f^2 a^4. \quad (56.29)$$

La frecvențe joase, factorul în curent alternativ diferă de unitate cu un termen de corecție $k_s - 1$, care crește cu pătratul frecvenței și cu puterea a patra a razei conductorului. În paragraful următor vom vedea că la frecvențe foarte înalte factorul din alternativ k_s crește cu rădăcina pătrată a frecvenței și e proporțional cu raza conductorului.

56.3. Studiul efectului pelicular net cu metoda adîncimii de pătrundere

Considerăm un conductor cilindric drept de secțiune transversală oarecare (fig. 56.6) străbătut de curentul $i = I\sqrt{2} \sin \omega t$. Dacă frecvența e suficient de mare și raza de curbura a conturului secțiunii conductorului e peste tot mare față de adîncimea de pătrundere, se poate asimila local suprafața acestui conductor cu aceea a semispațiului infinit și puterea activă absorbită prin unitatea de suprafață este în fiecare punct dată de relația (55.37) :

$$\frac{P}{A} = \frac{\alpha}{\sigma} H_{0ef}^2. \quad (56.30)$$

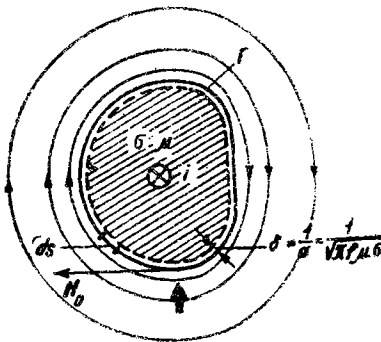


Fig. 56.6

Puterea totală absorbită se poate determina integrând această expresie pe suprafața laterală a conductorului de lungime l , cu elementele de arie $l ds$. Se obține integrala :

$$P = l \frac{\alpha}{\sigma} \int_{\Gamma} H_{0ef}^2 ds, \quad (56.31)$$

efectuată pe conturul Γ al secțiunii transversale a conductorului.

Cîmpul H_0 urmînd a fi determinat separat, cu împlinirea condiției impuse de legea circuitului magnetic

$$\oint_{\Gamma} H_{0ef} ds = I \quad (56.32)$$

(din cauza efectului pelicular net liniile cîmpului magnetic exterior sînt practic tangente la suprafața conductorului).

Dacă cîmpul magnetic exterior H_0 e practic constant în modul în lungul acestui contur, și dacă $p = \oint_{\Gamma} ds$ e perimetrul secțiunii transversale, expresiile (56.31) și (46.32) devin :

$$P = pl \frac{\alpha}{\sigma} H_{0ef}^2 \quad \text{și} \quad I = pH_{0ef}.$$

Rezultă :

— pierderile de putere activă :

$$P = \frac{l}{p} \frac{\alpha}{\sigma} I^2 \quad (56.33)$$

rezistența în curent alternativ

$$R_a = \frac{P}{I^2} = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{p\delta} \quad (56.34)$$

— factorul în curent alternativ :

$$k_a = \frac{R_a}{R_0} = \frac{\frac{1}{\sigma} \frac{l}{p\delta}}{\frac{l}{\sigma A}} = \frac{A}{p\delta} \quad (56.35)$$

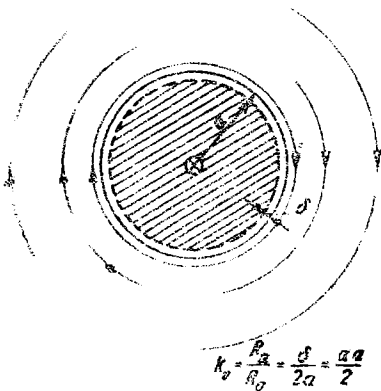


Fig. 56.7

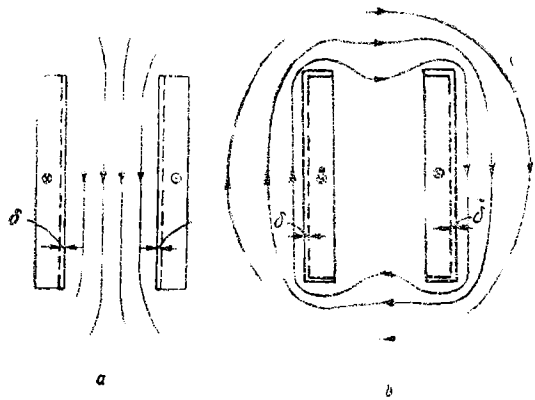


Fig. 56.8

Exemplu: În cazul conductorului cilindric de secțiune circulară (fig. 56.7) de rază a , aria $A = \pi a^2$ și $p = 2\pi a$, astfel că se obține :

$$k_a = \frac{\pi a^2}{2\pi a\delta} = \frac{a}{2\delta} = \frac{\alpha a}{2} = \frac{a}{2} \sqrt{\pi f \omega \mu} \quad (56.36)$$

proporțional cu raza conductorului și cu rădăcina pătrată a frecvenței.

Observație: Teoria semispațiului conductor infinit arată că la suprafața conductorului densitatea de curent e proporțională cu intensitatea cîmpului magnetic exterior tangențial. De aceea, la frecvențe înalte, curentul se concentrează în porțiunile periferiei conductoarelor, unde cîmpul magnetic e mai intens — indiferent de faptul dacă această situație e realizată la margini interioare sau exterioare sistemului de conductoare considerat (v. fig. 56.8, a și b)

RADIAȚIA UNDELOR ELECTROMAGNETICE

57. || RADIAȚIA UNDELOR ELECTROMAGNETICE DE CĂTRE CIRCUITE LA FRECVENȚE ÎNALTE

La frecvențe suficient de înalte, câmpul electromagnetic variabil în timp prezintă sub formă de unde electromagnetice care se propagă cu viteză finită. Determinarea unui astfel de câmp implică rezolvarea ecuațiilor lui Maxwell (55.2 ... 55.5), completate cu legile de material (55.6), fără să se mai neglijeze densitatea curentului de deplasare. Prin inducție electromagnetică, relația (55.3), câmpul magnetic variabil în timp produce un câmp electric, iar prin efectul curentului de deplasare, câmpul electric variabil în timp produce câmp magnetic. Latura electrică și latura magnetică a câmpului se condiționează reciproc, chiar în vid, asigurând existența undelor electromagnetice independent de prezența corpurilor în regiunea considerată. Aceste unde electromagnetice se pot „desprinde“ de circuitele care le-au dat naștere, propagându-se la distanțe extrem de mari și transmitând o parte din energia circuitelor, sub o formă specifică câmpului electromagnetic. De aceea, la frecvențe înalte are loc fenomenul *radiației circuitelor*, prin care acestea pierd o parte din puterea primită pe la borne, cedînd-o undelor electromagnetice emise în mediul înconjurător.

În vol. I, paragraful 29.3 și 29.4.1. am studiat cea mai simplă undă electromagnetică, și anume unda electromagnetică plană, fără vreo preocupare referitoare la modul cum poate fi generată o astfel de undă. În acest capitol vom prezenta problemele radiației undelor de către circuite, considerînd cel mai simplu circuit electric radiant: dipolul electric elementar variabil în timp. Acest circuit se mai numește *oscilatorul electric elementar* sau oscilatorul lui Hertz, deoarece a fost studiat și construit pentru prima dată de H. Hertz¹, care a reușit (în 1888) să pună în evidență experimental undele electromagnetice și identitatea cu ele a undelor luminoase, în acord cu prevederile teoriei elaborate de Maxwell (1865), după introducerea curentului de deplasare (1862) în teoria fenomenelor electrice și magnetice.

57.1. Potențialele electrodinamice retardate și determinarea lor

Problemele radiației undelor electromagnetice de către circuite de câmp variabil rezolvă mai ușor cu ajutorul *potențialelor electrodinamice* ale câmpului electromagnetic. Aceste potențiale generalizează pentru câmpuri varia-

¹ Pentru detalii privind experiențele lui Hertz și aspectele experimentale în legătură cu undele electromagnetice, se poate consulta și *Curs de Fizică Generală*, vol. 2, par. 240 și următoarele, de S. E. Friș și A. V. Timoreva, ed. II. Ed. tehnică, 1955.

bile în timp mărimile derivate numite *potențial magnetic vector* (v. par. 20.4, vol. I) și *potențial electric scalar* (v. potențialul electrostatic, par. 6.4, vol. I) introduse în studiul câmpurilor staționare, magnetice, respectiv electrice.

Astfel, legea fluxului magnetic (55.5) e identic satisfăcută dacă se introduce *potențialul electrodinamic vector* $\mathbf{A}_e$, prin relația

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}_e \quad (57.1)$$

(deoarece $\text{div rot} \equiv 0$). Pentru a defini însă univoc un asemenea potențial, mai este necesară impunerea valorii mărimii $\text{div } \mathbf{A}_e$, deoarece un câmp de vectori e complet caracterizat nu numai de rotorul său, ci și de divergența sa. Condiția care fixează divergența potențialului vector se numește *condiție de etalonare* a potențialelor electrodinamice. În regim staționar (rel. 25.2, vol. I) s-a ales $\text{div } \mathbf{A} = 0$; în regim general variabil se va utiliza o altă condiție, (57.7).

Introducând relația (57.1) în expresia locală (55.3) a legii inducției electromagnetice, rezultă relația:

$$\text{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial t} \right) = 0,$$

care stabilește caracterul potențial al vectorului din paranteză (deoarece $\text{rot grad} \equiv 0$). Se poate deci introduce un *potențial electrodinamic scalar* V prin relația

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial t} = -\text{grad } V_e \text{ sau } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial t} - \text{grad } V \quad (57.2)$$

Relațiile (57.1) și (57.2) reprezintă alte moduri de formulare ale legilor fluxului magnetic și inducției electromagnetice — și permit calculul câmpurilor $\mathbf{E}$ și $\mathbf{B}$, dacă se cunosc potențialele electrodinamice $\mathbf{A}_e$ și V_e .

Pentru a determina aceste potențiale, trebuie să stabilim ce ecuații satisfac ele, în baza celorlalte două ecuații ale lui Maxwell, (55.2) și (55.4). Ne vom referi numai la medii omogene și liniare în care sînt valabile legile de material (55.6), cu ajutorul cărora ecuațiile (55.2) și (55.4) iau forma

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \varepsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (57.3)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \rho_v, \quad (57.4)$$

presupunînd cunoscute repartițiile de sarcină $\rho_v(\mathbf{r}, t)$ și de curent $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$.

Cu relațiile (57.1) și (57.2), legea circuitului magnetic (57.3) scrie

$$\Delta \mathbf{A}_e - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}_e}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} + \text{grad} \left(\text{div } \mathbf{A}_e + \varepsilon \mu \frac{\partial V_e}{\partial t} \right) \quad (57.5)$$

iar legea fluxului electric (57.4) se scrie

$$\Delta V - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon} \rho_v - \frac{\partial}{\partial t} \left(\text{div } \mathbf{A}_e + \varepsilon \mu \frac{\partial V_e}{\partial t} \right), \quad (57.6)$$

dacă se folosește identitatea vectorială (55.9), cu relația (55.9').

Acestea sînt ecuațiile care trebuie rezolvate pentru a determina potențialele electrodinamice. Rezolvarea lor este îngreuiată de faptul că ambele funcțiuni necunoscute $\mathbf{A}_e(r, t)$ și $V_e(r, t)$ apar în fiecare dintre aceste ecuații. Se poate însă folosi acum o condiție de etalonare, care să precizeze valoarea lui $\text{div } \mathbf{A}_e$, astfel ca rezolvarea ecuațiilor să fie simplificată. Lorentz a observat că cea mai avantajoasă este condiția :

$$\boxed{\text{div } \mathbf{A}_e + \varepsilon\mu \frac{\partial V_e}{\partial t} = 0,} \quad (57.7)$$

numită *condiția lui Lorentz*. Cu relația (57.7) se completează definiția potențialului electromagnetic vector și rezultă pentru cele două potențiale electrodinamice ecuațiile :

$$\Delta \mathbf{A}_e - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}_e}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \quad (57.8)$$

$$\Delta V_e - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 V_e}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon} \rho_v, \quad (57.9)$$

numite *ecuațiile undelor neomogene* (tridimensionale).

Se observă că în regim staționar ecuațiile de mai sus trec în ecuațiile lui Poisson pentru potențialele $\mathbf{A}$ și V

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}, \quad \Delta V = -\frac{1}{\varepsilon} \rho, \quad (57.10)$$

ale căror soluții (în cazul unor surse $\rho_v(\mathbf{r}')$ și $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ ocupînd un domeniu mărginit din spațiu și a anulării tuturor potențialelor suficient de repede la infinit) au forma „coulombiană“.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V_\infty} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} dv', \quad V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_{V_\infty} \frac{\rho_v(\mathbf{r}')}{R} dv', \quad (57.11)$$

unde integrarea se extinde în principiu la întregul spațiu (v. rel. 9.19 și 25.12, vol. I); de asemenea, condiția (57.7) trece în condiția (25.2) de anulare a divergenței potențialului vector. În analogie cu expresiile (57.11) se demonstrează că ecuațiile cu derivate parțiale (57.8) și (57.9), cu $\rho_v(\mathbf{r}', t)$ și $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)$, diferiți de zero într-un domeniu D mărginit din spațiu, ocupat de circuitele care radiază, au soluțiile :

$$\mathbf{A}_e(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V_\infty} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \sqrt{\mu\varepsilon}R)}{R} dv' \quad (57.12)$$

și

$$V_e(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_{V_\infty} \frac{\rho_v(\mathbf{r}', t - \sqrt{\mu\varepsilon}R)}{R} dv', \quad (57.13)$$

în cazul când se consideră că potențialele și cîmpul se anulează suficient de repede la infinit.

Expresiile de mai sus au următoarea semnificație: calculul potențialelor în punctul curent P (fig. 57.1) — avînd raza vectorie R față de elementul de volum dv' din punctul P' , cu $\rho_v(\mathbf{r}', t)$ și $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)$, în raport cu care se integrează — și în momentul t , se face în funcție de valorile pe care le-au avut densitățile de curent și de sarcină din P' într-un moment anterior:

$$t' = t - \sqrt{\epsilon\mu} R = t - \frac{1}{c} R. \quad (57.14)$$

Retardarea

$$t - t' = \sqrt{\epsilon\mu} R = \frac{1}{c} R \quad (57.15)$$

e egală cu timpul necesar propagării unui semnal pe distanța R cu viteză constantă:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} c_0, \quad (58.16)$$

care este tocmai viteza de propagare a undelor electromagnetice libere în mediul omogen de permittivitate $\epsilon = \epsilon_r\epsilon_0$ și permeabilitate $\mu = \mu_r\mu_0$.

Expresiile (57.12) și (57.13) ale potențialelor electrodinamice ilustrează deci transmiterea cu viteză finită a acțiunilor fizice: fiecare element de corp avînd sarcină sau curent contribuie la valoarea potențialelor din punctul P cu o retardare (întîrziere) egală cu timpul necesar unei unde electromagnetice libere pentru a ajunge din punctul P' în punctul P . De aceea, potențialele (57.12) și (57.13) se mai numesc *potențialele electrodinamice retardate*. Ele se pot calcula dacă se cunoaște repartiția curentului și a sarcinii în fiecare moment în cuprinsul corpului (circuitului) care radiază. Cele două repartiții nu sînt însă independente din cauza legii conservării sarcinii:

$$\operatorname{div} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho_v(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (57.17)$$

De aceea se folosește numai una din integralele (57.12) sau (57.13) și celălalt potențial se deduce din condiția lui Lorentz (57.7).

Dacă pentru $t \leq 0$ corpul considerat nu era parcurs de curenți și nu avea sarcini electrice, rezultă că funcțiunile ρ_v și $\mathbf{J}$ se anulează

$$\rho_v\left(\mathbf{r}', t - \frac{1}{c} R\right) = 0, \quad \mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{1}{c} R\right) = 0 \quad (57.18)$$

pentru $t' = t - \frac{1}{c} R \leq 0$. În toată regiunea din spațiu ale cărei puncte P satisfac în momentul t condiția

$$R \geq ct \quad (57.19)$$

(unde R e distanța de la P la cel mai apropiat punct al corpului D), nu există încă unde electromagnetice, deoarece potențialele rezultă nule. Suprafața Σ_0 cu ecuația:

$$R_0 = ct \quad (57.20)$$

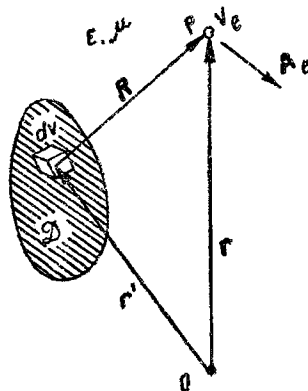


Fig. 57.1

e locul geometric al punctelor P pentru care cea mai mică distanță la corpul D e egală cu distanța pe care o poate străbate unda în timpul t (măsurat din momentul în care apar sarcini și curenți în corp). Ea se numește *frontul undei*, deoarece separă regiunea din spațiu unde a ajuns unda de regiunea din spațiu (57.19) lipsită de cîmp. În figura 57.2 sînt reprezentate liniile cîmpului electric și frontul undei pentru un dipol electric elementar (v. și par. 57.3), al cărui moment electric variază sinusoidal în timp începînd cu momentul $t = 0$.

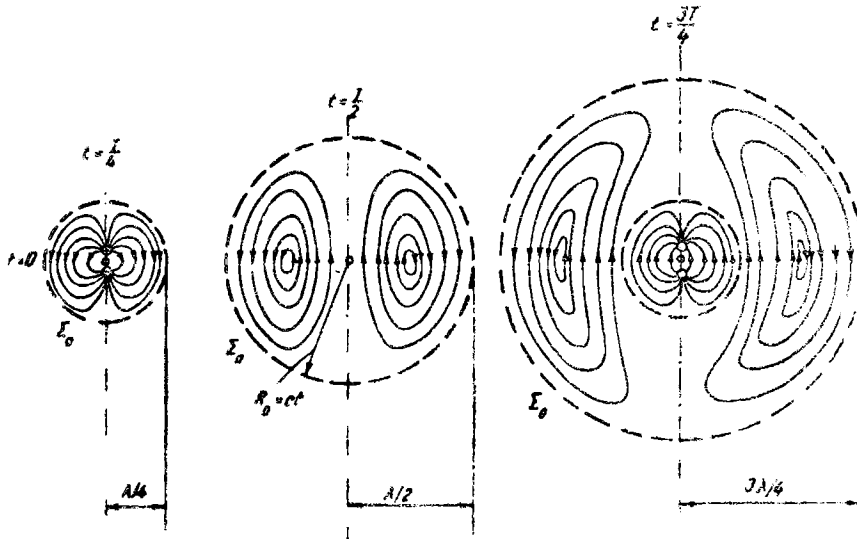


Fig. 57.2

57.2. Rezistența de radiație a circuitelor

Ca urmare a radiației undelor la frecvențe înalte de către circuite, acestea pierd putere, pe care o transmit undelor radiate. La aceeași valoare efectivă a curentului I primit pe la borne, în regim sinusoidal, puterea activă primită pe la borne :

$$P_b = R_e I^2 \quad (57.21)$$

(unde R_e e rezistența echivalentă a circuitului considerat) crește la frecvențe înalte, datorită pierderii de putere prin radiație P_{rad} . Rezistența echivalentă a circuitului este mai mare decît în regimul în care radiația e neglijabilă cu valoarea

$$R_{rad} = \frac{P_{rad}}{I^2}, \quad (57.22)$$

numită *rezistență de radiație*.

Un exemplu, cu totul particular, ilustrează faptul că apariția rezistenței de radiație e o consecință a retardării discutate în paragraful precedent. Considerăm în acest scop o spirală

filiformă (fig. 57.3, a) de dimensiuni foarte mici, alimentată în regim sinusoidal cu tensiunea $\underline{U}$, care absoarbe curentul $\underline{I}$. Din cauza retardării, inducția magnetică din punctele unei suprafețe S sprijinită pe conturul Γ al spirei nu mai este în fază, ci rămâne în urmă față de curent. Ca urmare, fluxul magnetic Φ prin acea suprafață e defazat în urma curentului $\underline{I}$ cu unghiul α care crește cu frecvența (deoarece retardările corespunzătoare diferitelor puncte reprezintă fracțiuni din ce în ce mai mari din perioada $T=1/f$). Inductivitatea L a spirei trebuie definită acum numai în funcție de componenta fluxului în fază cu curentul (v. fig. 57.3, b) și se poate scrie:

$$\begin{aligned}\Phi &= L \underline{I} - j \Lambda \underline{I} \\ \Lambda &= \Lambda(\omega)\end{aligned}\quad (57.23)$$

(unde Λ e factorul de proporționalitate al componentei fluxului defazată cu $\frac{\pi}{2}$ în urma curentului).

Ecuatia circuitului în valori instantanee fiind

$$R i + \frac{d\Phi}{dt} \quad (57.24)$$

reprezintă în complex sub forma:

$$\underline{U} = R \underline{I} + j \omega \Phi \quad (57.25)$$

și înlocuind expresia (57.23) fluxului, devine:

$$\underline{U} = R \underline{I} - j \omega L \underline{I} - \omega \Lambda \underline{I} = [(R - \omega \Lambda) + j \omega L] \underline{I} \quad (57.26)$$

Se obține pe spirală impedanța echivalentă:

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + \omega \Lambda + j \omega L, \quad (57.27)$$

corespunzătoare rezistenței echivalente:

$$R_e = \operatorname{Re} \{ \underline{Z}_e \} = R + \omega \Lambda = R + R_{rad}, \quad (57.28)$$

în care primul termen e rezistența R a conductorului (calculată eventual cu luarea în considerare a efectului pelicular), iar

$$R_{rad} = \omega \Lambda \quad (57.29)$$

rezistența de radiație, apărută ca urmare a întârzierii fluxului față de curent.

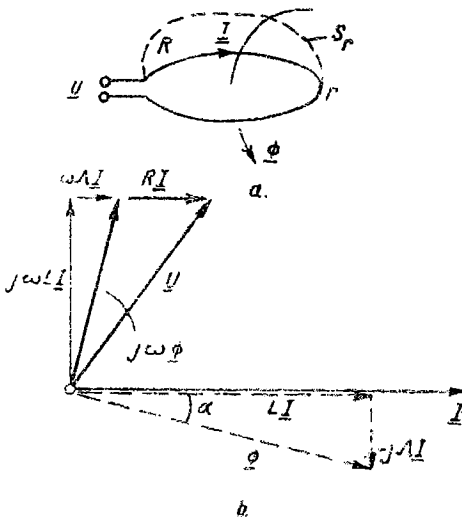


Fig. 57.

57.3. Radiația oscilatorului electric elementar

57.3.1. Potențialele electrodinamice ale oscilatorului electric elementar. Considerăm un dipol electric (fig. 57.4, a), avînd momentul

$$p(t) = q(t)l = kq(t)l, \quad (57.30)$$

variabil în timp (cu direcția invariabilă). Un astfel de dipol reprezintă un model idealizat pentru oscilatorul lui Hertz, compus din două sfere încărcate cu sarcini q și $-q$ reunite printr-un conductor scurt (față de lungimea de undă), întrerupt la mijloc pentru legăturile de alimentare de la un generator de înaltă frecvență (fig. 57, 4, b).

Dacă momentul dipolului, și deci sarcina sferelor, variază, în conductorul de legătură apare un curent electric de conducție :

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{l} \frac{dp}{dt} \quad (57.31)$$

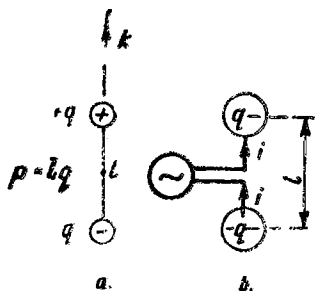


Fig. 57.4

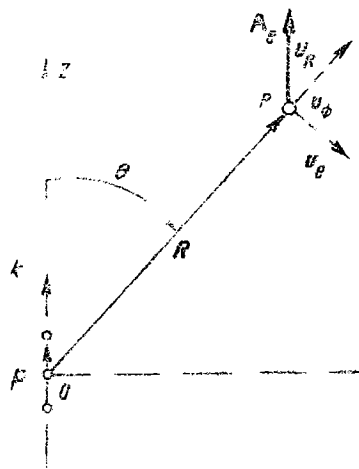


Fig. 57.5

Potențialul electrodinamic vector într-un punct P cu raza vectoare R față de dipol (fig. 57.5) se poate calcula cu relația (57.12), care cu (58.16) se scrie :

$$A_e = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{J\left(r', t - \frac{1}{c} R\right)}{R} dv'. \quad (57.32)$$

Deoarece vom considera cazul limită al unui dipol elementar cu $l \rightarrow 0$ (practic cu $l \ll R$), putem considera densitatea de curent în fază și repartizată uniform pe volumul $\Delta V = \Delta A \cdot l$ al conductorului. Cum în acest caz $J \Delta V = J \Delta A l = i l k$, rezultă pentru potențialul electrodinamic vector expresia

$$A_e = \frac{\mu}{4\pi} k \frac{i \left(t - \frac{1}{c} R \right)}{R} l, \quad (57.33)$$

sau, deoarece $li = \frac{dp}{dt} = \dot{p}$ (v. 57.31),

$$A_e = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\dot{p} \left(t - \frac{1}{c} R \right)}{R} = A_{e2} k, \quad (57.34)$$

cu unica componentă diferită de zero după axa dipolului, aleasă axa Oz.

$$A_{e_z}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\dot{p} \left(t - \frac{1}{c} R \right)}{R} = \frac{1}{4\pi} \frac{[\dot{p}]}{R} \quad (57.35)$$

În relațiile de mai sus am notat cu punct deasupra derivatele în raport cu timpul $\dot{f} = \frac{df}{dt}$ ale funcțiilor de timp și cu $[f] = f \left(t - \frac{1}{c} R \right)$ valorile retardate ale funcțiilor de timp. Potențialul electrodinamic scalar se poate deduce din relația (57.35) și din condiția lui Lorentz (57.7):

$$\frac{\partial V_e}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0 \mu} \operatorname{div} \mathbf{A}_e = -\frac{1}{\epsilon_0 \mu} \frac{\partial A_{e_z}}{\partial z} = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\dot{p} \left(t - \frac{1}{c} R \right)}{R} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{[\dot{p}]}{R} \right)$$

Deoarece $\left(\text{cu } \ddot{p} = \frac{d^2 p}{dt^2} \right)$

$$\frac{\partial \dot{p} \left(t - \frac{1}{c} R \right)}{\partial z} = [\ddot{p}] \frac{\partial \left(t - \frac{1}{c} R \right)}{\partial z} = -\frac{1}{c} [\ddot{p}] \frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{[\ddot{p}]}{c} \cos \theta \quad (57.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{1}{R^2} \cos \theta \quad (57.37)$$

se obține

$$\frac{\partial V_e}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{1}{R} \frac{\partial [\dot{p}]}{\partial z} - \frac{1}{4\pi\epsilon} [\ddot{p}] \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{[\dot{p}] \cos \theta}{R^2} + \frac{[\ddot{p}] \cos \theta}{cR} \right)$$

și integrând (cu constanta de integrare nulă pentru ca potențialul scalar să se anuleze la infinit în acord cu relația (57.13), rezultă:

$$V_e(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cos \theta \left[\frac{[\dot{p}]}{R^2} + \frac{[\ddot{p}]}{cR} \right]. \quad (57.38)$$

Din expresiile (57.35) și (57.38) ale potențialelor electrodinamice ale dipolului elementar rezultă imediat pentru cazul limită al regimului staționar $\left(\dot{p} = \frac{dp}{dt} = 0 \right)$ expresiile

$$\mathbf{A}_e = 0 \quad V_e = V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{p \cos \theta}{R^2}, \quad (57.39)$$

care corespund cimpului strict electrostatic al unui dipol electric (v. rel. 4.16, vol. 1) de moment p .

57.3.2. Cîmpul de radiație al dipolului elementar. Cu relațiile (57.35) și (57.38) introduse în expresiile (57.1) și (57.2) se pot calcula vectorii $\mathbf{E}$ și $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$

în orice punct din spațiu¹. Nu vom face aici calculul decît pentru acele componente ale cîmpurilor electric și magnetic care subsistă la distanță foarte mare de dipol, adică pentru acele componente care scad cel mai încet cu distanța. Acestea sînt componentele care scad ca $\frac{1}{R}$ cu distanța și care se vor obține din relațiile care dau cîmpurile :

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V_e - \frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial t}; \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A}_e, \quad (57.40)$$

dacă la derivarea în raport cu coordonatele spațiale se vor neglija derivatele lui $\frac{1}{R}$ și $\frac{1}{R^2}$ care dau puteri negative de ordin superior ale lui R . În decursul calculului vom avea nevoie de expresia gradientului unei funcțiuni scalare Φ în coordonate sferice (în care nu mai punem termenul cu $\frac{\partial}{\partial \varphi}$, deoarece, din motive de simetrie cilindrică — v. fig. 57.6 — variabila φ nu apare în expresiile potențialelor care se derivează)

$$\text{grad } \Phi = \mathbf{u}_R \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad (57.41)$$

Se observă că derivarea în raport cu θ introduce un factor în $\frac{1}{R}$. Cum presiile potențialelor conțin termeni în $\frac{1}{R}$ și $\frac{1}{R^2}$, derivarea în raport cu θ va duce, în expresiile cîmpurilor, la termeni în $\frac{1}{R^2}$ și $\frac{1}{R^3}$, care pentru zona depărtată de dipol pot fi neglijați. De aceea, pentru zona depărtată gradientul are expresia :

$$\text{grad } \Phi \approx \mathbf{u}_R \frac{\partial \Phi}{\partial R} \quad (57.42)$$

la derivare toți factorii în $\frac{1}{R}$ și $\frac{1}{R^2}$ fiind considerați constanți.

Cu relațiile (57.34), (57.38), (57.40) și (57.42) rezultă cu ($\varepsilon\mu = 1/c^2$)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \text{grad} \left(\cos \theta \frac{[p]}{R^2} + \cos \theta \frac{[\dot{p}]}{Rc} \right) - \frac{\mu}{4\pi} \mathbf{k} \frac{[\ddot{p}]}{R} \\ &\approx \frac{1}{4\pi\varepsilon} \mathbf{u}_R \left[\frac{\cos \theta}{R^2} \frac{\partial [p]}{\partial R} + \frac{\cos \theta}{Rc} \frac{\partial [\dot{p}]}{\partial R} \right] - \frac{\mu}{4\pi} \mathbf{k} \frac{[\ddot{p}]}{R} \approx \\ &\approx -\frac{1}{4\pi\varepsilon} \mathbf{u}_R \frac{\cos \theta}{Rc} [\ddot{p}] \left(-\frac{1}{c} \right) - \frac{\mu \mathbf{k}}{4\pi} \frac{[\ddot{p}]}{R} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon c^2 R} [\ddot{p}] [\mathbf{u}_R \cos \theta - \mathbf{k}] \end{aligned}$$

și, deoarece

$$\mathbf{k} = \mathbf{u}_R \cos \theta - \mathbf{u}_\theta \sin \theta, \quad (57.43)$$

¹ V. R. Răduleț, *Bazele teoretice ale electrotehnicii* vol. IV, Tipografia și Litografia Ministerului Învățămîntului, 1956.

se obține pentru câmpul electric în zona depărtată, numit și *câmp electr. de radiație*, expresia :

$$E_{rad} = \frac{1}{4\pi\epsilon c^2} \frac{[\ddot{p}]}{R} \sin \theta \, u_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon c^2} \frac{\sin \theta}{R} \ddot{p} \left[t - \frac{1}{c} R \right] u_\theta \quad (57.44)$$

analog, cu relațiile (57.34), (57.40) și (57.42) rezultă :

$$H = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \left(\mathbf{k} \frac{[\dot{p}]}{R} \right) = \frac{1}{4\pi} \left(\operatorname{grad} \frac{[\dot{p}]}{R} \right) \quad \mathbf{k} = \frac{1}{4\pi R} \frac{\partial [\dot{p}]}{\partial R} \mathbf{u}_R \quad \mathbf{k}$$

$$H = \frac{1}{4\pi R c} [\dot{p}] \mathbf{u}_R \times \mathbf{k}$$

deoare

$$\mathbf{u}_R \times \mathbf{k} = \mathbf{u}_\varphi \sin \theta. \quad (57.45)$$

se obține pentru câmpul magnetic în zona depărtată, numit și *câmp magnetic de radiație*, expresia :

$$H_{rad} = \frac{1}{4\pi c} [\dot{p}] \frac{\sin \theta}{R} \mathbf{u}_\varphi = \frac{1}{4\pi c} \frac{\sin \theta}{R} \dot{p} \left(t - \frac{1}{c} R \right) \mathbf{u}_\varphi \quad (57.46)$$

Se observă (fig. 57.6) că în zona depărtată unda radiată e o undă transversală, cu vectorii câmp perpendiculari unul pe altul și pe direcția de propagare radială, de versor $\mathbf{u}_R$ (v. fig. 57.6). Vectorii E_{rad} , H_{rad} și $\mathbf{u}_R$ formează un triedru drept, iar câmpurile $E_{\theta rad}(r, t)$ și $H_{\varphi rad}(r, t)$ sînt în fiecare moment și în fiecare punct proporționale, raportul lor fiind egal cu impedanța de undă a mediului (v. rel. 29.26, vol. I).

$$\begin{aligned} \left(\frac{E_\theta}{H_\varphi} \right)_{rad} &= \frac{1}{\mu c} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \zeta = \\ &= \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \\ &= 120\pi \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} [\Omega] \quad (57.47) \end{aligned}$$

Densitatea fluxului de energie, adică vectorul lui Poynting e radial, adică e dirijat în sensul propagării undei,

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{u}_R S_R(r, t)$$

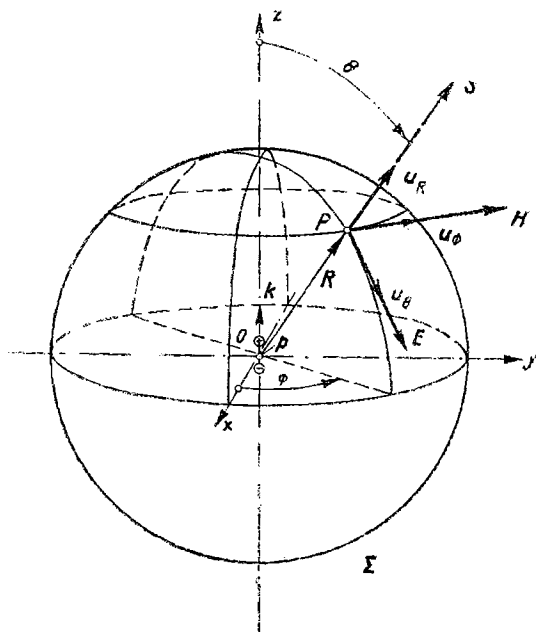


Fig. 57.6

cu

$$S_R(x, t) = (E_\theta H_\phi)_{\text{rad}} = \frac{1}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{R^2} \dot{p}^2 \left(t - \frac{R}{c} \right), \quad (57.48)$$

fiind invers proporțional cu pătratul distanței R și proporțional cu $\sin^2 \theta$. Radiația energiei se face deci directiv și e maximă în planul perpendicular pe dipol și nulă în axul dipolului. Se mai observă că pentru domenii nu prea mari față de R , mărimile $1/R$ și $\sin \theta$ variază foarte puțin, și unda radiată are toate caracteristicile unei unde plane cu direcția de propagare radială (v. par. 29.3 și 29.4.1, din vol. I).

Pentru a putea aprecia distanța R față de dipol, la care numai câmpul de radiație (cu mărimile de câmp în $1/R$) nu este neglijabil, ar trebui să fi făcut calculul exact al tuturor termenilor. Acest calcul poate fi evitat, dacă se observă că o aproximație de același ordin s-ar fa în expresia potențialului (57.38), dacă s-ar neglija primul termen, în $1/R^2$, față de al doilea, în $1/R$, ceea ce se poate dacă

$$\frac{|p|}{R^2} \ll \frac{|\dot{p}|}{cR} \quad (57.49)$$

În regim periodic sinusoidal derivarea introduce factorului $\dot{p} = 2\pi f p$, și raportul $\left| \frac{\dot{p}}{p} \right|$

e de ordinul de mărime al frecvenței f $|\dot{p}| \approx f |p|$. Cu aceasta, condiția (57.49) devine:

$$\frac{1}{R} \ll \frac{f}{c} = \frac{1}{\lambda} \text{ sau } \boxed{R \gg \lambda} \quad (57.50)$$

Rezultă că predominarea câmpului de radiație are loc la distanțe R de dipol, suficient de mari față de lungimea de undă de lucru. Inegalitatea inversă va exprima condiția posibilității neglijării câmpului de radiație, adică a posibilității de a calcula câmpul ca în regim cuasistaționar:

$$R \ll \lambda \quad (57.50')$$

Regimul cuasistaționar poate fi utilizat la calculul câmpului în afara circuitelor numai pentru cazul cînd dimensiunile liniare ale acestora sînt mici față de cea mai mică lungime de undă de lucru.

57.3.3. Rezistența de radiație a dipolului electric elementar. Pentru a calcula rezistența de radiație trebuie să evaluăm puterea medie radiată de dipol în regim sinusoidal. În acest caz vom considera curentul origine de fază

$$i = I\sqrt{2} \sin \omega t = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{l} \frac{dp}{dt} = \frac{\dot{p}}{l} \quad (57.51)$$

$$\text{vom obține cu } \omega = 2\pi f = 2\pi \frac{c}{\lambda},$$

$$[\dot{p}] = l \left[\frac{di}{dt} \right] = l \omega I \sqrt{2} [\cos \omega t] = l \omega I \sqrt{2} \sin \left(\omega t - 2\pi \frac{R}{\lambda} + \frac{\pi}{2} \right)$$

Componentele câmpurilor din relațiile (57.44) și (57.46) vor avea forma:

$$E_{\theta \text{ rad}} = \frac{l \omega \sqrt{2}}{4\pi \epsilon_0 c^2} \frac{\sin \theta}{R} \sin \left(\omega t - 2\pi \frac{R}{\lambda} + \frac{\pi}{2} \right) \quad (57.52)$$

$$H_{\phi \text{ rad}} = \frac{l \omega \sqrt{2}}{4\pi c} \frac{\sin \theta}{R} \sin \left(\omega t - 2\pi \frac{R}{\lambda} + \frac{\pi}{2} \right) \quad (57.53)$$

Densitatea instantanee a fluxului de energie rezultă cu relația (57.42) :

$$S_R(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(4\pi)^2 \epsilon c^3} I^2 l^2 \omega^2 2 \frac{\sin^2 \theta}{R^2} \sin^2 \left(\omega t - 2\pi \frac{R}{\lambda} + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$S_R(r, t) = \frac{I^2 l^2 f^2}{4\epsilon c^3} \frac{\sin^2 \theta}{R^2} \left[1 + \cos \left(2\omega t - 4\pi \frac{R}{\lambda} \right) \right], \quad (57.54)$$

iar valoarea ei medie pe o perioadă :

$$\widetilde{S}_R = \frac{I^2 l^2 f^2}{4\epsilon c^3} \frac{\sin^2 \theta}{R^2}. \quad (57.55)$$

Integrînd această expresie pe suprafața sferei Σ de rază R (fig. 57.6), cu $dA = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$, se obține expresia puterii active radiate de dipol :

$$P_{\text{rad}} = \iint_{\Sigma} \widetilde{S}_R R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{I^2 l^2 f^2}{4\epsilon c^3} \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta =$$

$$= \frac{I^2 l^2 f^2}{2\epsilon c^3} \pi \int_{\theta=0}^{\pi} (-1 + \cos^2 \theta) d(\cos \theta)$$

$$P_{\text{rad}} = \frac{I^2 l^2 f^2}{\epsilon c^3} \frac{2\pi}{3} = R_{\text{rad}} I^2. \quad (57.56)$$

Cu $\epsilon = c/f$ și (57.47) rezultă, pentru *rezistența de radiație*, expresia :

$$R_{\text{rad}} = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \quad (57.57)$$

(în care $l \ll \lambda$ pentru ca dipolul să poată fi considerat elementar).

ELEMENTE DE TEORIE MICROSCOPICĂ

58. || TEORIA ELECTRONILOR

Teoria fenomenelor electromagnetice, prezentată în primul volum al acestui curs și ale cărei principale aplicații în tehnică au fost studiate până acum, este *teoria microscopică, fenomenologică, a câmpului electromagnetic*. Caracterul ei microscopic rezultă din faptul că în această teorie nu se ia în considerare structura la scară atomică a materiei, ci se admite un model continuu al acesteia. Conform acestui model, toate proprietățile fizice locale sînt caracterizabile prin repartiții continue în spațiu, cu evoluție continuă în timp, iar discontinuitățile care se manifestă uneori (de ex. la marginea corpurilor) pot fi totdeauna tratate drept cazuri limită ale unor foarte rapide variații continue. Caracterul ei fenomenologic rezultă din faptul că admite ca premise fundamentale, principii, proprietăți și relații obținute prin analiza modului cum se manifestă fenomenele fizice la scara simțurilor noastre — fără alte ipoteze care să nu poată fi verificate direct (cel puțin în cazuri particulare), prin experiențe efectuate la această scară

O astfel de teorie este esențială pentru aplicații, deoarece asigură — măcar în principiu — o interpretare nemijlocită a conceptelor ei fundamentale și corespunde intuiției celui care trebuie să o utilizeze. De aceea, ea constituie și în zilele noastre baza teoretică a pregătirii inginerului electrician.

Către sfîrșitul secolului trecut, teoria microscopică clasică a câmpului electromagnetic era definitivată în trăsăturile ei esențiale, în principal datorită lucrărilor lui J. C. Maxwell (pentru medii în repaus) și H. Hertz (pentru medii în mișcare). Generalizarea făcută de H. Hertz, pentru a putea extinde teoria lui Maxwell la medii în mișcare, admitea în fond următoarele ipoteze :

a) Nu există *vid absolut*, ci numai un *vid* în sensul de stare limită de extremă rarefiere a substanței (materia corpurilor). De aceea fiecărui punct din spațiu i se poate asocia un sistem de referință privilegiat S_0 (referențialul propriu) imobil față de substanța din imediata lui vecinătate. În acest referențial se definesc mărimile electrice și magnetice $E, D, B, H, P, M, J, \rho_e$, astfel că valorile acestor mărimi sînt independente de referențialul S , utilizat pentru caracterizarea configurației geometrice și a stării de mișcare a mediului. În particular, corpul de probă utilizat pentru a măsura intensitatea câmpului electric E într-un anumit punct e considerat imobil în raport cu referențialul propriu al aceluia punct.

b) Forma cea mai generală a legilor câmpului e forma lor integrală (v. rel. I, II, V, VI, IX din cap. 31 și prezentarea generală din par. 29.1, vol. I), în care derivatele în raport cu timpul sînt derivate substanțiale ale integralelor respective, curbele închise Γ și suprafețele

închise Σ fiind considerate atașate mișcării locale a substanței. Numai astfel formularea legilor e independentă de referențialul S , față de care se măsoară pozițiile și vitezele.

Deoarece la vremea când a fost elaborată această teorie se admitea un punct de vedere mecanicist, conform căruia câmpul electromagnetic ar fi fost o stare de deformare specială a unei substanțe ipotetice extrem de „fine” numită „eter” — teoria lui Hertz, care prin ipotezele de mai sus identifica starea de mișcare a eterului cu starea de mișcare a corpurilor, a fost numită *teoria eterului antrenat*.

Cu toate succesele obținute în unificarea interpretării fenomenelor electromagnetice, teoria lui Maxwell și Hertz prezenta — chiar pentru stadiul dezvoltării cunoștințelor fizice de la sfârșitul veacului trecut — anumite deficiențe esențiale.

În primul rând, caracterul microscopic al teoriei era depășit de realizările teoriei atomice a materiei. Numeroase experiențe puneau în evidență faptul că modelul continuu al substanței era numai o primă aproximație, iar ipotezele privitoare la alcătuirea corpurilor din atomi și molecule, imaginați ca sisteme de puncte materiale în mișcare în vidul absolut, reușiseră să dea o explicație unitară unui număr foarte mare de fenomene: legile combinațiilor chimice, legile electrolizei, legile gazelor (teoria cinetico-moleculară), legile căldurii (fundamentarea statistică a termodinamicii) etc.

În al doilea rând, caracterul fenomenologic al teoriei lăsa neexplicate numeroasele legi de material, dintre care cele mai importante erau cele privitoare la conducția curentului electric, la polarizația electrică a corpurilor și la magnetizarea lor. În cadrul unei teorii macroscopice, fenomenologice, legile de material reprezintă proprietăți primitive ireductibile din punct de vedere logic la altele, adică neexplicabile pe baza legilor generale. Devenea din ce în ce mai evident faptul că interpretarea microscopică a fenomenelor putea aduce un câștig însemnat în cunoașterea naturii.

În al treilea rând — deși teoria lui Maxwell și Hertz clarificase numeroase fenomene privitoare la mediile în mișcare și, în primul rând, fenomenele de inducție electromagnetică prin mișcare (v. par. 22.3 vol. I) care stăteau la baza construcției mașinilor electrice — existau anumite experiențe de optică și electrodinamica mediilor în mișcare¹, care nu puteau fi explicate în cadrul acestei teorii (și care, toate, păreau a impune ideea că „eterul” nu e antrenat de loc sau e antrenat numai parțial de corpurile în mișcare).

Aceste deficiențe ale teoriei macroscopice clasice au fost în mare parte înlăturate de teoria microscopică clasică a fenomenelor electromagnetice, datorită lui A.H. Lorentz (1895) și numită *teoria electronilor* — care a luat în considerare structura discontinuă la scară atomică a corpurilor.

În lumina cunoștințelor actuale despre structura materiei, proprietățile și legile de mișcare ale celor mai simple particule cunoscute, care intervin în această structură, sînt cu totul deosebite de acelea ale punctelor materiale din mecanica clasică și fac obiectul de studiu al fizicii cuantice. Această fizică, dezvoltată în prima jumătate a secolului nostru, a dus la concluzia că *nu numai substanța și câmpul electromagnetic poate prezenta la scară atomică o structură discretă*. De aceea, teoria electronilor reprezintă doar o etapă intermediară a dezvoltării unei teorii microscopice consecvente, dezvoltare care se completează astăzi în cadrul *electrodinamicii cuantice*.

58.1 Ipotezele fundamentale ale teoriei electronilor

În lumina concepțiilor moderne, care au eliminat noțiunea inconsistentă de „eter”, ipotezele fundamentale ale teoriei lui Lorentz pot fi formulate cum urmează:

1. *Există la scară atomică două forme de materie: substanța și câmpul electromagnetic. Substanța are o structură discretă, fiind constituită din particule elementare² care sînt în permanentă mișcare în vid. Cu un termen intro-*

¹ Fenomenul aberației luminii (J. Bradley, 1728), experiența lui A. Fizeau (1851), experiențele lui W. C. Roentgen (1888) și A. A. Eichenwald (1903), experiența lui H. A. Wilson (1904), vezi, V. N o v a c u, *Introducere în electrodinamică*, vol. II, Ed. Academiei R.P.R., 1955.

² Se zice elementară, o particulă care în cadrul unei anumite etape de dezvoltare a cunoștințelor fizice nu poate fi prezentată ca un sistem de particule mai simple.

de J. Stoney, în 1891, Lorentz a numit *electron* orice¹ particulă elementară încărcată electric. Câmpul electromagnetic microscopic are o repartitie continuă în spațiul vid dintre particulele elementare și în interiorul acestor particule cu care interacționează.

Particulele elementare sînt reunite în sisteme de particule, avînd o mare stabilitate la acțiuni exterioare, numite atomi, care sînt neutre din punct de vedere electric. Atomii caracterizează elementele chimice și sînt grupați în molecule, caracteristice substanțelor definite. În anumite condiții (în electroliți, în cristale conductoare, în gaze ionizate etc.) atomii pot pierde electroni, care se deplasează oricît de mult în spațiile interatomice sau sînt captați de alți atomi. Atomii sau moleculele cu electroni lipsă sau în exces sînt încărcăți electric pozitiv sau negativ și se numesc ioni.

2. Particulele elementare electrizate sînt complet caracterizate din punct de vedere electromagnetic — adică din punctul de vedere al interacțiunii lor cu câmpul electromagnetic — de sarcina lor electrică q_m (sarcina electrică microscopică).

Sarcina electrică microscopică e deci singura mărime primitivă care — în această teorie — caracterizează starea electromagnetică a corpurilor. Ea e invariabilă în timp (fiecare particulă elementară perfect izolată în vidul care o înconjură — par. 58.3.1) și e presupusă repartizată continuu în interiorul fiecărei particule cu *densitatea de volum*:

$$\rho_m = \lim_{\Delta V_m \rightarrow 0} \frac{\Delta q_m}{\Delta V_m} \quad (58.1)$$

Celelalte mărimi de stare electrică și magnetică a corpurilor cunoscute din teoria microscopică (polarizația electrică, magnetizația, densitatea curentului de conducție) trebuie să rezulte ca mărimi derivate (v. par. 58.4) în cadrul interpretării microscopice a fenomenelor.

3. Starea locală și instantanee a câmpului electromagnetic e caracterizată de două mărimi vectoriale: intensitatea microscopică a câmpului electric $\mathbf{e}$ ² și inducția magnetică microscopică $\mathbf{b}$. Aceste mărimi sînt definite prin intermediul forței microscopice $\mathbf{F}_m$, pe care câmpul o exercită asupra unei particule elementare de sarcină q_m și viteză $\mathbf{e}_m$:

$$\mathbf{F}_m = q_m \mathbf{e} + q_m \mathbf{u}_m \quad \mathbf{b}. \quad (58.2)$$

Primul termen al acestei forțe e analog forței

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}, \quad (58.3)$$

¹ Astăzi s-a păstrat numele de *electron* numai pentru cele mai ușoare particule elementare încărcate negativ. Particulele elementare încărcate pozitiv care intră în constituția nucleelor atomilor sînt de circa 2000 de ori mai grele și se numesc *protoni*. În condiții speciale s-au pus în evidență particule pozitive la fel de ușoare ca electronii și numite *pozitroni*, precum și particule negative la fel de grele ca protonii și numite *antiprotoni*. Mai există particule elementare neîncărcate electric (de ex. neutrino) precum și numeroase particule elementare nestabile (neutroni, mezozi etc.), încărcate sau neîncărcate.

² Folosim litere mici pentru mărimile microscopice corespunzătoare unor mărimi macroscopice notate cu literă mare. Dacă litera mică nu e disponibilă pentru acest scop, folosim indicele inferior m (de ex. q_m , ρ_m).

exercitate de câmpul electric macroscopic de intensitate $\mathbf{E}$ asupra unui corp de probă încărcat cu sarcina q în repaus față de mediul ambiant, extrem de rarefiat (v. par. 2. 2, vol. I). Al doilea termen — numit și forța lui Lorentz — are corespondentul macroscopic în forța

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v}' \times \mathbf{B}, \quad (58.4)$$

pe care un câmp magnetic de inducție $\mathbf{B}$ o exercită asupra corpului de probă menționat, dacă acesta se deplasează cu viteza $\mathbf{v}'$ față de mediul ambiant. E ușor de verificat că forța lui Lorentz exercitată asupra particulelor libere, a căror mișcare prin conducătoare determină curentul de conducție macroscopic, are ca efect macroscopic forța lui Laplace (v. par. 16.3, vol. I), exercitată de câmpul magnetic macroscopic asupra unui element de circuit parcurs de curent.

4. *Ecuatiile câmpului electromagnetic microscopic au aceeași formă ca ecuațiile lui Maxwell pentru medii nepolarizabile în repaus din teoria macroscopică* (adică, cu rel. 55.2, 55.3, 55.4, 55.5, în care $\mathbf{P} = 0$ și $\mathbf{M} = 0$, respectiv $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ și $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$), termenul corespunzător densității curentului de conducție fiind *densitatea curentului microscopic de convecție*:

$$\mathbf{j} = \rho_m \mathbf{u}_m \quad (58.5)$$

5. *Mărimile primitive ale teoriei electronilor sînt definite, iar legile acestei teorii sînt valabile, într-un sistem de referință inerțial privilegiat: acela față de care se măsoară viteza microscopică $\mathbf{u}_m$ a particulelor din relațiile (58.2) și (58.5). Acest referențial privilegiat se mai numește sistemul inerțial lorentzian S_L .*

Această restricție nu este esențială decît în cadrul cinematicii clasice. Dacă se folosesc relațiile acestei cinematici pentru schimbarea coordonatelor prin trecerea la alt referențial inerțial, se constată că ecuațiile teoriei electronilor (v. par. 58.2) își schimbă forma. Există deci un singur sistem de referință inerțial, în care aceste ecuații pot avea forma postulată de Lorentz și fenomenele electromagnetice par a permite să se identifice experimental acest referențial privilegiat. De aceea, în lumina interpretării mecaniciste a câmpului ca stare de deformare a „eterului“, sistemul inerțial lorentzian a fost considerat imobil față de „eter“, care a fost imaginat ca o substanță imobilă în toate punctele din spațiu și pătrunzînd peste tot în vidul dintre particule și în interiorul particulelor. Existența obiectivă a acestui „eter“ constituia deci o explicație a faptului că dintre toate sistemele de referință inerțiale (egal îndreptățite din punctul de vedere al fenomenelor mecanice), unul singur era privilegiat din punctul de vedere al fenomenelor electromagnetice. De aceea, teoria lui Lorentz a mai fost numită și teoria eterului fix. Astăzi, după apariția teoriei relativității restrinse (1905) a lui A. Einstein și în acord cu toate experiențele efectuate, se știe că în cadrul cinematicii relativiste ecuațiile lui Lorentz au aceeași formă oricare ar fi referențialul inerțial utilizat (v. și observația 2 de la par. 58.2). Ipoteza „eterului“ s-a dovedit inutilă și în dezacord cu experiența.

6. *Proprietățile macroscopice sînt proprietăți medii, iar mărimile macroscopice corespund valorilor medii ale mărimilor microscopice, valori medii calculate pentru domenii spațiale și intervale de timp foarte mici la scară macroscopică și, totodată, foarte mari la scară microscopică, numite înfiniți mici fizici.*

58.2. Ecuațiile Maxwell-Lorentz

Notăm cu x_m, y_m, z_m coordonatele microscopice ale unui punct față de sistemul inerțial considerat și cu t_m timpul microscopic. Ecuațiile cîmpului electromagnetic microscopic postulate de teoria lui Lorentz (conform pct. din paragraful precedent) și numite *ecuațiile Maxwell-Lorentz* sînt

$$\operatorname{rot}_m \mathbf{b} = \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t_m} \quad (58.6)$$

$$\operatorname{rot}_m \mathbf{e} = - \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t_m} \quad (58.7)$$

$$\operatorname{div}_m \epsilon_0 \mathbf{e} = \rho_m \quad (58.8)$$

$$\operatorname{div}_m \mathbf{b} = 0 \quad (58.9)$$

completate cu expresia

$$\mathbf{f}_m = \rho_m (\mathbf{e} + \mathbf{u}_m \times \mathbf{b}) \quad (58.10)$$

Prima ecuație e *forma locală a legii circuitului magnetic*, a doua e *forma locală a legii inducției electromagnetice*, a treia e *forma locală a legii fluxului electric*, a patra e *forma locală a legii fluxului magnetic*, iar ultima e *forma locală a legii acțiunii ponderomotoare* a cîmpului electromagnetic microscopic, adică relația (58.2) exprimată pentru unitatea de volum f_m fiind densitatea de volum a forței microscopice.

Observații: 1. Ecuațiile Maxwell-Lorentz (58.6) – (58.9) sînt cu totul analoge ecuațiilor lui Maxwell pentru medii omogene în repaus (55.2) ... (55.6). În acest caz „mediul omogen” este însă vidul ($\epsilon = \epsilon_0, \mu = \mu_0$), iar densitatea curentului de conducție e înlocuită cu densitatea $\mathbf{j} = \rho_m \mathbf{u}_m$ a curentului microscopic de convecție. Se pot defini intensitatea microscopică $\mathbf{h}$ a cîmpului magnetic și inducția electrică microscopică $\mathbf{d}$ prin relații analoge (55.6):

$$\mathbf{h} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{b}, \quad \mathbf{d} = \epsilon_0 \mathbf{e}. \quad (58.11)$$

2. Ținînd seama de această analogie, întreaga teorie a undelor electromagnetice pentru medii omogene și în particular teoria unei electromagnetice plane (v. par. 29.3 și par. 29.4.1, vol. I) și teoria potențialelor retardate (par. 57.1) rămîn valabile. Rezultă că undele cîmpului electromagnetic microscopic se propagă în vid, între particule, cu viteza de fază

$$= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m}, \quad (58.12)$$

față de sistemul de referință în care sînt valabile ecuațiile (58.6), (58.9). În cadrul cinematicii clasice, aceste ecuații puteau să aibă această formă numai în raport cu singurul sistem de referință inerțial. Măsurarea vitezei de propagare a undelor electromagnetice (și deci a luminii) în vid ar fi putut deci să permită identificarea sistemului de referință privilegiat, sistemul inerțial lorentzian S : acela față de care viteza luminii ar fi avut valoarea dată de relația (58.12). Lorentz a crezut că acest sistem e imobil în raport cu soarele și cu grupul stelelor fixe. Experiențele efectuate și, în primul rînd, experiența lui Michelson și Morley au arătat că viteza luminii are valoarea (58.12) față de orice referențial inerțial. Acest fapt experimental a fost considerat de A. Einstein (1905) ca o lege a naturii, cu ajutorul căreia (postulînd și egala îndreptățire a tuturor sistemelor de referință

inertiale) a elaborat *teoria relativității restrinse*, bazată pe o nouă cinematică, în care relația de simultaneitate și, ca urmare, duratele și distanțele sînt *relative la sistemul de referință inertial*, în raport cu care sînt considerate. În cadrul *cinematicii relativiste*, *ecuațiile Maxwell-Lorentz* au aceeași formă în orice sistem de referință inertial.

3. În lumina cunoștințelor actuale, deficiențele teoriei electronilor sînt acelea ale oricărei teorii *precuantice*, care nu ia în considerare în mod organic microstructura materiei, pusă în evidență de *efectele cuantice* și studiată de *fizica cuantică*. În cadrul acestei fizici, particulele elementare nu au proprietățile punctelor materiale din mecanica clasică (newtoniană) și nu evoluează după legile mecanicii clasice (v. și par. 60). Totodată, aceste particule pot avea și moment magnetic (momentul magnetic intrinsec, de spin) și nu numai sarcină electrică. Mărimile caracteristice particulelor și sistemelor staționare de particule sînt *cuantificate*, adică pot avea valori aparținînd unui șir discret. În particular, sarcina electrică microscopică a particulelor elementare poate avea numai valorile 0, $+q_0$ și $-q_0$, unde

$$q_0 \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \approx 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ Fr.} \quad (58.13)$$

(în Fizică, q_0 se notează de obicei e). De aceea, sistemele de particule au o sarcină care e *multiplul exact* al valorii de mai sus, ceea ce a permis, de altfel, și măsurarea directă a acestei valori (experiențele lui Millikan, 1911)¹. Câmpul electromagnetic microscopic însuși poate manifesta o structură discretă, ca fiind alcătuit din particule elementare, numite *fotoni* (fără masă de repaus și fără sarcină electrică), a căror probabilitate de prezență în spațiu este caracterizată de repartiția continuă a câmpului calculat cu *ecuațiile Maxwell-Lorentz*.

58.3. Aplicații

58.3.1. Conservarea sarcinii electrice în teoria electronilor. Proprietatea de conservare a sarcinii electrice este demonstrată ca o teoremă în această teorie. Astfel, dacă se ia divergența ecuației (58.6) și se ține seama de ecuațiile (58.8) și (58.5) și de faptul că divergența unui rotor e identic nulă, se obține

$$\operatorname{div}_m (\rho_m \mathbf{u}_m) + \frac{\partial \rho_m}{\partial t_m} = 0, \quad (58.14)$$

Aceasta e forma locală a teoremei conservării sarcinii microscopice. Integrînd pe un volum V_Σ , mărginit de o suprafață închisă Σ ($\vec{x} \in \Sigma$), rezultă, cu teorema lui Gauss-Ostrogradski, forma integrală a teoremei conservării sarcinii

$$-\frac{d}{dt_m} \iiint_{V_\Sigma} \rho_m dv = \iint_{\Sigma} \rho_m \mathbf{u}_m d\mathbf{A}. \quad (58.15)$$

Dacă suprafața Σ e dusă prin vid, astfel ca să înconjure complet o singură particulă de sarcină q_m , atunci în punctele acestei suprafețe $\rho_m = 0$, iar $\iiint_{V_\Sigma} \rho_m dv = q_m$. Se obține

$$-\frac{dq_m}{dt_m} = 0 \quad \text{sau} \quad q_m = \text{const.} \quad (58.16)$$

Sarcina unei particule electrice microscopice e invariabilă în

¹ V. E. V. Spolski, *Fizica atomică*, vol. I, Ed. tehnică, 1952.

58.3.2. Energia electromagnetică microscopică și fluxul de energie electromagnetică microscopică. Când o particulă se mișcă în câmpul electromagnetic microscopic cu viteza $\mathbf{u}_m$, forța electromagnetică (58.2) nu efectuează lucru mecanic decât prin termenul ei electric, deoarece termenul magnetic (forța lui Lorentz $q_m \mathbf{u} \times \mathbf{b}$) e perpendicular pe viteză. Dacă avem un sistem de particule asupra cărora acționează numai forțe electromagnetice, creșterea energiei cinetice W_c a sistemului în unitatea de timp este deci egală cu puterea efectuată numai de forțele electrice. Densitatea de volum a acestei puteri fiind, cu relațiile (58.10) și (58.5).

$$\mathbf{f} \mathbf{u}_m = \rho_m \mathbf{u}_m \mathbf{e} = \mathbf{j} \mathbf{e}, \quad (58.17)$$

creșterea acestei energii cinetice este dată de relația

$$\frac{dW_c}{dt} = \iiint_{V_\Sigma} \mathbf{j} \mathbf{e} \, dv. \quad (58.18)$$

unde V_Σ e un volum care conține în interiorul lui sistemul de particule. Expresia $\mathbf{j} \mathbf{e}$ din relația (58.18) se poate transforma cu ajutorul ecuațiilor (58.6) și (58.7) în același mod ca în teoria macroscopică (v. par. 29.4, vol. I). Se obține

$$\mathbf{j} \mathbf{e} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{e} \operatorname{rot}_m \mathbf{b} - \varepsilon_0 \mathbf{e} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = -\operatorname{div}_m \left(\frac{\mathbf{e} \times \mathbf{b}}{\mu_0} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mathbf{b}^2}{2\mu_0} + \varepsilon_0 \frac{\mathbf{e}^2}{2} \right].$$

Înlocuind în relația (58.18) și folosind teorema lui Gauss-Ostrogradski, se obține forma integrală a teoremei conservării energiei electromagnetice în teoria electronilor

$$-\frac{d}{dt} \left[W_c + \iiint_{V_\Sigma} \left(\frac{\mathbf{b}^2}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon_0 \mathbf{e}^2}{2} \right) dv \right] = \iint_{\Sigma} \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{b}}{\mu_0} d\mathbf{A}. \quad (58.19)$$

Viteza de scădere a sumei dintre energia cinetică a particulelor W_c și energia câmpului electromagnetic microscopic cu densitatea de volum

$$w_m = \frac{\mathbf{b}^2}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon_0 \mathbf{e}^2}{2} \quad (58.20)$$

e deci egală cu fluxul de energie electromagnetică prin suprafață (spre exterior), adică cu fluxul vectorului Poynting microscopic

$$\mathbf{s}_m = \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{b}}{\mu_0} = \mathbf{e} \times \mathbf{h}. \quad (58.21)$$

58.3.3. Conservarea energiei unei particule elementare care se mișcă într-un câmp electromagnetic staționar. Considerăm o particulă elementară de sarcină $q_m = \pm q_0$, care se mișcă într-un câmp electromagnetic exterior, practic staționar, cu intensitatea câmpului magnetic $\mathbf{e} \approx \mathbf{E}$ și inducția magnetică $\mathbf{b} \approx \mathbf{B}$, practic invariabile în timp. Asupra particulei se exercită forța electromagnetică (58.2)

$$\mathbf{F} = q_0 (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}),$$

Lucrul mecanic elementar efectuat de câmp asupra particulei în deplasarea elementară $d\mathbf{r} = \mathbf{u} dt$ cu viteza $\mathbf{u}$ este egal, conform teoremei energiei cinetice, cu variația acestei energii

$$d\mathcal{E} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \mathbf{u} \, dt = d \left(m \frac{u^2}{2} \right),$$

unde m e masa particulei. Înlocuind expresia forței și observînd că în regim staționar cîmpul electric e potențial

$$\mathbf{e} \approx \mathbf{E} = -\text{grad } V, \quad (58.22)$$

rezultă (cu $\mathbf{u}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = 0$)

$$\delta \mathcal{L} = \pm q_0 \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = -q_0 \, d\mathbf{r} \cdot \text{grad } V = d\left(m \frac{u^2}{2}\right).$$

Deoarece

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = d\mathbf{r} \cdot \text{grad } V$$

e creșterea potențialului cîmpului exterior în lungul elementului de arc $d\mathbf{r}$, rezultă

$$\delta \mathcal{L} = \mp q_0 \, dV = d(\mp q_0 V) = d\left(m \frac{u^2}{2}\right), \quad (58.23)$$

adică

$$m \frac{u^2}{2} \pm q_0 V = \text{const.} \quad (58.24)$$

În mișcarea particulei considerate se conservă deci energia totală, compusă din energia cinetică $W_c = mu^2/2$ și energia potențială în cîmpul exterior

$$W_p = \pm q_0 V. \quad (58.25)$$

Dacă particula a intrat în cîmp cu viteza inițială nulă într-un punct de potențial V_0 , rezultă

$$\frac{mu^2}{2} \pm q_0 V = \pm q_0 V_0$$

sau

$$u = \sqrt{\frac{2q_0}{m} |V - V_0|} \quad (58.26)$$

În modul, viteza u a particulei e univoc determinată în fiecare punct de diferența de potențial dintre punctul din cîmp considerat și potențialul de referință inițial. Cu ajutorul unei diferențe de potențial convenabile, particulele pot fi accelerate pînă la viteze foarte mari (de exemplu în tuburile electronice).

Deoarece toate particulele elementare încărcate au (în modul) aceeași sarcină q_0 , lucrul mecanic e același (în modul) pentru toate, în cazul unei diferențe de potențial date; din relația (58.23) rezultă:

$$|\mathcal{L}| = q_0 |V - V_0|. \quad (58.27)$$

Se numește *electron-volt* (eV) lucrul mecanic efectuat de forțele electrice asupra unei particule elementare, care se deplasează între două puncte, sub acțiunea unei diferențe de potențial de un volt. Numeric:

$$1 \text{ eV} = |\mathcal{L}|_{V-V_0=1} = q_0 \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J.} \quad (58.28)$$

58.3.4. Mișcarea unui electron într-un cîmp electric staționar, transversal. Forma exactă a traiectoriei particulei depinde de structura exactă a cîmpului electric, respectiv magnetic,

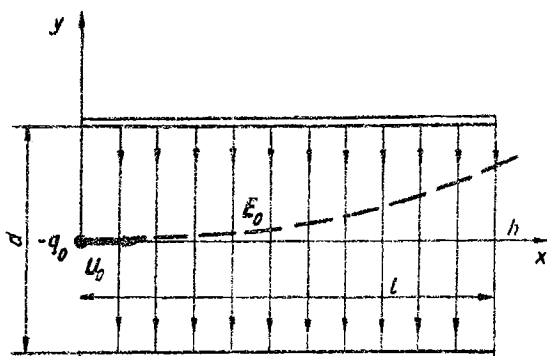


Fig. 58.1

relația (58.26) determinând numai modulul vitezei. În cazul $B = 0$, $E = E_0$ (constant în spațiu), $q = -q_0$ și $m = m_0$ (electron), ecuația de mișcare este

$$F = m_0 \frac{du}{dt} = m_0 \frac{d^2 r}{dt^2} = -q_0 E_0 \quad (58.29)$$

Presupunind viteza inițială u_0 perpendiculară pe liniile de câmp (prodate, de exemplu, cu un condensator plan, v. fig. 58.1) și alegând axele ca în figură, cu $E = -E_0 j$, $u_0 = u_0 i$, rezultă (proiectând pe axe)

$$m_0 \frac{du_x}{dt} = m_0 \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \quad m_0 \frac{du_y}{dt} = m_0 \frac{d^2 y}{dt^2} = -q_0 E_0$$

de unde

$$\frac{dx}{dt} = u_x = \text{const.} = u_0$$

$$\frac{dy}{dt} = u_y = \frac{q_0}{m_0} E_0 t + \text{const.} = \frac{q_0}{m_0} E_0 t \quad (u_y(0) = u_0 j = 0,$$

Prin integrare rezultă ecuațiile parametrice ($x(0) = y(0) = 0$)

$$x = u_0 t$$

$$y = \frac{q_0}{m_0} E_0 \frac{t^2}{2},$$

corespunzătoare traiectoriei parabolice

$$\frac{q_0 E_0}{2 m_0 u_0^2} x^2 \quad (58.30)$$

La distanța $x = l$, devierea traiectoriei este

$$h = y(l) = \frac{q_0 E_0}{2 m_0 u_0^2} l^2.$$

Dacă $U \approx E_0 d$ e tensiunea dintre armăturile condensatorului, deviația rezultă proporțională cu tensiunea

$$h = \frac{q_0 l^2}{2 m_0 u_0^2 d} U \quad (58.31)$$

Acesta e principiul *deviației electrostatice*, utilizate în tuburile catodice. Cunoscând viteza inițială u_0 (produsă cu o tensiune de accelerare și calculată cu (58.26)) și măsurând mărimile l, d, h, U , se poate deduce experimental sarcina specifică a electronului $\frac{q_0}{m_0}$ care rezultă

$$\frac{q_0}{m_0} \approx 1,758 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg} \approx 5,27 \cdot 10^{17} \frac{Fr}{g} \quad (58.32)$$

această cale, valoarea (58.13) se poate deduce m electronului

$$m_0 = \frac{q_0}{\frac{q_0}{m_0}} \approx 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \quad 9,1 \cdot 10^{-28} \text{ g.} \quad (58.33)$$

Relația (58.32) arată că în particulele elementare concentrarea sarcinii electrice atinge valori uriașe, cu multe ordine de mărime peste valorile realizabile macroscopic în laborator (inferioare lui 10^{-8} C/kg).

Observație: La viteze apropiate de viteza luminii, masa electronului crește în acord cu prevederile teoriei relativității. Valoarea (58.32) e masa de repaus.

58.3.5. Mișcarea unui electron într-un câmp magnetic transversal. În cazul $E = 0$, $B = B_0$ (constant în spațiu), $q = -q_0$ și $m = m_0$, ecuația de mișcare este

$$F = m_0 \frac{du}{dt} = m_0 \frac{d^2 r}{dt^2} = -q_0 (u \times B_0). \quad (58.34)$$

Dacă viteza inițială u_0 e paralelă cu inducția magnetică, forța e mereu nulă și mișcarea rectilinie și uniformă în lungul liniilor de câmp magnetice. Dacă viteza inițială e însă perpendiculară pe liniile de câmp magnetic, forța (58.34) e maximă și abate direcția de mișcare într-un plan perpendicular pe liniile de câmp (fig. 58.2).

Fie $B_0 = k B_0$ dirijat în lungul axei Oz și $u_0 = i u_0$ dirijat în lungul axei Ox . Forța e conținută mereu în planul Oxy , care conține și viteza inițială. Ca urmare, traiectoria e conținută în planul Oxy și $u \perp B$ în orice punct. Deoarece într-un câmp magnetic modulul vitezei e constant (v. par. 58.3.3.), rezultă că și modulul forței e constant

$$F = q_0 u_0 B_0. \quad (58.35)$$

O forță constantă în modul și normală mereu pe viteză determină însă o accelerație centripetă egală cu

$$a = \frac{F}{m_0} =$$

Traectoria e deci circulară

R dedusă valoarea accelerației centripete

$$\frac{u_0^2}{R} = \frac{q_0}{m_0} u_0 B_0$$

unde

$$R = \frac{m_0 u_0}{q_0 B_0} \quad (58.36)$$

Mișcarea e circulară și uniformă, cu viteza unghiulară de rotație

$$\omega = \frac{u_0}{R} = \frac{q_0 B_0}{m_0}$$

Ecuația traiectoriei — care se putea obține și direct prin integrare din relația (58.34) — rezultă (v. fig. 58.2)

$$x^2 + (y - R)^2 - R^2 = 0,$$

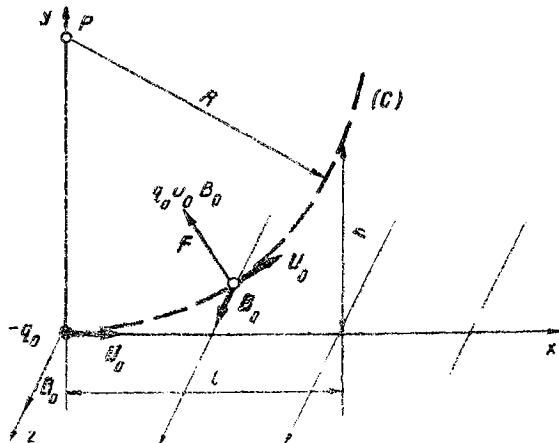


Fig. 58.2

iar deviația $y = h$ pentru $x = l$ R rezultă

$$h = y(l) = R + \sqrt{R^2 - l^2}. \quad (58.37)$$

Acesta e principiul *deviației magnetice*, utilizat în tuburile catodice, în care câmpul B_0 e produs de două bobine de deflexiune cu planul spirelor perpendicular pe direcția lui B_0 , așezate de-o parte și de alta a tubului.

58.4. Interpretarea microscopică a mărimilor macroscopice

58.4.1. Mediile macroscopice ale mărimilor microscopice. Din punctul de vedere al interpretării microscopice, mărimile macroscopice sînt valori medii ale celor microscopice, calculate pe domenii spațiale și intervale de timp numiți infiniți mici fizici. Dacă $\Delta\mathfrak{D}$ e un *domeniu spațial infinit mic fizic*, el trebuie să fie suficient de mic din punct de vedere macroscopic, pentru ca în cuprinsul lui mărimile macroscopice să aibă o variație neglijabilă și totodată suficient de mare din punct de vedere microscopic (să conțină un număr foarte mare de molecule). Dacă Δt e un *interval de timp infinit mic fizic*, el trebuie să fie suficient de mic din punct de vedere macroscopic, pentru ca în decursul lui funcțiunile macroscopice de timp să admită o variație neglijabilă și totodată suficient de mare din punct de vedere microscopic (să fie mult mai mare decît cele mai mari perioade ale proceselor care au loc la scară moleculară și atomică). Notăm cu (x, y, z) coordonatele spațiale macroscopice, adică acelea ale centrului C al infinitului mic fizic $\Delta\mathfrak{D}$ de volum ΔV , cu t timpul macroscopic, adică timpul asociat mijlocului intervalului Δt , cu (x_m, y_m, z_m) coordonatele spațiale microscopice ale unui punct oarecare din $\Delta\mathfrak{D}$, cu t_m timpul microscopic și cu ξ, η, ζ, τ coordonatele relative

$$\xi = x - x_m, \quad \eta = y - y_m, \quad \zeta = z - z_m, \quad \tau = t - t_m. \quad (58.38)$$

Fie $\varphi_m = \varphi(x_m, y_m, z_m, t_m)$ o mărime microscopică, funcție de punct și de moment. Conform definiției valorii medii din calculul integral, media spațială a funcțiunii la un moment microscopic t_m dat pe domeniul $\Delta\mathfrak{D}$ este

$$\bar{\varphi}^s(t_m) = \frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta\mathfrak{D}} \varphi(x_m, y_m, z_m, t_m) dx_m dy_m dz_m. \quad (58.39)$$

Această medie spațială admite fluctuații rapide în timp. De aceea, media macroscopică a mărimii microscopice e egală prin definiție cu valoarea medie în intervalul de timp Δt a mediei spațiale (58.39), adică cu

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}^s = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} \bar{\varphi}^s(t_m) dt_m. \quad (58.40)$$

Înlocuind aici expresia (58.39) și efectuind schimbarea de variabile de integrare necesară pentru a trece de la coordonatele x_m, y_m, z_m, t_m la cele relative (58.38) se obține expresia

$$\tilde{\varphi}(x, y, z, t) = \frac{1}{\Delta v \Delta t} \underbrace{\iiint_{\Delta \mathfrak{Q}}}_{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} \varphi(x + \xi, y + \eta, z + \zeta, t + \tau) d\xi d\eta d\zeta d\tau. \quad (58.41)$$

din care rezultă imediat că media macroscopică $\tilde{\varphi}$ e o funcțiune de coordonatele macroscopice x, y, z ,

O formă particulară importantă prezintă aceasta operație de mediere, dacă mărimea microscopică φ este o mărime de stare a particulelor microscopice, fiind nulă în vid și avînd dată integrala pe volumul V_{part} al unei particule

$$\Phi = \iiint_{V_{part}} \varphi dx_m dy_m dz_m \quad (58.42)$$

(de exemplu, densitatea de sarcină a cărei integrală de volum e sarcina particulei). În acest caz, formula mediei spațiale (58.39) devine

$$\tilde{\varphi} = \frac{1}{\Delta V} \sum \Phi,$$

unde suma se extinde asupra tuturor particulelor din $\Delta \mathfrak{Q}$. Dacă mărimea Φ are aceeași valoare pentru toate particulele și dacă $\Delta N = N_v \Delta V$ e numărul de particule din ΔV , unde $N_v = \Delta N / \Delta V$ e densitatea lor numerică, se obține

$$\tilde{\varphi} = N_v \Phi. \quad (58.43)$$

Media macroscopică rezultă atunci

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi} = N_v \Phi, \quad (58.44)$$

unde medierea din ultimul membru se efectuează acum numai în timp.

58.4.2. Interpretarea microscopică a intensității cîmpului electric $\mathbf{E}$ și a inducției magnetice $\mathbf{B}$ din teoria macroscopică. Considerăm un cîmp electromagnet de intensitate $\mathbf{E}$ și de inducție magnetică $\mathbf{B}$ într-un mediu extrem de rarefiat (cu polarizație electrică și magnetizația neglijabile), a cărui viteză locală față de sistemul inerțial lorentzian este $\mathbf{v}$. Dacă se aduce în cîmp un mic corp de probă electrizat (și nepolarizat) de sarcină electrică q , din punctul de vedere macroscopic se exercită asupra lui forța electrică (58.3), avînd pe unitatea de sarcină valoarea

$$\frac{\mathbf{F}}{q} = \mathbf{E}, \quad (58.45)$$

cînd micul corp e menținut în repaus față de mediul ambiant. În aceste condiții el are deci viteza $\mathbf{v}$ față de sistemul inerțial lorentzian. La scară atomică, asupra fiecărei particule a corpului, cîmpul electromagnetic exterior, de intensi-

tate microscopică $\mathbf{e}$ și de inducție microscopică $\mathbf{b}$, exercită forța microscopică (58.2), și deci pe unitatea de sarcină forța specifică:

$$\frac{\mathbf{F}_m}{q_m} = \mathbf{e} + \mathbf{b}. \quad (58.46)$$

Valoarea medie a acestei forțe specifice microscopice determină acțiunea ponderomotoare macroscopică (58.45) și trebuie deci interpretată ca intensitate a câmpului electric macroscopic

$$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{e}} + \mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{b}} \quad (58.47)$$

Dacă, în condiții în rest neschimbate, corpul de probă mișcă cu viteza $\mathbf{v}'$ față de mediul ambiant, din punct de vedere macroscopic apare forța suplimentară (58.4), avînd pe unitatea de sarcină valoarea

$$\frac{\mathbf{F}'}{q} = \mathbf{v}' \times \mathbf{B}. \quad (58.48)$$

În aceleași condiții, la scară atomică, asupra fiecărei particule a corpului de probă câmpul microscopic exterior exercită o forță magnetică suplimentară (corespunzătoare vitezei suplimentare $\mathbf{v}'$ căpătată de toate particulele corpului), care pe unitatea de sarcină are valoarea

$$\frac{\mathbf{F}'_m}{q_m} = \mathbf{v}' \times \mathbf{b}. \quad (58.49)$$

Deoarece valoarea medie a acestei forțe specifice microscopice determină acțiunea ponderomotoare macroscopică (58.48), oricare ar fi direcția și mărimea vitezei $\mathbf{v}'$, rezultă pentru inducția magnetică macroscopică interpretarea

$$\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{b}}. \quad (58.50)$$

58.4.3. Interpretarea microscopică a densității de sarcină electrică și a densității curentului electric de conducție. Așa cum se știe, particulele elementare sînt grupate în sisteme numite atomi, molecule, ioni. Moleculele și atomii sînt neutre din punct de vedere electric, sarcinile pozitive din nucleeele atomilor compensînd exact sarcinile negative ale electronilor de pe orbitele din jurul nucleelor. Particulele elementare care intră în constituția atomilor și moleculelor se numesc *particule legate* și nu aduc nici o contribuție la sarcina macroscopică a corpurilor, sarcina lor totală fiind nulă pentru orice mic corp izolat în vid. Ionii conțin atît particule legate, a căror sumă a sarcinilor e nulă pe întregul ion, cît și electroni în exces (ioni negativi) sau în lipsă (ioni pozitivi). Oricare ar fi natura unui sistem de s particule legate, avînd sarcinile q_{leg} (moleculă, atom, ion etc.), există relația

$$\sum_{k=1}^s q_{leg}^k = 0. \quad (58.51)$$

În afară de sistemele de particule mai există și electroni liberi (mai corect cvasi-liberi), care se pot deplasa oricît de mult în cuprinsul corpului considerat, nefiind localizați în anumite molecule sau în anumiți atomi sau ioni.

Excesul local de sarcină pozitivă sau negativă al ionilor împreună cu sarcina electronilor liberi poate să contribuie la sarcina macroscopică a corpurilor, deoarece poate să aibă o valoare totală nenulă pentru un mic corp, izolat în vid. Din acest motiv se numesc *particule libere* electronii liberi și particulele în exces față de starea neutră din ioni. Aceste particule se mai numesc și *purători de sarcină* și, prin deplasarea lor (de ex. a ionilor în electroliți sau a electronilor în metale), pot contribui la *curentul electric de conducție* din teoria macroscopică, care — din punct de vedere microscopic se interpretează prin *curentul de convecție, al purtătorilor de sarcină, față de restul conductorului*.

În acord cu această clasificare a particulelor elementare din corpuri, densitatea microscopică de sarcină se poate descompune aditiv în doi termeni

$$\rho_m = \rho_{m\text{lib}} + \rho_{m\text{leg}} \quad (58.52)$$

Primul, $\rho_{m\text{lib}}$, se numește *densitatea de volum a sarcinii microscopice libere* și e nul în vid sau în interiorul particulelor legate. Al doilea, $\rho_{m\text{leg}}$, se numește *densitatea de volum a sarcinii microscopice legate* și e nul în vid sau în interiorul particulelor libere. În acord cu faptul că particulele legate nu pot contribui la sarcina macroscopică a corpurilor, se admite că *densitatea de volum a sarcinii electrice din teoria macroscopică este valoarea medie a densității sarcinii microscopice libere*

$$\rho_v = \rho_{m\text{lib}} = \overline{N_v q_{\text{lib}}} \quad (58.53)$$

ultima expresie fiind o formă particulară a relației (58.44), valabilă cînd toate particulele libere sînt de același tip și au densitatea numerică N_v . De asemenea, *densitatea curentului electric de conducție din teoria macroscopică este valoarea medie a densității curentului microscopic de convecție al particulelor libere față de conductor*

$$\mathbf{J} = \overline{\rho_{m\text{lib}} \mathbf{w}_{\text{lib}}} = \overline{N_v q_{\text{lib}} \mathbf{w}_{\text{lib}}}. \quad (58.54)$$

Aici $\mathbf{w}_{\text{lib}}$ e viteza relativă la conductor a acestor particule, iar ultima expresie e valabilă cînd toate particulele libere sînt de același tip.

58.4.4. Interpretarea microscopică a polarizației electrice. În teoria electronilor se consideră că particulele elementare nu au moment electric. Momentul electric trebuie să fie în acest caz o mărime derivată a sistemelor de particule legate, care sînt analoge unor dipoli electrici (v. par. 4.2, vol I). Generalizînd definiția momentului electric al dipolului pentru un sistem de s particule încărcate — numește *moment electric microscopic dipolar* al sistemului mărimea

$$\mathbf{p} = \sum_{k=1}^s \mathbf{l}^k q_{\text{leg}}^k \quad (58.55)$$

în care $\mathbf{l}^k$ sînt razele vectoriale ale particulelor față de centrul de inerție C al sistemului (moleculă, atom, ion etc. — fig. 58.3).

Media se consideră pentru un interval de timp mare față de perioadele de rotație ale particulelor din sistem. Polarizația electrică $\mathbf{P}$ e definită macroscopic ca densitate de volum a momentului electric microscopic. Cum acesta e rezultatul însumării valorilor medii ale tuturor momentelor (58.55) ale diferitelor molecule, rezultă că *polarizația e interpretabilă microscopic ca valoare medie a sumei momentelor microscopice ale moleculelor din unitatea de volum*. Dacă toate moleculele sînt identice, rezultă o relație analogă cu relația (58.44);

$$\mathbf{P} = \overline{N_v \mathbf{p}}, \quad (58.56)$$

în care medierea se face numai în timp. În aceste condiții se demonstrează că *densitatea sarcinii de polarizație din teoria macroscopică* (v. par. 4.4, vol. I) *este valoarea medie a densității microscopice a sarcinilor legate*:

$$\rho_{vp} = -\operatorname{div} \mathbf{P} = \tilde{\rho}_{meg}. \quad (58.57)$$

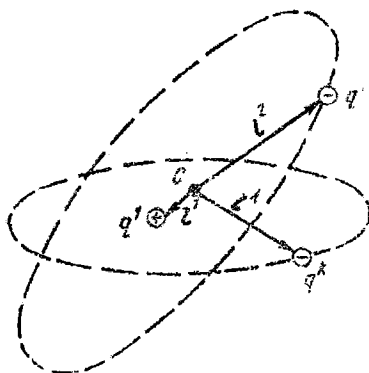


Fig. 58.3

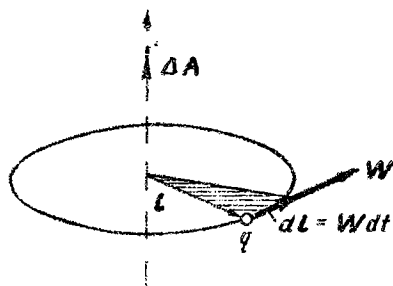


Fig. 3.

58.4.5. Interpretarea microscopică a magnetizației. În teoria electronilor se consideră că particulele elementare nu au moment magnetic. Momentul magnetic trebuie să fie în acest caz o mărime derivată a sistemelor de particule legate în mișcare, care sînt analoge unor bucle de curent (v. par. 18.2, vol. I), așa cum a presupus Ampère cu mult timp înainte de cunoașterea structurii atomului. În adevăr, atomii sînt constituiți din nuclee încărcate pozitiv în jurul cărora se rotesc electroni pe orbite închise. Considerăm pentru simplificare o orbită circulară (fig. 58.4) de rază l , pe care se rotește o particulă de sarcină q , cu viteza w și raza vectoare l față de centrul orbitei. Orbita trebuie echivalată cu o buclă de curent de moment magnetic

$$\mathbf{m} = i\mathbf{A}, \quad (58.58)$$

unde $\mathbf{A}$ e vectorul arie al buclei, iar i curentul ei. Pentru a generaliza această definiție, observăm că în intervalul de timp Δt , particula străbate parcursul $w\Delta t$ și raza vectoare mătură aria

$$\Delta A = \frac{1}{2} \mathbf{l} \times w\Delta t.$$

Cum intensitatea curentului e sarcina transmisă în unitatea de timp printr-o suprafață transversală față de direcția de mișcare, curentul echivalent, în acest caz, particulei e $q/\Delta t$. Contribuția mișcării particulei la momentul magnetic al sistemului poate fi definită prin analogie cu relația (58.58) de relație

$$\frac{q}{\Delta t} \Delta \mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{l} \times q \mathbf{w}$$

Pe baza acestei analogii se numește *moment magnetic orbital* al unui sistem de s particule legate, în mișcare pe orbite închise în jurul centrului C , mărimea

$$\mathbf{m}_{\text{orb}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s \mathbf{l}^k \times \zeta_{\text{leg}}^k \mathbf{w}^k \quad (58.59)$$

Dezvoltarea ulterioară a teoriei atomice nu a confirmat ipoteza teoriei electronilor, conform căreia particulele elementare nu ar avea moment magnetic. Pe baze experimentale și teoretice (în cadrul Fizicii cuantice) s-a constatat că particulele pot avea un moment magnetic propriu sau intrinsec, numit *moment magnetic de spin*, care din punctul de vedere al teoriei electronilor trebuie considerat o mărime primitivă (ireductibilă la curenți electrici orbitali). Valoarea medie a sumei momentelor magnetice de spin $\mathbf{m}^k$ ale particulelor unui sistem atomic se numește *moment magnetic de spin al sistemului*

$$\mathbf{m}_{\text{spin}} = \sum_{k=1}^s \tilde{\mathbf{m}}^k. \quad (58.60)$$

În ansamblu, un sistem de particule legate (moleculă, atom, ion etc. are *momentul magnetic microscopic*

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_{\text{orb}} + \mathbf{m}_{\text{spin}} = \sum_{k=1}^s \left(\frac{1}{2} \mathbf{l}^k \times q^k \mathbf{w}^k + \tilde{\mathbf{m}}^k \right). \quad (58.61)$$

Magnetizația $\mathbf{M}$, adică momentul magnetic al unității de volum, are atunci o expresie analogă cu a polarizației electrice (58.56)

$$\mathbf{M} = \overline{N_v \mathbf{m}}, \quad (58.62)$$

dacă toate moleculele sînt identice.

Cu aceste interpretări pentru mărimile electromagnetice cele mai importante se pot deduce ecuațiile cîmpului electromagnetic macroscopic (ecuațiile Maxwell) prin mediere, pornind de la ecuațiile cîmpului electromagnetic microscopic¹ (58.6...58.9). Totodată, pe baza interpretării microscopice a mărimilor macroscopice și a ipotezelor teoriei atomice a corpurilor, se pot deduce și interpreta diferitele proprietăți și legi de material (v. și cap. 59 și cap. 60).

¹ R. Răduleș, *Bazele teoretice ale electrotehnicii*, vol. IV, Tipografia Litografia Învățămîntului, 1956.

58.4.6. **Medii statistice.** Calculul mediilor temporale care intervin în expresiile (58.44), (58.54), (58.56), (58.62) ar fi practic imposibil dacă nu s-ar folosi metode statistice în aceste medii temporale se înlocuiesc prin *mediile statistice*¹.

În adevăr, în condiții macroscopice date și invariabile, un sistem macroscopic evoluează neconștient la scara microscopică, unde starea sa, caracterizabilă printr-un număr enorm de parametri, e o funcțiune extrem de complicată de timp. De aceea *există un număr foarte mare de stări microscopice* $S(t_m)$ compatibile cu aceleași condiții macroscopice. Realizarea efectivă a uneia oarecare dintre aceste stări reprezintă un *eveniment întâmplător* în raport cu condițiile macroscopice date. Dacă se cunoaște *probabilitatea* $\mathfrak{L}(S) \geq 0$ de realizare a acestui eveniment, numită *probabilitate de stare*, valoarea medie a unei mărimi microscopice oarecare $\Phi(S)$ (funcțiune de microstarea S) e dată de expresia

$$\bar{\Phi} = \sum_s \Phi(S) \mathfrak{L}(S). \quad (58.63)$$

Acastă e *media statistică* a unei mărimi microscopice. Cum media unei constante buie să fie egală cu acea constantă, probabilitățile de stare $\mathfrak{L}(S)$ satisfac o relație numită *condiția de normare*

$$\sum_s \mathfrak{L}(S) = 1. \quad (58.64)$$

din care rezultă că probabilitățile sînt subunitare, cel mult

$$\mathfrak{L}(S) \leq 1. \quad (58.65)$$

Sumele din relațiile (58.63) și (58.64) se calculează asupra tuturor stărilor posibile ale sistemului, compatibile cu condițiile macroscopice date. Calculul pe cale statistică al valorilor medii necesită, așadar, cunoașterea funcției $\mathfrak{L}(S)$ numită *funcțiune de repartiție*.

În cazul unui sistem macroscopic, compus dintr-un număr foarte mare de micro-sisteme identice în interacțiune slabă — cum sînt, de exemplu, moleculele unui gaz — se demonstrează (în cadrul fizicii statistice clasice), că, la echilibru termic, probabilitatea ca un micro-sistem (o moleculă) să se afle într-o stare s oarecare e dată de relația

$$\mathfrak{L}(s) = \text{const.} \cdot e^{-\frac{\omega(s)}{kT}}, \quad (58.66)$$

în care $\omega(s)$ e energia microsistemului în stare s , T temperatura absolută (în grade Kelvin, iar

$$k \approx 1,37 \cdot 10^{-23} \text{ J/}^\circ\text{K} \quad (58.67)$$

e *constanta universală a lui Boltzmann*. Constanta multiplicativă neprecizată din expresia (58.66) e o funcțiune de temperatură și de proprietățile macroscopice ale sistemului, care se determină cu ajutorul condiției de normare (58.64).

Funcțiunea de repartiție (58.66) se numește *funcțiunea de repartiție a lui Maxwell-Boltzmann* și pune în evidență rolul pe care îl are agitația termică, adică ansamblul interacțiunilor dezordonate existente la nivel atomic.

v. S. Tițica, *Elemente de mecanică statistică*, Ed. tehnică, 1956.

¹ Stările microsistemelor care compun sistemul macroscopic sînt notate cu litera mică s . Starea microscopică a acestui sistem definită de ansamblul stărilor microsistemelor a fost notată cu litera mare S .

59. || POLARIZAREA ELECTRICĂ ȘI MAGNETICĂ A CORPURILOR

59.1. Teoria clasică a susceptivității electrice

59.1.1. Polarizarea corpurilor. Câmpul electric activ. În vol. I paragraful 4.5 s-a prezentat o teorie calitativă microscopică a polarizației electrice. S-a arătat că din punctul de vedere al polarizării electrice există două clase de molecule: *molecule nepolare*, al căror moment electric microscopic (dat de relația (58.55)) e nul în lipsa unui câmp electric exterior moleculei, și *molecule polare* al căror moment electric microscopic (58.55) e diferit de zero chiar în lipsa unui câmp exterior. Se mai spune că moleculele polare prezintă moment electric microscopic spontan. Polarizarea electrică specifică corpurilor cu molecule nepolare se numește *polarizare diaelectrică* sau *polarizare de deformare* și se manifestă la orice corp polarizat, iar aceea specifică corpurilor cu molecule polare se numește *polarizare paraelectrică* sau *polarizare de orientare* și se manifestă numai la aceste corpuri.

Polarizarea electrică macroscopică a corpurilor se produce prin efectul acțiunilor exercitate asupra moleculelor (atomilor) de câmpul electric exterior acestora. Acțiunile consistă în *deformarea* moleculelor nepolare — care, în acest fel, capătă momente electrice microscopice induse — sau în *orientarea* moleculelor polare, care în lipsa câmpului exterior au de obicei o orientare haotică și nu contribuie la polarizarea macroscopică a corpului. Câmpul electric care exercită aceste acțiuni asupra moleculei se numește *câmp electric activ* (sau *interior*) E_0 . El nu coincide cu câmpul electric macroscopic, deoarece acesta din urmă e obținut prin medierea câmpului microscopic pe un volum infinit mic fizic care e ocupat de foarte multe molecule, inclusiv de molecula asupra căreia se exercită acțiunea, pe când câmpul activ se obține prin medierea efectuată numai pe volumul moleculei considerate și în lipsa acesteia. Se poate însă arăta că pentru o clasă largă de corpuri mărimea E_0 este aproximativ egală cu intensitatea E_c a câmpului electric macroscopic dintr-o cavitate sferică vidă Σ , de rază foarte mică R , cu centrul în molecula considerată și al cărei volum e un infinit mic fizic, adică e ocupat de foarte multe molecule:

$$E_0 = \tilde{e}_{\text{int}\Sigma} + \tilde{e}_{\text{ext}\Sigma} \approx \tilde{e}_{\text{int}\Sigma} + E_c \approx E_c. \quad (59.1)$$

În această aproximație se consideră, pe de o parte, că media intensității câmpului electric $e_{\text{ext}\Sigma}$ produs de moleculele din *exteriorul* sferei e practic egală cu intensitatea E_c (datorită faptului că aceste molecule exterioare se găsesc foarte departe de centrul sferei din punct de vedere microscopic) și se consideră, pe de altă parte, că media intensității câmpului electric $\tilde{e}_{\text{int}\Sigma}$ produs de moleculele polarizate din *interiorul* sferei Σ , adică vecine cu molecula considerată, e nulă. Această ultimă presupunere e sigur corectă, din motive de simetrie, la cristalele din sistemul cubic sau la gaze (unde repartitia total dezordonată din

cauza agitației termice a moleculelor vecine din interiorul suprafeței Σ asigură compensarea statistică a câmpului produs de ele în centrul sferei).

Pentru calcul mărimii E_c folosim relația (5.4) (par. 5.1, vol. I)

$$E_c = E + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \frac{(\mathbf{P}n_i)\mathbf{R}}{R^3} dA,$$

în care $n_i = -\mathbf{n}$ e normala interioară la Σ , vectorul $\mathbf{R}$ e dirijat către punctul unde calculăm câmpul, adică spre centrul sferei, iar $\mathbf{P}$ poate fi considerat constant în punctele suprafeței Σ a căvității, deoarece sfera este foarte mică. (fig. 59.1)

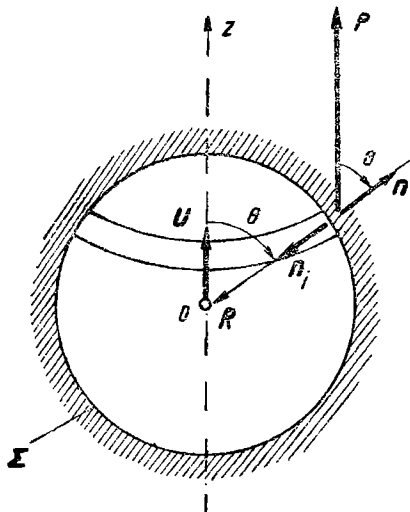


Fig. 59.1

Facem notația $E_{\Sigma} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \frac{(\mathbf{P}n_i)\mathbf{R}}{R^3} dA$. Din

motive de simetrie E_{Σ} e orientat Σ după axa O_z și integrandul depinde numai de θ , astfel că

$$\begin{aligned} E_{\Sigma} &= \mathbf{u}(\mathbf{u}E_{\Sigma}) = \mathbf{u} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \frac{(\mathbf{P}n_i)(\mathbf{R}\mathbf{u})}{R^3} dA = \\ &= \mathbf{u} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi} \frac{P \cos \theta R \cos \theta}{R^3} 2\pi R^2 \sin \theta d\theta = \\ &= -\mathbf{u} \frac{P}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi} \cos^2 \theta d(\cos \theta) = \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}. \end{aligned}$$

În consecință rezultă

$$E_0 \approx E_c = E + \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}. \quad (59.2)$$

Teoria microscopică a polarizației electrice urmărește să demonstreze expresia *legii macroscopice a polarizației electrice temporare* (rel. 4.36, par. 6.3, vol. I)

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad (59.3)$$

în care χ_e e mărimea de material numită *susceptivitate electrică*.

59.1.2. Polarizarea dielectrică (de deformare). Momentul electric microscopic indus, $\mathbf{p}_{ind}$, al moleculelor nepolare rezultă din deformarea moleculelor sau a atomilor (v. par. 4.5, vol. I), produsă de câmpul electric E_0 . Considerăm ca exemplu pentru simplificarea expunerii un atom de hidrogen, și că vectorul E_0 e orientat după normala la planul orbitei, ca în figura 59.2. Orbita electronului nu se deformează, dar planul ei se deplasează în sens contrar câmpului electric, iar nucleul (protonul) în sensul câmpului, și se formează astfel un dipol electric constituit din nucleul N al atomului, situat la distanța l de planul orbitei, și din centrul sarcinilor negative M , care reprezintă poziția medie a electronului aflat în mișcare rapidă pe orbită și e situat în centrul de simetrie al orbitei.

Scriind că în stare staționară, când încetează acțiunea de deformare a atomului, proiecția forței rezultante pe direcția vectorului $\mathbf{E}_0$ e nulă, se obține relația

$$0 = -q_0 E_0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0^2}{R^2} \sin \beta,$$

în care primul termen e proiecția forței $-q_0 \mathbf{E}_0$ exercitate de câmpul electric asupra electronului, iar al doilea termen e proiecția forței coulombiene $\mathbf{F}_c$ de atracție exercitate de nucleu asupra electronului, situat la distanța R de el.

Deoarece $\sin \beta = \frac{l}{R}$, iar $q_0 l = p_{\text{ind}}$, din ultima relație rezultă

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 l}{R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_{\text{ind}}}{R^3}$$

sau

$$p_{\text{ind}} = 4\pi R^3 \epsilon_0 E_0 \equiv \epsilon_0 \alpha E_0,$$

în care $\alpha = \frac{p_{\text{ind}}}{\epsilon_0 E_0}$ se numește *polarizabilitate electrică* și e o mărime proporțională cu volumul atomului, respectiv al moleculei ($\alpha = 4\pi R^3$). Din cauză că momentul electric indus are aceeași orientare ca și intensitatea câmpului electric activ, rezultă relația vectorială

$$\vec{p}_{\text{ind}} = \epsilon_0 \alpha \mathbf{E}_0. \quad (59.4)$$

Experiența arată că această relație e valabilă (cu anumite valori pentru α) atât în cazul când $\mathbf{E}_0$ are și o componentă paralelă cu planul orbitei (care în aceste împrejurări, se deformează) cât și în cazul unei molecule de structură mai complexă. De aceea se poate afirma că momentul electric microscopic indus e totdeauna proporțional cu intensitatea câmpului electric activ.

Dacă în unitatea de volum al corpului există, în medie, N_v molecule, expresia polarizației dielectrice este următoarea :

$$\mathbf{P} = N_v p_{\text{ind}} = \alpha N_v \epsilon_0 \mathbf{E}_0,$$

sau, ținând seama de relația (59.2) și considerînd nulă polarizația permanentă,

$$\mathbf{P} = N_v \alpha \epsilon_0 \left(\mathbf{E} - \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \right),$$

din care se obține

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \frac{\alpha N_v}{1 - \frac{N_v \alpha}{3}} \mathbf{E}_0. \quad (59.5)$$

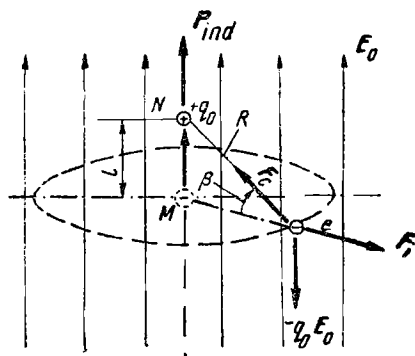


Fig. 59.2

Am stabilit astfel, prin analiza microscopică a fenomenelor, expresia legii polarizației electrice temporare (59.3). Prin comparare rezultă *expresia susceptivității dielectrice*

$$\chi_{ed} = \frac{N_v \alpha}{1 - \frac{N_v \alpha}{3}}. \quad (59.5')$$

Din această relație rezultă că susceptivitatea de natură dielectrică nu depinde direct de temperatură, polarizabilitatea fiind o mărime microscopică, proporțională cu volumul moleculei, iar N_v fiind proporțional cu densitatea substanței respective.

59.1.3. Polarizarea paraelectrică. Dacă un corp izotrop cu molecule polare nu se găsește într-un câmp electric stabilit din exterior, momentele electrice spontane $\mathbf{p}_p$ ale moleculelor sînt orientate dezordonat, datorită agitației termice. De aceea, suma momentelor electrice din unitatea de volum e nulă, iar corpul rezultă nepolarizat din punct de vedere microscopic. În cazul aplicării unui câmp electric din exterior, moleculele tind să se orienteze sub acțiunea cuplului $\mathbf{C} = \mathbf{p}_p \times \mathbf{E}_0$, astfel încît momentele lor electrice să fie omoparalele cu intensitatea câmpului, a cărui direcție — luată ca direcție Oz — constituie o direcție privilegiată în corp; la această ordonare a orientării moleculelor, determinată de cuplul exercitat de câmpul activ asupra lor, se opune însă agitația termică, astfel că momentele electrice ale moleculelor formează diferite unghiuri (nule sau nenule) cu direcția câmpului, fiind însă mai probabilă realizarea unghiurilor ascuțite cu această direcție privilegiată. În această situație, suma momentelor electrice din unitatea de volum e diferită de zero, și deci corpul rezultă polarizat electric în sensul intensității câmpului. Dacă agitația termică ar fi atît de slabă și intensitatea câmpului electric atît de mare, încît toate momentele electrice să aibă orientarea câmpului, se spune că s-ar atinge *saturația*, iar polarizația nu ar mai putea crește.

Lucrul mecanic de rotație efectuat de forțele electrice care determină cuplul $\mathbf{C} = \mathbf{p}_p \times \mathbf{E}_0$ de valoare scalară $p_p E_0 \sin \theta$ este $-p_p E_0 \sin \theta d\theta$ (semnul minus provine din faptul că acest cuplu acționează în sens opus creșterii lui θ) și e egal cu descreșterea energiei potențiale w_p a moleculei în câmpul exterior

$$-dw_p = -p_p E_0 \sin \theta d\theta = C_0 d\theta.$$

Prin integrare rezultă expresia acestei energii

$$w_p = \int p_p E_0 \sin \theta d\theta = -p_p E_0 \cos \theta = -p_p E_0. \quad (59.6)$$

În lipsa unui câmp exterior care să tindă să orienteze moleculele, toate direcțiile din spațiu sînt în mod egal îndreptățite, și de aceea numărul de molecule cu orientările momentului electric, cuprinse între θ și $\theta + d\theta$ și între φ și $\varphi + d\varphi$ (v. fig. 59.3), e proporțional cu unghiul solid elementar corespunzător, adică cu elementul de arie $dA = \sin \theta d\theta d\varphi$ al sferei de rază unitate, centrată pe moleculă.

În termeni statistici se poate spune că, în absența vreunui câmp exterior, probabilitatea elementară ca orientarea momentului electric al unei molecule să fie cuprinsă în unghiul solid elementar considerat este

$$d\mathfrak{Z} = \text{const.} \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (59.7)$$

În prezența câmpului exterior E_0 , în care fiecare moleculă are energia potențială (59.6), această probabilitate devine (în acord cu repartiția Maxwell-Boltzmann, rel. 58.66)

$$\begin{aligned} d\mathfrak{Z} &= \text{const.} e^{-\frac{w_p}{kT}} dA = \\ &= \text{const.} e^{-\frac{w_p}{kT}} \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi, \end{aligned}$$

sau, ținînd seama de relația (59.6),

$$d\mathfrak{Z} = \text{const.} e^{\frac{p_p E_0 \cos \theta}{kT}} \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

sau

$$d\mathfrak{Z} = \text{const.} e^{a \cos \theta} d(\cos \theta) \cdot d\varphi, \quad (59.8)$$

unde s-a notat

$$a = \frac{p_p E_0}{kT}. \quad (59.9)$$

Constanta din expresia (59.8) a probabilității elementare se determină din condiția de normare (58.64), care, în acest caz al unei mulțimi continue de stări, se exprimă prin integrala

$$\int d\mathfrak{Z} = 1, \quad (59.10)$$

luată asupra tuturor valorilor posibile ale variabilelor independente.

Se obține

$$\text{const.} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{a \cos \theta} d(\cos \theta) d\varphi = 1$$

sau

$$\text{const.} = \frac{1}{2\pi \int_0^\pi e^{a \cos \theta} d(\cos \theta)}. \quad (59.11)$$

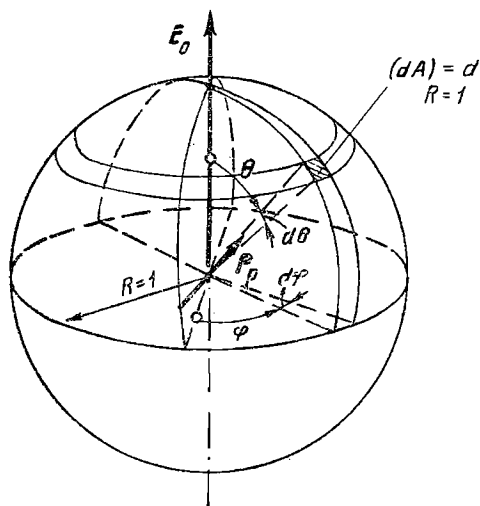


Fig. 59.3

Momentul electric mediu al unei molecule se calculează cu formula mediei statistice (58.63), care, în acest caz al unei mulțimi continue de stări, se exprimă prin integrala

$$\bar{\mathbf{p}} = \int \mathbf{p}_p d\mathcal{E} = \text{const.} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathbf{p}_p e^{a \cos \theta} d(\cos \theta) d\varphi. \quad (59.12)$$

E ușor de verificat că singura componentă nenulă a momentului mediu e aceea în lungul direcției cîmpului exterior. De aceea, în modul, momentul mediu coincide cu proiecția lui pe axa Oz

$$\bar{p} = \int p_p \cos \theta d\mathcal{E} = \text{const.} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} p_p \cos \theta e^{a \cos \theta} d(\cos \theta) d\varphi.$$

Integrînd în φ , înlocuind constanta cu relația (59.11) și trecînd la polarizația $P = N_v \bar{p}$ (unde N_v e numărul mediu de molecule din unitatea de volum), se obține expresia

$$P = N_v p_p \frac{\int_0^{\pi} e^{a \cos \theta} \cdot \cos \theta d(\cos \theta)}{\int_0^{\pi} e^{a \cos \theta} d(\cos \theta)}. \quad (59.13)$$

Observăm că numărătorul fracției din (59.13) este egal cu derivata numitorului în raport cu parametrul a . Făcînd schimbarea de variabilă $u = \cos \theta$, se obține

$$P = N_v p_p \frac{\frac{d}{da} \left[\int_{u=1}^{-1} e^{au} du \right]}{\int_{u=1}^{-1} e^{au} du} = N_v p_p \frac{d}{da} \left[\ln \int_1^{-1} e^{au} du \right] = N_v p_p \frac{d}{da} \left[\ln \frac{e^{-a} - e^a}{a} \right]$$

sau

$$P = N_v p_p \left[\frac{-e^{-a} - e^a}{e^{-a} - e^a} - \frac{1}{a} \right] = N_v p_p \left[\frac{\text{cha}}{\text{sha}} - \frac{1}{a} \right] = N_v p_p \left[\text{cth } a - \frac{1}{a} \right].$$

Funcțiunea

$$\mathcal{L}(a) = \text{cth } a - \frac{1}{a} \quad (59.14)$$

se numește *funcțiunea lui Langevin*, iar reprezentarea ei grafică este indicată în figura 59.4.

Cu această notație obținem

$$P = N p_p \mathfrak{L}(a). \quad (59.15)$$

În condițiile fizice obișnuite $a \ll 1$, și deci $\mathfrak{L}(a) \approx \mathfrak{L}'(0)a = \frac{a}{3}$. Cu această aproximație se obține, ținând seama de relațiile (59.9) (59.15) și (59.2),

$$P \simeq N_v p_p^2 \frac{E_0}{3\epsilon_0 k T} = N_v \frac{p_p^2}{3\epsilon_0 k T} \left(E + \frac{1}{3\epsilon_0} P \right),$$

de unde rezultă, explicitînd polarizația,

$$P \simeq N_v \frac{p_p^2}{3\epsilon_0 k T} \frac{1}{1 - N \frac{p_p^2}{9\epsilon_0 k T}} \epsilon_0 E.$$

Am demonstrat astfel expresia (59.3) a legii polarizației electrice temporare pentru substanțe paraelectrice. *Susceptivitatea paraelectrică* are expresia

$$\chi_e = \frac{N_v p_p^2}{3\epsilon_0 k T} \frac{1}{1 - \frac{N_v p_p^2}{9\epsilon_0 k T}}. \quad (59.16)$$

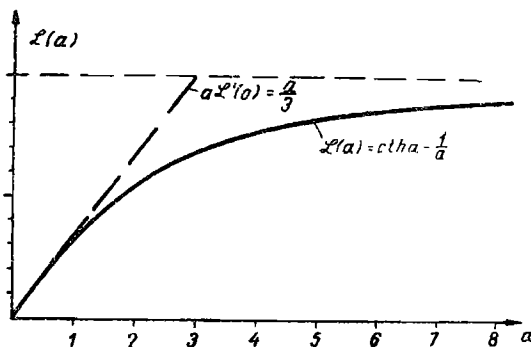


Fig. 59.4

Din această expresie rezultă că susceptivitatea de natură paraelectrică depinde de temperatură, și anume că ea scade cînd temperatura crește. În adevăr, dacă temperatura crește, agitația termică a moleculelor se mărește și efectul de orientare a momentelor electrice în sensul cîmpului este mai slab.

În acest calcul s-a ținut seama pînă acum numai de polarizația paraelectrică. În realitate și în moleculele polare apare un moment electric indus, astfel că polarizația totală a corpurilor paraelectrice e egală cu suma dintre o polarizație de forma relației (59.5) și o polarizație de orientare de forma relației (59.16). Ca rezultat, legea polarizației electrice temporare are forma

$$P = \left[\frac{N_v \alpha}{1 - \frac{N_v \alpha}{3}} + \frac{N_v p_p^2}{3\epsilon_0 k T} \frac{1}{1 - \frac{N_v p_p^2}{9\epsilon_0 k T}} \right] \epsilon_0 E, \quad (59.17)$$

din care rezultă relația

$$\chi_e = \frac{N_v \alpha}{1 - \frac{N_v \alpha}{3}} + \frac{N_v p_p^2}{3\epsilon_0 k T} \frac{1}{1 - \frac{N_v p_p^2}{9\epsilon_0 k T}}, \quad (59.18)$$

care reprezintă *expresia microscopică a susceptivității* unei clase largi de substanțe întîlnite în practică.

59.2. Teoria clasică a susceptivității magnetice

59.2.1. **Magnetizarea corpurilor. Cîmpul magnetic activ.** Așa cum am arătat în paragraful 58.4.5., moleculele corpurilor pot avea un moment magnetic microscopic $\mathbf{m}$, dat de relația (58.61), la care contribuie atît momentul magnetic orbital al micilor bucle de curent, pe care le reprezintă mișcarea pe orbite închise a electronilor, cît și momentul magnetic intrinsec de spin al particulelor elementare. Și în acest caz se deosebesc *molecule nepolare*, al căror moment magnetic rezultat (58.61) e nul în lipsa unui cîmp magnetic exterior (momentele instanțanee orbitale și de spin ale particulelor care compun molecula se compensează în medie) și *molecule polare*, al căror moment magnetic rezultat (58.61) nu se anulează în lipsa unui cîmp magnetic exterior, ci definește *momentul lor magnetic spontan*. Chiar dacă moleculele sînt polare, în lipsa unui cîmp exterior orientările momentelor diferitelor molecule sînt repartizate haotic, din cauza agitației termice și magnetizația macroscopică e nulă. Un cîmp exterior contribuie la apariția unei magnetizații macroscopice nenule prin două efecte (v. și par. 18.5, vol. I): *magnetizarea diamagnetică*, care provine din apariția unui moment magnetic indus, la fiecare moleculă în parte, sub acțiunea și pe direcția cîmpului exterior (dar în sens opus acestuia), și *magnetizarea paramagnetică*, care provine din orientarea moleculelor polare sub acțiunea și în sensul cîmpului exterior și împotriva tendinței de dezorientare a agitației termice. Paramagnetismul se poate manifesta deci numai la substanțe cu molecule polare, pe cînd diamagnetismul se produce la orice substanță.

Ca și în cazul polarizării electrice, cîmpul magnetic exterior moleculei considerate, numit și *cîmpul magnetic activ* $\mathbf{H}_0 = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_0$, diferă de cîmpul magnetic macroscopic și e dat — pentru o clasă largă de corpuri — de relația

$$\frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} = \mathbf{H}_0 \approx \mathbf{H} + \frac{1}{3} \mathbf{M}, \quad (59.19)$$

analogă cu relația (59.2) (așa cum știm din comparația legilor legăturilor $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ și $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$, mărimii $\mathbf{P}$ îi corespunde $\mu_0 \mathbf{M}$ în cazul magnetic).

Teoria microscopică a magnetizației urmărește să demonstreze expresia *legii macroscopice a magnetizației temporare* (rel. 18.28, par. 23.1, vol. I):

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad (59.20)$$

în care χ_m e mărimea de material numită *susceptivitate magnetică*. Spre deosebire însă de mărimea electrică analogă, experiența și teoria arată că pentru marea majoritate a materialelor (dia- sau paramagnetice) susceptivitatea magnetică e extrem de mică ($\chi_m < 10^{-3}$). De aceea, termenul al doilea din relația (59.19) e neglijabil față de primul și cîmpul magnetic activ e practic egal cu intensitatea macroscopică a cîmpului magnetic

$$\mathbf{H}_0 \simeq \mathbf{H}, \quad \mathbf{B}_0 \simeq \mu_0 \mathbf{H}. \quad (59.21)$$

Există însă, după cum știm, o clasă specială de materiale — materialele feromagnetice (v. par. 23.2, vol. I) — cu susceptivitate magnetică foarte mare și cu proprietăți speciale (nelinearitatea legii de magnetizație, isterезis, magnetizație remanentă etc.). De aceea, feromagnetismul va fi studiat separat (par. 59.3).

59.2.2. Diamagnetismul. Substanțele diamagnetice sînt acelea care au molecule nepolare, adică fără moment magnetic spontan. În lipsa unui cîmp magnetic exterior moleculei, expresia (59.61) a momentului magnetic al acestor molecule se anulează. La aplicarea unui cîmp magnetic exterior apare însă un moment magnetic indus, și anume un moment magnetic orbital suplimentar.

În adevăr, dacă se consideră un sistem atomic compus din particule identice de sarcină q și masă m care se mișcă într-un cîmp de forțe centrale, pe orbite închise care înconjură centrul cu viteze unghiulare foarte mari, după aplicarea unui cîmp magnetic exterior slab de inducție $B_0 = \mu_0 H_0$, întregul sistem capătă o mișcare suplimentară lentă de rotație în jurul direcției cîmpului cu viteza unghiulară

$$\Delta\omega \simeq -\frac{q}{2m} B_0 = -\frac{q\mu_0}{2m} H_0 \quad (59.22)$$

($\Delta\omega \parallel B_0$ dacă $q = -q_0 < 0$, cum e cazul electronilor din atomi). Aceasta e *teorema lui Larmor*, valabilă oricare ar fi planurile orbitelor particulelor, iar viteza unghiulară (59.22) se numește *precesia lui Larmor*.

Demonstrăm teorema lui Larmor numai în cazul particular deosebit de sugestiv al unui atom de hidrogen cu orbită circulară (fig. 59.5), la care se aplică un cîmp magnetic exterior perpendicular pe planul orbitei. Înainte de aplicarea cîmpului, forța coulombiană centripetă F_c era echilibrată de forța centrifugă $F = lm_0\omega_0^2$, unde l e raza vectoare, m_0 e masa electronului, iar ω_0 viteza lui unghiulară de rotație:

$$F_c = m_0 l \omega_0^2 \quad (59.23)$$

În tot intervalul de timp cît cîmpul magnetic crește de la 0 la valoarea finală, apare un cîmp electric indus E_0 , care (în cazul sensurilor din fig. 59.5) înfrîinează mișcarea electronului. Viteza unghiulară a electronului se modifică cu mărimea (negativă) $\Delta\omega$, dar raza orbitei nu se modifică (și deci nici F_c), deoarece scăderea forței centrifuge e compensată exact de forța lui Lorentz $F = q(\mathbf{w} \times \mathbf{B}_0)$, care (în cazul din fig. 59.5 cu $q = -q_0$) are sensul radial și modulul

$$F = q_0 w B_0 = q_0 \omega l B_0. \quad (59.24)$$

După aplicarea cîmpului magnetic, forța coulombiană F_c rămîne deci neschimbată o dată cu raza l a orbitei și e echilibrată de suma dintre forța centrifugă și forța Lorentz, calculate cu viteza unghiulară finală $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$

$$F_c = m_0 l (\omega_0 + \Delta\omega)^2 + q_0 l (\omega_0 + \Delta\omega) B_0 \quad (59.25)$$

Pentru toate valorile realizabile tehnic ale inducției exterioare B_0 , modificarea vitezei unghiulare e foarte mică față de valoarea ei inițială: $\Delta\omega \ll \omega_0$. De aceea, înlocuind F_c în relația (59.25) cu (59.23), reducînd termenii $m_0 l \omega_0^2$ și neglijînd în rest pe $\Delta\omega$ față de ω_0 , se obține

$$2m_0 l \omega_0 \Delta\omega + q_0 l \omega_0 B_0 = 0 \quad \text{sau} \quad \Delta\omega = -\frac{q_0}{2m_0} B_0. \quad (59.26)$$

Aici semnul minus arată că $\Delta\omega$ are sens opus lui ω_0 , adică are sensul cîmpului magnetic. Ținînd seama că $q = -q_0$, am obținut chiar expresia (59.22).

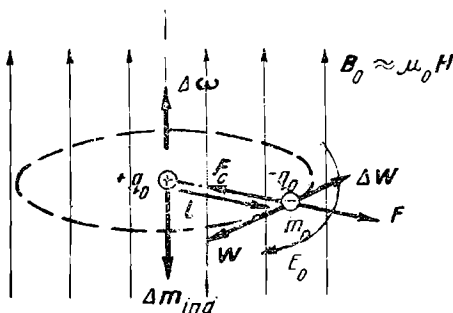


Fig. 59.5

Ținând seama de precesia lui Larmor, fiecare dintre cele s particule identice ($q^k = q$, $m^k = m$) ale unui sistem atomic capătă o viteză suplimentară $\Delta\omega \times \mathbf{l}^k$ și contribuie la momentul magnetic orbital (58.59) al sistemului cu un termen „indus“

$$\Delta \mathbf{m}_{ind}^k = \frac{1}{2} q \mathbf{l}^k \times (\Delta\omega \times \mathbf{l}^k),$$

care cu relația (59.22) se scrie

$$\Delta \mathbf{m}_{ind}^k = -\frac{q^2 \mu_0}{4m} \mathbf{l}^k \times (\mathbf{H}_0 \times \mathbf{l}^k). \quad (59.27)$$

Sub acțiunea cîmpului magnetic exterior, momentul magnetic microscopic al întregului sistem se modifică deci cu mărimea

$$\tilde{\mathbf{m}}_{ind} = \sum_{k=1}^s \Delta \mathbf{m}_{ind}^k = -\frac{q^2 \mu_0}{4m} \sum_{k=1}^s \overline{\mathbf{l}^k \times (\mathbf{H}_0 \times \mathbf{l}^k)} \quad (59.28)$$

Vectorul $\mathbf{l}^k \times (\mathbf{H}_0 \times \mathbf{l}^k) = \mathbf{H}_0 \mathbf{l}^{k2} - \mathbf{l}^k (\mathbf{H}_0 \mathbf{l}^k)$ are valoarea medie orientată în direcția cîmpului exterior, deoarece componentele transversale se compensează statistic, singura direcție privilegiată fiind a lui $\mathbf{H}_0 = k\mathbf{H}_0$. Se poate deci scrie (cu $k\mathbf{l}^k = l^k \cos \theta^k$)

$$\overline{\mathbf{l}^k \times (\mathbf{H}_0 \times \mathbf{l}^k)} \approx k [\overline{\mathbf{l}^k \times (\mathbf{H}_0 \times \mathbf{l}^k)}] = \mathbf{H}_0 \overline{l^{k2} \sin^2 \theta^k},$$

rezultă *momentul magnetic indus* al sistemului

$$\tilde{\mathbf{m}}_{ind} = -\frac{q^2 \mu_0}{4m} \mathbf{H}_0 \sum_{k=1}^s \overline{l^{k2} \sin^2 \theta^k} \quad (59.29)$$

Din această relație rezultă că momentul magnetic indus al sistemului de particule are sens opus sensului cîmpului exterior oricare ar fi semnul sarcinii q a particulelor (identice) de pe orbitele sistemului. În cazul atomilor, aceste particule sînt electroni de sarcină $q = -q_0$ și masă $m = m_0$.

Presupunînd substanța diamagnetică, acest moment indus e singurul nenul și magnetizația $\mathbf{M}$ se obține din relația

$$\mathbf{M} = N_v \tilde{\mathbf{m}}_{ind} = -\frac{\mu_0 N_v q_0^2}{4m_0} \mathbf{H}_0 \sum_{k=1}^s \overline{l^{k2} \sin^2 \theta^k}, \quad (59.30)$$

unde N_v reprezintă numărul de molecule din unitatea de volum a corpului. Din relația (59.30) rezultă expresia *susceptivității diamagnetice* prin comparare cu relația (59.20) și ținînd seama de relația (59.21)

$$\chi_{md} = -\frac{\mu_0 N_v q_0^2}{4m_0} \sum_{k=1}^s \overline{l^{k2} \sin^2 \theta^k} < 0. \quad (59.31)$$

Susceptivitatea diamagnetică este deci o mărime negativă (ceea ce arată, ca și relația (59.30), că magnetizația indusă este opusă cîmpului magnetic inducator) — și nu depinde direct de temperatura corpului (ci numai prin intermediul lui N_v). Orice corp prezintă, eventual împreună cu alte tipuri de magnetizație,

magnetizația de natură diamagnetică, care e însă extrem de slabă (de obicei $\chi_{md} \approx 10^{-6}$).

59.2.3. Paramagnetismul. Substanțele paramagnetice sînt acelea ale căror molecule au moment magnetic spontan (molecule polare). Acest moment magnetic, pe care îl notăm cu $\mathbf{m}_p$, este dirijat diferit, la fiecare moleculă în parte, astfel că datorită agitației termice, valoarea medie a acestui moment e nulă pentru un corp macroscopic. Sub acțiunea unui cîmp magnetic exterior se produce însă orientarea ordonată parțială a moleculelor în direcția cîmpului. Acest efect este similar celui paraelectric (v. par. 59.1.3), deoarece în acest caz cuplul care orientează moleculele este $\mathbf{C} = \mathbf{m}_p \times \mathbf{B}_0$; se obține pentru energia potențială a moleculei în cîmpul exterior, în locul relației (59.6), expresia

$$w_m = -\mathbf{m}_p \mathbf{B}_0 = -m_p H_0 \mu_0. \quad (59.32)$$

Calculul statistic se face cu totul analog și dacă se notează acum

$$a = \frac{\mu_0 m_p H_0}{kT}, \quad (59.33)$$

se obține următoarea expresie a proiecției magnetizației pe direcția cîmpului (singura proiecție nenulă), analogă cu relația (59.15),

$$M = N_v m_p \mathcal{L}(a). \quad (59.34)$$

Deoarece $a \ll 1$, se obține $\mathcal{L}(a) \approx \frac{a}{3} = \frac{\mu_0 m_p}{3kT} H_0$; ținînd seamă însă de relațiile (59.21), deoarece $M \ll H$, rezultă pentru legea magnetizației temporare relația

$$\mathbf{M} \simeq \frac{\mu_0 N_v m_p^2}{3kT} \mathbf{H}, \quad (59.35)$$

din care se obține expresia *susceptivității paramagnetice*

$$\chi_{mp} = \frac{\mu_0 N_v m_p^2}{3kT} = \frac{C}{T} > 0, \quad (59.36)$$

care e acum pozitivă (în opoziție cu χ_{md}).

Din această expresie rezultă că susceptivitatea de natură paramagnetică depinde de temperatură, fiind invers proporțională cu temperatura absolută la densitate invariabilă (legea lui Curie).

Mărimea

$$C = \frac{\mu_0 N_v m_p^2}{3kT} \quad (59.37)$$

se mai numește *constanta lui Curie* (și se raportează de obicei la un mol de substanță).

Dacă se ține seama și de efectul diamagnetic se obține susceptivitatea magnetică totală,

$$\chi_m = \chi_{md} + \chi_{mp} = \frac{\mu_0 N_v m_p^2}{3kT} - \frac{\mu_0 N_v q_0^2}{4m_0} \sum_{k=1}^{\infty} l^{k^2} \overline{\sin^2 \theta}^k \quad (59.38)$$

59.3. Teoria clasică a feromagnetismului (teoria lui Weiss)

Proprietățile corpurilor feromagnetice au fost expuse în vol. I, par. 23.2. S-a arătat că, după teoria lui Weiss, un corp feromagnetic e constituit din mici *domenii* (de dimensiuni accesibile cercetării cu microscopul, deci, care conțin un număr enorm de molecule), magnetizate la saturație fiecare în parte. *Magnetizația spontană a domeniilor e un efect cuantic și nu poate fi complet explicat în cadrul fizicii clasice.* Domeniile sînt însă orientate dezordonat în lipsa unui cîmp magnetic stabilit din exterior, din cauza agitației termice, astfel că magnetizația globală a corpului este nulă. Un cîmp magnetic stabilit din exterior tinde să orienteze domeniile în sensul intensității sale, acestei acțiuni opunîndu-i-se aceea a agitației termice. În cîmpuri magnetice suficient de intense se ajunge la saturație, cînd toate domeniile au momentele magnetice orientate în sensul cîmpului magnetic și cînd magnetizația corpului, practic, nu mai crește la mărirea cîmpului (în realitate ea crește totuși pe seama măririi momentului magnetic al domeniilor, dar acest efect e foarte slab). Pentru a da totuși o explicație magnetizării domeniilor, Weiss a considerat că magnetizarea unui domeniu e analogă aceleia a unui corp paramagnetic și poate fi studiată pe baza aceluiași relații ca și paramagnetismul, *cu deosebire că la corpurile feromagnetice există un cîmp magnetic activ mult mai intens decît ar rezulta din relația (59.19), ceea ce impune să se scrie*

$$H_0 = H + KM, \quad (59.39)$$

unde constanta K se numește *constantă lui Weiss* și are valori extrem de mari, inexplicabile din punctul de vedere al fizicii clasice.

Ecuția (59.34) rămînînd valabilă

$$M = N_v m_p \mathcal{L}(a) = N_v m_p \mathcal{L}\left(\frac{\mu_0 m_p H_0}{kT}\right), \quad (59.40)$$

unde $\mathcal{L}(a)$ e funcția (59.14) a lui Langevin.

Pentru a determina legea magnetizației unui domeniu, trebuie să se elimine H_0 între relațiile (59.40) și (59.39). În acest scop scriem relația (59.39) sub forma

$$M = \frac{H_0}{K} - \frac{H}{K} = \frac{1}{K} \frac{kT}{\mu_0 m_p} a - \frac{H}{K}, \quad (59.41)$$

în care am ținut seama că $a = \frac{\mu_0 m_p H_0}{kT}$.

Valoarea M_∞ a magnetizației obținută pentru $H_0 \rightarrow \infty$, cînd $a \rightarrow \infty$ și $\mathcal{L}(a) \rightarrow 1$, rezultă din relația (59.40):

$$M_\infty = N_v m_p, \quad (59.42)$$

astfel că se poate scrie

$$\mathcal{L}(a) = \text{cth } a - \frac{1}{a} = \frac{M}{M_\infty}. \quad (59.43)$$

Împărțind relația (59.41) la $M_\infty = N_c m_p$ folosind notația (59.37) rezultă ecuația

$$\frac{M}{M_\infty} = \mathfrak{D}(a) = \frac{1}{K} \frac{kT}{\mu_0 N_c m_p^2} a - \frac{H}{m_p K N_v} = \frac{T}{3KC} a - \frac{H}{K N_v m_p}, \quad (59.44)$$

care reprezintă o dreaptă (v. fig. 59.6) cu panta

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{T}{3KC} = \mathfrak{D}'(a) = \frac{kT}{\mu_0 N_c K m_p^2}. \quad (59.45)$$

Relația dintre M și H se obține eliminând pe a între $\mathfrak{L}(a)$ și $\mathfrak{D}(a)$, ceea ce se realizează grafic. Punctul P obținut prin intersectarea dreptei $\mathfrak{D}(a)$ (59.44) cu curba $\mathfrak{L}(a)$ reprezintă soluția problemei, deoarece el dă valorile mărimii M corespunzătoare valorii date lui H (proporțional cu ordonata la origine a dreptei $\mathfrak{D}(a)$).

Din această construcție rezultă că, dacă panta dreptei $\mathfrak{D}(a)$ —și deci temperatura T —este suficient de mică, magnetizația variază foarte puțin cu H și există și pentru $H \rightarrow 0$, adică în absența cîmpului magnetic. Aceasta e *magnetizația remanentă* a domeniului, caracteristică feromagnetismului.

Această proprietate nu se mai manifestă însă dacă temperatura corpului crește peste o valoare

critică T_c , numită *temperatura Curie*. În adevăr, din figura 59.6 se constată că dacă unghiul α dintre axa absciselor și dreapta $\mathfrak{D}$ este mai mare decît unghiul α_c dintre axa absciselor și tangenta în origine la curba $\mathfrak{L}(a)$, dreapta $\mathfrak{D}(a)$ nu mai intersectează curba $\mathfrak{L}(a)$ pentru $H = 0$ decît în origine ($M = 0$). Cum coeficientul unghiular al dreptei crește cu temperatura, conform relației (59.44), și cum $\operatorname{tg} \alpha_c = \mathfrak{L}'(0) = \frac{1}{3}$, rezultă cu $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha_c = \frac{1}{3}$ valoarea următoare

a temperaturii critice

$$T_c = \frac{\mu_0 N K m_p^2}{3k} = KC. \quad (59.46)$$

Dincolo de temperatura Curie, materialul se comportă ca un paramagnetic obișnuit. Punînd în acest caz $\mathfrak{L}(a) \approx \frac{a}{3} = \frac{M}{M_\infty}$, rezultă din relațiile (59.43) cu (59.44) legea de magnetizare

$$M = \frac{C}{T - T_c} H. \quad (59.47)$$

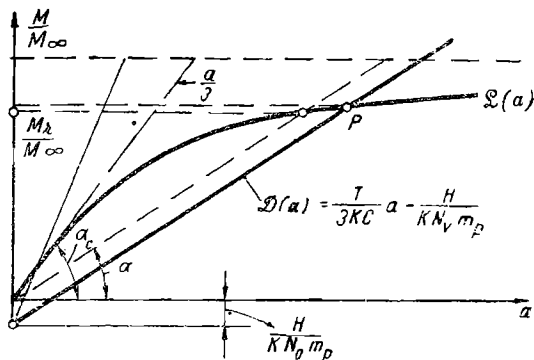


Fig. 59.6

60. || ELEMENTELE DE TEORIE CUANTICĂ A UNOR PROPRIETĂȚI DE MATERIAL

60.1. Elemente de mecanică cuantică a unei particule

60.1.1. Dualitatea undă-corpusul. În fizica microscopică clasică se consideră că există două clase de sisteme fizice: *cîmpurile electromagnetice*, care au o repartiție continuă în spațiu (în particular, undele electromagnetice), și *corpurile*, care au o repartiție discretă în spațiu (sub formă de corpuscule). Un sistem fizic poate aparține numai uneia dintre aceste clase, ale căror proprietăți se exclud reciproc.

Experiența arată însă că un același sistem fizic se comportă, în condițiuni fizice adecvate, fie ca un sistem de corpusculi (deci ca un corp) fie ca un sistem de unde (deci ca un cîmp). În cele ce urmează vom prezenta efectul fotoelectric extern, în care cîmpul electromagnetic se comportă ca un sistem de corpuscule și efectul difracției fasciculelor de electroni în care acestea se comportă ca sisteme de unde.

a) *Efectul fotoelectric extern.* Experiența arată că metalele emit electroni dacă suprafața lor este luminată, *energia cinetică maximă a electronilor emiși fiind funcțiune liniară de frecvența undei electromagnetice incidente* (în particular, a luminii incidente), iar numărul electronilor emiși în unitatea de timp depinzînd de intensitatea ei.

Dependența de frecvență a energiei cinetice maxime a electronilor emiși este însă în contradicție cu legile fizicii clasice, conform cărora ar trebui ca energia undei electromagnetice incidente, și deci energia cinetică a electronilor emiși, să fie proporțională cu pătratul intensității E a cîmpului electric și independentă de frecvență. Explicația efectului poate fi însă dată dacă se admite că, în interacțiunea ei cu corpurile, lumina — și mai general, cîmpul electromagnetic — se comportă ca un sistem de particule.

Considerăm deci prin ipoteză că radiația electromagnetică e constituită, atunci cînd interacționează cu corpurile, din particule elementare numite *fotoni*, și notăm cu w și p energia, respectiv impulsul unei astfel de particule. Din datele experimentale rezultă în acest caz că mărimile w și p ale fotonilor asociați unei unde electromagnetice, monocromatice, de frecvență f și lungime de undă λ , sînt date de următoarele expresii:

$$w = hf \quad (60.1)$$

$$p = \frac{h}{\lambda}, \quad (60.2)$$

în care h este o constantă universală, numită *cuantă de acțiune* sau *constanta lui Planck*, care are valoarea $h = 6,55 \cdot 10^{-34}$ joulisecunde.

În adevăr, în aceste ipoteze, incidența undei electromagnetice pe suprafața unui corp care emite electroni e echivalentă cu ciocnirea fotonilor cu acești electroni. Dacă se admite, în conformitate cu experiența, că după ciocnire energia fotonului este nulă (fotonul fiind „absorbit”), rezultă din principiul conservării energiei:

$$hf = \Phi_e + \frac{m_0(v^2 - v_0^2)}{2} = \frac{m_0 v^2}{2} + \Phi_e - \frac{m_0 v_0^2}{2}, \quad (60.3)$$

în care Φ_e e *lucrul mecanic de extracție* a electronului, adică energia necesară pentru a scoate electronul din corp, m_0 e masa electronului, v_0 este viteza lui inițială, iar v e viteza lui după ciocnire (după emisiune). Din relația (60.3), obținută pe baza ipotezelor de mai sus, rezultă deci că energia cinetică a electronului emis e funcțiune liniară de frecvența undei electromagnetice incidente, așa cum arată experiența.

b) *Difracția electronilor.* Experiențe efectuate cu fascicule de microparticule și, în primul rînd, cu fascicule de electroni au pus în evidență fenomenul de difracție caracteristic undelor. Considerăm, de exemplu, un catod incandescent C , care emite electroni accelerați de un anod A ,

sub tensiunea U . Viteza inițială a electronilor emiși fiind neglijabilă, viteza electronilor în dreptul anodului este (v. rel. 58.26)

$$v = \sqrt{2 \frac{q_0}{m_0} U}.$$

Anodul e perforat, astfel că un fascicul foarte îngust, cu electroni de aceeași viteză v (monocinetic), pătrunde în spațiul din spatele anodului și cade sub unghiul α pe suprafața plană a unui cristal K . Fasciculul reflectat e captat în camera de ionizare I , al cărui curent i , măsurat cu galvanometrul G , e proporțional cu intensitatea fasciculului reflectat. Dacă se menține constant unghiul α și se variază tensiunea acceleratoare U , adică viteza v a electronilor, se constată experimental că *reflexia se produce practic numai pentru anumite viteze*. Din punct de vedere clasic, reflexia ar trebui să se producă la orice viteză a electronilor. Rezultatele experimentale se explică fără dificultăți, dacă se consideră că rețeaua cristalină (de constantă d) acționează ca o rețea de difracție, iar fasciculul de electroni ca o undă, cu lungimea de undă λ . Condiția lui Bragg, cunoscută din teoria elementară a difracției,

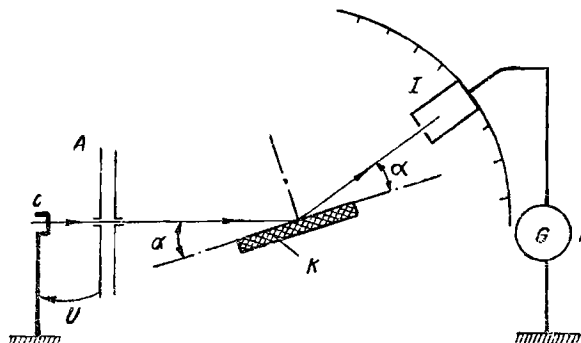


Fig. 60.1

$$2d \sin \alpha = n\lambda; \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (60.4)$$

arată că reflexia se produce numai pentru anumite lungimi de undă. Dacă se admite acum că electronilor de viteză v și impuls $m_0 v = p$ le e asociată o undă cu lungimea de undă dată de relația

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0 v} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 q_0 U}},$$

analogă cu relația (60.2), se constată că se obține o bună concordanță între valorile calculate pe această bază pentru tensiunea acceleratoare U , care asigură reflexia, și valorile experimentale. Fasciculul de electroni prezintă deci proprietatea de difracție ca un fascicul de unde, cu lungime de undă dată de relația (60.2), în funcție de impulsul electronilor.

Fenomenul de difracție a electronilor arată că particulele considerate drept *corpusele* în fizica microscopică clasică se manifestă ca *unde* în anumite condiții. Pentru a caracteriza această comportare, se asociază unui sistem de particule o anumită funcțiune de punct și de timp, $\psi(\mathbf{r}, t)$, numită *funcțiune de undă*, a cărei formă depinde de proprietățile mecanice ale particulei, astfel cum se va arăta mai departe. Mecanica microobiectelor care utilizează această funcțiune de undă se numește *mechanică ondulatorie* și e una din modalitățile de prezentare ale *mechanicii cuantice*.

Din cele două experiențe prezentate mai sus rezultă că atât câmpul electromagnetic cât și sistemele de corpusele au comportări duale, de câmp sau de corpuri, în funcție de condițiile fizice în care se găsesc. Această dualitate, numită *dualitatea undă-corpusele*, este în contradicție cu legile fizicii clasice și ea a determinat, în principal, constituirea fizicii cuantice.

60.1.2. Funcțiunea de undă a unei particule. Considerăm mai întâi o particulă liberă a cărei energie potențială este constantă, adică nu depinde de coordonatele spațiale și de timp (și poate fi deci anulată prin alegerea adecvată a nivelului de referință). Caracterizarea stării unei astfel de particule se face, în mecanica cuantică, cu ajutorul unei unde plane armonice complexe, funcțiunea de undă $\psi(\mathbf{r}, t)$, asociată particulei în felul următor: se postulează că frecvența f a unei e determinată de energia w a particulei, conform relației (60.1)

$$f = \frac{w}{h},$$

și că lungimea sa de undă λ e determinată de impulsul p al particulei, conform relației (60.2) :

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

Se folosește, așadar, la această asociere un procedeu reciproc aceluia folosit la introducerea mărimilor fotonului prin relațiile (60.1) și (60.2). Dacă se notează

$$k = |\mathbf{k}| = \frac{1}{\lambda}, \quad (60.5)$$

unde k se numește *număr de unde* și este modulul vectorului de undă $\mathbf{k} = k\mathbf{u}_k$, orientat local în direcția de propagare, relațiile (60.1) și (60.2) se mai pot scrie și sub forma

$$w = hf = \frac{h}{2\pi} \omega \quad (60.6)$$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} = \frac{h}{2\pi} \beta \mathbf{u}_k \quad (60.7)$$

și ele sînt asociate microobiectului considerat (particulei libere), indiferent de faptul că el e considerat în fizica clasică drept corpuscul (cărui i se asociază în mecanica cuantică o undă), sau drept undă (cărui i se asociază în mecanica cuantică un corpuscul).

Expresia în mărimi instantanee a unei unde plane care se propagă în sensul unei axe Ox (v. și Unda electromagnetică plană, vol. I, par. 29.3), în cazul unei variații sinusoidale armonice se poate scrie sub forma

$$f(x, t) = A \sin(\beta x - \omega t + \alpha),$$

sau, dacă se introduce mărimea k în locul constantei de fază $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi k$,

$$f(x, t) = A \sin(2\pi k x - \omega t + \alpha).$$

Forma complexă corespunzătoare este

$$\underline{f} = \underline{A} e^{-j(\omega t - 2\pi k x)} \quad (\text{cu } \underline{A} = \underline{A} e^{j\alpha}).$$

Decorec prin ipoteză unei particule libere i se asociază o undă plană armonică complexă, expresia acestei unde $\psi(x, t)$ va fi prin analogie

$$\psi(x, t) = \Psi_0 e^{-j(\omega t - 2\pi k x)} \quad (60.8)$$

dacă direcția de propagare a undei e oarecare, sau

$$\psi(x, t) = \Psi_0 e^{-j(\omega t - 2\pi k x)} \quad (60.8')$$

dacă unda se propagă în sensul axei Ox . Amplitudinea Ψ_0 a undei este în general o mărime complexă, deoarece faza inițială a undei poate să nu fie nulă. Pulsatia ω și numărul de unde k sînt determinate de energia w a particulei și de impulsul ei p , conform relațiilor (60.6) și (60.7). Înlocuind cu relațiile (60.6) și (60.7), mărimile ω și k din relația (60.8) se obține pentru funcțiunea de undă a particulei libere expresia

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_0 e^{-j \frac{2\pi}{h} (wt - \mathbf{p}\mathbf{r})} \quad (j = \sqrt{-1}). \quad (60.9)$$

¹ În acest capitol nu vom mai sublinia mărimile complexe — în acord cu notația obișnuită din lucrările de fizică atomică. De altfel, funcțiunea de undă nu e „reprezentarea” în complex a vreunei funcțiuni „instantanee” reale.

Dacă particula nu este liberă, ci se găsește într-un câmp de forțe cu energie potențială $U(\mathbf{r})$, starea ei e caracterizabilă din punct de vedere cuantic printr-o funcțiune de undă complexă $\psi(\mathbf{r}, t)$ cu o expresie mai complicată. În toate cazurile interpretarea ei experimentală e următoarea: *intensitatea unei într-un punct dat, adică pătratul modulului ei* $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = \psi(\mathbf{r}, t) \psi^*(\mathbf{r}, t)$, *e în fiecare moment proporțională cu probabilitatea de a găsi particula în acel moment în vecinătatea punctului considerat.*

Rezultă că funcțiunea de undă are în fizica cuantică o interpretare statistică. Din punctul de vedere experimental, funcțiunea de undă caracterizează în sens clasic starea unui ansamblu format din foarte multe particule identice; pentru o singură particulă ea determină numai probabilitatea de realizare a unor anumite valori ale coordonatelor ei de poziție.

În cazul particulei libere, funcțiunea de undă are aceeași intensitate în orice punct din spațiu $|\psi|^2 = |\Psi_0|^2$, ceea ce arată că particula liberă poate fi găsită oriunde în spațiu cu egală probabilitate.

Ținând seama de interpretarea dată funcțiunii ψ , experiența de mai sus a difracției electronilor are următoarea explicație: mișcarea electronilor spre cristallul K este caracterizată prin propagarea, în aceeași direcție, a unei plane ψ asociate care, la „trecerea” prin cristal, suferă o difracție, în sensul clasic, și prezintă deci în diferitele orientări din spațiu maxime și minime; conform interpretării de mai sus a funcțiunii de undă rezultă că prezența electronilor în fasciculul difractat e mai probabilă în punctele în care pătratul modulului funcțiunii ψ prezintă maxime și mai puțin probabilă în celelalte, prezența electronilor fiind însă posibilă în orice punct în care funcțiunea de undă e nenulă.

În cadrul interpretării statistice a funcțiunii de undă, probabilitatea elementară $d\mathfrak{S}$ ca o particulă să se găsească într-un element de volum dv , de rază vectorie $\mathbf{r}$, la un moment t are expresia

$$d\mathfrak{S} = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dv = \psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) dv \equiv \psi^* \psi dv. \quad (60.10)$$

Cum interpretarea statistică nu se schimbă dacă funcțiunea de undă se înmulțește cu o constantă, un astfel de factor constant nu modifică starea caracterizată prin funcțiunea de undă. Această constantă arbitrară se determină prin condiția de normare a probabilităților:

$$\int d\mathfrak{S} = \iiint \psi^* \psi dv = \iiint |\psi|^2 dv = 1. \quad (60.11)$$

Din interpretarea ei fizică rezultă că funcțiunea de undă trebuie să mai satisfacă, în afară de condiția de normare, și alte condiții, în primul rând acelea de *uniformitate, continuitate și mărginire*, numite *condiții standard*, în întregul domeniu de variație a variabilelor de care ea depinde.

60.1.3. Ecuația lui Schrödinger, pentru o particulă. Funcțiunea de undă $\psi(\mathbf{r}, t)$ a unei particule de masă m , situate într-un câmp de forțe de energie potențială $U(\mathbf{r})$, satisface o ecuație cu derivate parțiale de ordinul al doilea, care se numește *ecuația lui Schrödinger pentru valorile instantanee ale funcțiunii de undă sau ecuația lui Schrödinger pentru stările nestaționare*:

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \Delta \psi + U \psi = -\frac{\hbar}{2\pi j} \frac{\partial \psi}{\partial t}}, \quad (j = \sqrt{-1}) \quad (60.12)$$

unde

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

Funcțiunea ψ rezultă, în general, din ecuația (60.12) și se poate verifica simplu, că, pentru cazul particular al particulei libere, ea este o undă plană. Ecuația, fiind omogenă, determină funcțiunea până la o constantă arbitrară, care se poate preciza prin condiția de normare (60.11).

Ecuația (60.12) este ecuația de bază a mecanicii cuantice nerelativiste, așa cum ecuația $F = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$ e ecuația de bază a mecanicii clasice — și experiența a confirmat toate conse-

cințele acestei ecuații în măsura în care nu apare ca necesară luarea în considerare a efectelor prevăzute de teoria relativității.

Principală problemă rezolvată cu ajutorul mecanicii cuantice a fost determinarea configurațiilor staționare din punct de vedere statistic (cum sînt atomii, moleculele etc. în condiții exterioare invariabile). Pentru ca funcțiunea de undă să caracterizeze o stare staționară din punct de vedere statistic, trebuie ca probabilitatea (60.10) să nu depindă de timp, și deci modulul funcțiunii de undă să nu depindă de timp. Dacă se caută soluții ale ecuației lui Schrödinger (60.12), sub forma unui produs cu variabile separate,

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}) \Theta(t),$$

se obține pentru factorul temporal $\Theta(t)$ expresia

$$\Theta(t) = e^{-j \frac{2\pi}{h} a t} \quad (\text{alegînd } \Theta(0) = 1)$$

oricare ar fi factorul spațial $\Psi(\mathbf{r})$, unde a e o constantă. Funcțiunea de undă corespunzătoare

se poate deci scrie $\psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}) e^{-j \frac{2\pi}{h} a t}$. Comparînd această expresie cu expresia (60.9) a funcțiunii de undă a particulei libere se observă că această constantă e chiar energia totală a particulei: $a = w$. Funcțiunea de undă cu variabile separate are deci forma

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}) e^{-j \frac{2\pi}{h} w t}, \quad (60.13)$$

în care se admite că w reprezintă energia totală a particulei. Se observă că modulul acestei expresii e egal cu modulul factorului spațial $\Psi(\mathbf{r})$, adică e independent de timp. Funcțiunea de undă de forma relației (60.13) caracterizează deci o stare staționară din punct de vedere statistic. Substituind această expresie în ecuația (60.12), se obține pentru $\Psi(\mathbf{r})$ ecuația

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m} \Delta \Psi + U \Psi = w \Psi, \quad (60.14)$$

numită *ecuația lui Schrödinger pentru stările staționare sau ecuația spațială a lui Schrödinger*.

Funcțiunea $\Psi(\mathbf{r})$ e funcțiunea de undă spațială caracteristică stărilor staționare ale particulei și are aceeași interpretare fizică ca și funcțiunea $\psi(\mathbf{r}, t)$ deoarece $\psi^* \psi = \Psi^* \Psi$. Ea satisface deci și condiția de normare

$$\iiint \Psi^* \Psi dv = \iiint |\Psi|^2 dv = 1, \quad (60.15)$$

precum și condițiile standard: continuitate, uniformitate și mărginire.

Ecuația (60.14) nu are în general soluții nenule care să satisfacă condițiile standard, decît pentru anumite valori reale, w_k , ale parametrului w , numite *valorile proprii* ale energiei.

Funcțiunile de undă spațiale corespunzătoare care satisfac condițiile standard și sînt soluții ale ecuației (60.14) pentru $w = w_k$ se mai numesc și *funcțiuni proprii* ale problemei. În mecanica cuantică se admite — ca un postulat fundamental — că valorile proprii ale unei mărimi (și în particular ale energiei) sînt singurele valori accesibile măsurării mărimii sau — cum se mai spune — *valorile permise ale mărimii*. Dacă valorile proprii ale unei mărimi pot fi egale cu orice număr real cuprins într-un anumit interval, se spune că mărimea are un *spectru continuu de valori* în acel interval, iar dacă ele formează un șir discret într-un interval anumit, se spune că mărimea are un *spectru discret de valori* în acel interval. Valorile permise ale energiei definesc așa-numitele *nivele de energie* ale particulei.

Uneori, unei valori proprii a energiei particulei (unui anumit nivel de energie) îi corespund mai multe funcțiuni de undă spațiale distincte. Se spune că stările particulei, definite de astfel de funcțiuni, sînt *degenerate*. Numărul de funcțiuni de undă distincte care corespund aceleiași

valori proprii a energiei se numește ordinul degenerării. Se mai spune că nivelul de energie definit de această valoare proprie e un nivel degenerat de ordinul respectiv.

Funcțiilor de undă li se aplică un principiu fundamental, numit *principiul superpoziției din mecanica cuantică*, și care se enunță în felul următor: dacă o particulă se poate găsi în una din stările caracterizate de funcțiunile de undă distincte $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$, atunci ea se poate găsi și în starea caracterizată de o funcțiune de undă ψ , care reprezintă o combinație lineară a acestora:

$$\psi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 + \dots + c_n \psi_n = \sum_{k=1}^n c_k \psi_k \quad (60.16)$$

(eventual $n = \infty$)

Dacă ψ_k sînt funcțiunile de undă ale unor stări staționare, de forma relației (60.13), funcțiunea ψ din membrul stîng al relației (60.16) corespunde, în general, unei stări nestaționare a particulei.

Principiul superpoziției constituie un postulat al mecanicii cuantice, și alături de ecuația lui Schrödinger stă la baza acestei mecanici.

Energia particulei are valori bine determinate, w_k , numai în stările cuantice staționare definite de funcțiunile de undă $\psi_k = \Psi_k e^{-j \frac{2\pi}{h} w_k t}$, aceste valori fiind egale cu valorile proprii corespunzătoare. Energia particulei nu este însă bine determinată în starea cuantică definită de o funcțiune de undă ψ , obținută prin suprapunerea unor funcțiuni de undă corespunzătoare unor stări staționare, cu relația (60.16), deoarece această relație nu poate fi adusă la forma (60.13); mai general, energia nu este bine determinată în stările ale căror funcțiuni de undă sînt soluții ale ecuației nestaționare a lui Schrödinger, dar nu sînt soluții ale ecuației staționare. Acest fapt e inexplicabil în cadrul mecanicii clasice, în care particula trebuie să aibă valori bine determinate ale energiei în orice stare a ei. În cadrul mecanicii cuantice, interpretarea acestui rezultat este următoarea: într-o eventuală măsurătoare, energia particulei va rezulta egală cu una dintre valorile proprii corespunzătoare uneia dintre funcțiunile de undă $\psi_1, \dots, \psi_n$, — acestea fiind singurele valori măsurabile ale energiei. Nu se poate însă preciza anticipat care va fi valoarea proprie a energiei care va fi dată de măsurare; se poate numai indica probabilitatea de a măsura o valoare oarecare w_k , această probabilitate fiind proporțională cu pătratul $|c_k|^2$ al modulului coeficientului funcțiunii ψ_k din expresia (60.16). În consecință se pot determina, cu ajutorul funcțiunii ψ , pe baza interpretării ei fizice, valorile permise ale energiei particulei, precum și probabilitatea realizării acestor valori; se mai poate însă determina și valoarea medie $\tilde{w}$ a energiei într-o stare oarecare, dacă se utilizează formula mediei statistice (v. și 60.10)

$$\tilde{w} = \int w \, d\mathfrak{E} = \iiint w \, \psi^* \psi \, dv = \iiint \psi^* w \psi \, dv. \quad (60.17)$$

Această relație e valabilă — în particular — și pentru stările staționare, în care w este egală cu valorile proprii (bine determinate) ale energiei particulei în acele stări.

Valoarea medie a energiei se poate exprima și printr-o expresie în care se folosește ecuația (60.14) a lui Schrödinger. Integrăm în acest scop ecuația (60.14) în întregul domeniu de variație a variabilelor, după înmulțirea ei cu Ψ^* , și obținem:

$$\iiint \Psi^* \left[-\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \Delta \Psi + U \Psi \right] dv = \iiint \Psi^* w \Psi \, dv.$$

Cu relația (60.17) rezultă expresia

$$\tilde{w} = \iiint \Psi^* \left[-\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \Delta \Psi + U \Psi \right] dv, \quad (60.18)$$

în care parametrul w nu mai apare.

Integralele (60.11, 60.15, 60.17, 60.18) se iau asupra întregului domeniu de variație al coordonatelor particulei.

60.2. Sisteme de particule

Se spune că un ansamblu de particule constituie un sistem de particule, dacă între acestea există o interacțiune care practic nu poate fi neglijată.

Stările unui astfel de sistem de N particule sînt descrise cu ajutorul unei funcțiuni de undă globale, ψ_s , care depinde simultan de coordonatele tuturor particulelor și de timp :

$$\psi_s = \psi_s(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t)$$

sau, folosind notații mai simple :

$$\psi_s = \psi_s(x_i, y_i, z_i, t),$$

sau

$$= \psi_s(\mathbf{r}_i, t).$$

Cele arătate în paragraful 60.1 în legătură cu funcțiunea de undă asociată unei particule se mențin și pentru funcțiunea de undă asociată unui sistem de particule. Astfel, de exemplu, stările staționare sînt determinate de funcțiunea spațială $\psi_s = \psi_s(\mathbf{r}_i)$, care intră în relația

$$\psi_s(\mathbf{r}_i, t) = \Psi_s(\mathbf{r}_i) e^{-j \frac{2\pi}{h} w_s t}$$

Interpretarea fizică a funcțiunii de undă ψ_s asociată unui sistem de particule este următoarea : intensitatea ei $|\psi_s|^2 = \psi_s^* \psi_s$ e proporțională cu probabilitatea de prezență la un moment dat a particulei 1 în vecinătatea punctului dat $M_1(x_1, y_1, z_1)$, a particulei 2 în vecinătatea punctului dat $M_2(x_2, y_2, z_2)$, ..., a particulei N în vecinătatea punctului dat $M_N(x_N, y_N, z_N)$. Deci, funcțiunea ψ_s e asociată întregului sistem de particule și nu se poate asocia, în cazul general, fiecărei particule cîte o funcțiune de undă proprie ei.

Ecuatia lui Schrödinger pentru stările staționare, satisfăcută de funcțiunea de undă spațială asociată sistemului de particule, are forma următoare :

$$\sum_{i=1}^N \left[-\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m_i} \left(\frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial z_i^2} \right) \right] + U_s \Psi_s = w_s \Psi_s, \quad (60.19)$$

în care U_s reprezintă energia potențială a sistemului, iar w_s e valoarea proprie a energiei lui, totale.

În cele ce urmează ne vom ocupa în special de sistemele de electroni și prezentăm numai cîteva rezultate privitoare la studiul cuantic al acestor sisteme. Din teoria atomului de hidrogen, cel mai simplu atom, deoarece are un singur electron, rezultă că funcțiunile de undă spațiale care descriu stările staționare ale electronului depind de patru indici numerici, numiți *numere cuantice*, ale căror șiruri de valori permit determinarea șirurilor de valori (cuantificate) ale energiei, momentului cinetic, momentului magnetic orbital și momentului magnetic de spin (sau propriu) ale electronului. Aceste numere se numesc *numărul cuantic principal*, n , *numărul cuantic secundar*, l , *numărul cuantic magnetic*, m_l și *numărul cuantic de spin*, m_s . Ansamblul primelor trei numere cuantice, — n, l și m_l —, definește *starea orbitală* a electronului din atom (similară, în anumite condițiuni, stării pe care ar avea-o electronul din punctul de vedere al mecanicii clasice în atom), iar ansamblul celor patru numere cuantice definește *starea cuantică* a electronului. Deoarece numărul cuantic de spin are numai două valori posibile, rezultă că unei stări orbitale date (cînd deci n, l și m_l au valori date) îi corespund două stări cuantice distincte, determinate de valorile numărului m_s . Deoarece valorile proprii ale energiei atomului de hidrogen depind numai de numărul cuantic principal n , toate stările cu același n au aceeași energie. Nivelurile de energie sînt deci puternic degenerate.

Sistemelor de electroni — mai general sistemelor de particule identice care au *spin semi-întreg* (adică al căror moment cinetic de spin, exprimat în unități $\frac{h}{2\pi}$ este impar) — li se aplică *principiul de excluziune* al lui Pauli, conform căruia într-o stare cuantică dată se poate găsi cel mult un singur electron. Rezultă deci că într-o stare orbitală dată se pot găsi cel mult doi electroni, care trebuie să aibă spinii diferiți.

Într-un atom izolat cu mai mulți electroni, care formează un sistem căruia i se aplică principiul de excluziune, energia unuia dintre electroni depinde, în general, de primele trei numere cuantice, astfel că electronii aflați într-o aceeași stare orbitală au energii diferite. Nivelurile de energie ale sistemului sînt în general degenerate, deoarece corespund la cîte două stări cuantice, pe care le pot avea numai doi electroni diferiți prin spin.

Să considerăm doi atomi ai unui corp, situați la distanță mare unul de altul (cum și de alți atomi), astfel că electronii fiecăruia dintre atomi nu interacționează practic cu electronii celuilalt. În acest caz, nivelurile de energie ale unuia din atomi se pot reprezenta ca în figura 60.2 și sînt ocupate fiecare de cel mult doi electroni. Dacă atomii se apropie, interacțiunea

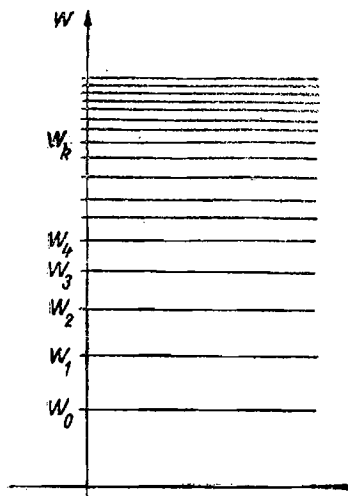


Fig. 60.2

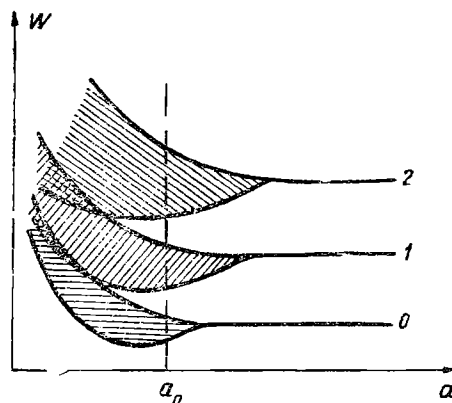


Fig. 60.3

electronilor nu mai poate fi neglijată și, conform principiului de excluziune, perechile omologe de electroni, care în atomii izolați se găseau pe niveluri egale de energie (fiecare pereche în atomul căruia îi aparține), trebuie să se găsească, în noile condițiuni, pe niveluri de energie diferite. Acest lucru e posibil deoarece (la apropierea atomilor) nivelurile de energie din atomul izolat se „despică” în două niveluri, în sensul că fiecăruia dintre nivelurile de energie ale atomului izolat îi corespund două niveluri în sistemul compus din doi atomi. Mai general, dacă se consideră N atomi, ca aceia cari formează, de exemplu, un cristal al unui corp solid, nivelurile de energie ale unuia dintre atomi, din starea izolată a acestuia, se despică în N niveluri distincte, dacă cei N atomi sînt suficient de apropiați. Din nivelurile de energie ale atomului izolat se formează deci „benzi”, care se largesc și care se pot întrepătrunde pe măsură ce distanța dintre atomi se micșorează, astfel cum se arată în figura 60.3, în care prin a s-a notat distanța dintre doi atomi vecini ai cristalului.

Aceste benzi se numesc *benzi permise de energie* ale cristalului sau *zone permise de energie*, deoarece nivelurile de energie care le constituie pot fi ocupate de electroni. Zonele care separă una de alta benzile permise se numesc *zone sau benzi de energie interzise*, deoarece electronii din atom nu pot avea nici o valoare a energiei cuprinsă în interiorul acestora. Benzile permise și cele interzise de energie prezintă importanță pentru explicarea fenomenului de conducție electrică în cadrul *teoriei zonelor* din fizica solidului, prezentată simplificat în paragraful următor.

60.3. Benzile permise de energie într-un cristal unidimensional

În starea cristalină, structura corpurilor prezintă simetrie și studiul proprietăților lor se face cu mai puține dificultăți matematice. Corpul cristalizat poate fi format dintr-un singur cristal de dimensiuni relativ mari (corp monocristalin) sau dintr-un număr mare de cristale foarte mici, dispuse mai mult sau mai puțin ordonat (corp policristalin). Majoritatea materialelor conductoare și semiconductoare utilizate în aplicații (cum sînt de ex. metalele) au o structură policristalină. Mai departe vom considera numai cazul ideal al unui corp avînd cristalele dispuse strict ordonat, astfel ca parametrii care îi determină proprietățile să prezinte o variație periodică, într-o direcție arbitrară din corp, cu perioada egală cu dimensiunea liniară a unui cristal după aceea direcție. Vom mai considera cristalul ca fiind format prin juxtapunerea periodică a unei celule de formă regulată, ale cărei vîrfuri, constituind nodurile rețelei cristaline, sînt ocupate de atomii (ionii) constituenți ai corpului. Studiul proprietăților fundamentale ale unui cristal se poate face simplificat pe un *model unidimensional*, în care cristalul e un șir rectiliniu, periodic de noduri în lungul căruia se ia axa Ox (fig. 60.4). Generalizarea rezultatelor astfel obținute la un cristal tridimensional se poate face ulterior.

Electronii unui cristal al corpului solid formează un sistem de particule identice, căruia i se aplică principiul de excluziune al lui Pauli, deoarece distanța dintre atomii vecini ai cristalului este egală aproximativ cu dimensiunile liniare ale atomului (circa 10^{-8} cm), și deci interacțiunea electronilor dintr-un același cristal nu poate fi neglijată. În schimb se poate neglija interacțiunea dintre electronii care aparțin unor cristale diferite.

Starea sistemului de particule dintr-un cristal se determină, așa cum s-a arătat mai sus, printr-o funcțiune de undă globală ψ , care satisface ecuația (60.19). În această ecuație, mărimea U , depinde de coordonatele tuturor particulelor și nu este aditivă, astfel că nu e posibilă separarea variabilelor și integrarea pe această cale, în cazul general. Calculele se pot însă efectua folosindu-se o aproximație (numită aproximația cîmpului selfconsistent), care consistă în a considera fiecare electron ca o particulă care se mișcă într-un cîmp de forțe de energie potențială $U(x)$ dată, corespunzătoare mediei (în timp) $V(x)$ a potențialului electric local stabilit, în punctul în care se află electronul considerat, de toate nucleele și de toți ceilalți electroni ai cristalului. Cu ajutorul acestui artificiu se poate asocia unui singur electron (arbitrar ales) o funcțiune de undă ψ proprie lui. Metoda aceasta poate fi folosită numai dacă valoarea medie în timp a potențialului electric nu diferă prea mult de valorile sale instantanee, ceea ce implică o interacțiune nu prea puternică a electronilor. Se consideră de asemenea că nucleele atomilor sînt imobile (ipoteză simplificatoare justificată de faptul că masa nucleului este mult mai mare decît a electronului).

Din motive de simetrie, mărimea $V(x)$ este o funcțiune periodică de x , prezentînd maxime în dreptul nodurilor rețelei cristaline ocupate de ionii pozitivi și avînd perioada egală cu distanța a dintre nucleele vecine (fig. 60.4). În consecință și energia potențială $U(x)$, care are expresia

$$U(x) = -q_0 V(x),$$

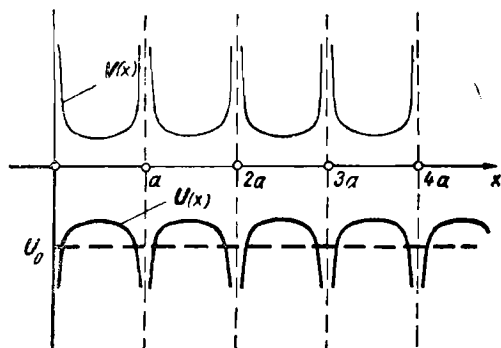


Fig. 60.4

unde $-q_0$ este sarcina electrică a electronului, variază periodic în funcțiune de x , fiind minimă în dreptul nodurilor și avînd perioada egală de asemenea cu a . Funcțiunea $U(x)$ reprezentată în figura 60.4 este pară și poate fi deci dezvoltată în serie Fourier (în cosinus):

$$U(x) = U_0 + \sum_{i=1}^{\infty} U_i \cos \frac{2\pi i x}{a}. \quad (60.20)$$

Funcțiunea de undă ψ asociată unui electron din cristal permite să se descrie din punct de vedere ondulatoriu mișcarea acestuia de-a lungul axei Ox : deplasării electronului îi corespunde propagarea, în același sens, a funcțiunii de undă prin cristal.

Rezolvarea riguroasă a problemei determinării funcțiilor de undă asociabile stărilor unui electron care se găsește într-un câmp periodic cu energia potențială (60.20), adică rezolvarea ecuației (60.14) a lui Schrödinger în aceste condiții e relativ complicată și necesită cunoștințe sistematice de mecanică cuantică, expuse în tratate de specialitate¹.

În cele ce urmează vom trata această problemă numai aproximativ, cu scopul de a obține rezultate corecte din punctul de vedere calitativ, care să ușureze înțelegerea proprietăților privitoare la conducția electrică în solide (cristale). Vom folosi în acest scop analogii intuitive cu propagarea undelor electromagnetice prin cristale. Teoria acestei propagări arată că undele sînt reflectate de rețeaua cristalină dacă e satisfăcută următoarea relație (o formă particulară a relației lui Bragg — 60.4, cînd $\alpha = \frac{\pi}{2}$):

$$2a = \pm n\lambda \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (60.21)$$

în care λ e lungimea de undă, iar a constanta rețelei (distanța dintre nodurile cristaline vecine); dacă relația (60.21) nu e satisfăcută, undele se propagă practic neperturbate în cristal, adică ele nu sînt reflectate de acesta.

Aceste considerații fiind valabile și pentru unda atașată electronului, rezultă că mișcarea electronului în cristal e practic perturbată de rețea — adică el se ciocnește, în sens clasic, cu ionii din nodurile rețelei cristaline — dacă impulsul său p , respectiv numărul de unde k , satisfac condițiile

$$\left. \begin{aligned} p &= \pm n \frac{h}{2a} \\ k &= \pm n \frac{1}{2a} \end{aligned} \right\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (60.22)$$

deduse din relația (60.21), cu $\frac{1}{\lambda} = k = \frac{p}{h}$.

Cînd condițiile (60.22) nu sînt satisfăcute, mișcarea electronului e practic neperturbată și el poate fi asimilat unei particule libere; cînd condițiile (60.22) sînt satisfăcute, mișcarea e puternic perturbată. Vom considera separat aceste două cazuri.

a) *Electronul are o mișcare practic neperturbată de rețea, deoarece*

$$k \neq n \frac{1}{2a}, \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (60.23)$$

În acest caz, pentru a neglija influența rețelei, energia potențială trebuie considerată constantă: $U \approx U_0$. Ecuația (60.14) devine

$$-\frac{h^2}{8\pi^2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + U_0 \Psi = w \Psi \quad (60.24)$$

sau

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = -\frac{8\pi^2m}{h^2} (w - U_0) \Psi$$

sau încă

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = -\frac{4\pi^2}{h^2} p^2 \Psi = -4\pi^2 k^2 \Psi, \quad (60.25)$$

¹ v. D. Blohințev, *Bazele mecanicii cuantice*, Ed. tehnică, 1956.

deoarece energia particulei libere este

$$w = \frac{p^2}{2m} + U_0 = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 + U_0 \quad (60.26)$$

un de $p = \hbar k$ e impulsul, iar k numărul de unde. Ecuația (60.25) are soluția generală

$$\Psi(x) = A' e^{j2\pi kx} + A'' e^{-j2\pi kx}, \quad (60.27)$$

care consistă din suprapunerea soluțiilor particulare

$$\Psi'(x) = A' e^{j2\pi kx} = A' e^{j \frac{2\pi p}{\hbar} x} \quad (60.28)$$

$$\Psi''(x) = A'' e^{-j2\pi kx} = A'' e^{-j \frac{2\pi p}{\hbar} x} \quad (60.29)$$

Comparând aceste expresii cu expresia (60.9) — care mai conține și factorul temporal $e^{-j \frac{2\pi}{\hbar} w t}$, absent în funcțiunile de undă spațiale $\Psi(x)$, rezultă că funcțiunea (60.28) reprezintă o undă plană progresivă directă, asociabilă unei particule libere care se mișcă în sensul pozitiv al axei x ; iar funcțiunea (60.29) reprezintă o undă plană progresivă inversă asociabilă unei particule libere care se mișcă în sensul negativ al axei x . Se obține așadar funcțiunea de undă căutată a unei particule libere în mișcare *neperturbată* prin cristal, dacă se reține numai unul dintre termenii soluției generale (60.27), de exemplu soluția (60.28), pentru a avea o undă progresivă. Dând lui k toate valorile posibile — pozitive sau negative — compatibile cu (60.23) (și cu dimensiunile finite ale cristalului, de care până acum nu am ținut seama avînd în vedere numărul N extrem de mare al atomilor din cristal), se obține toate stările electronilor cu mișcare neperturbată. Energia asociată acestor stări e dată de relația (60.26).

b) *Electronul are o mișcare puternic perturbată de rețea*, deoarece

$$k = n \frac{1}{2a} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (60.30)$$

În acest caz trebuie să se opereze cu întreaga expresie (60.20) a energiei potențiale și ecuația lui Schrödinger, pentru stări staționare (60.14) devine (în tranșiere unidimensională):

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \left(\frac{1}{4} U_0 + \sum_{i=1}^{\infty} U_i \cos \frac{2\pi i x}{a} \right) \Psi = w \Psi. \quad (60.31)$$

Aceasta este o ecuație diferențială liniară cu coeficienți variabili (de tip parametric), a cărei integrare e complicată. Dacă ne limităm numai la determinarea valorilor permise ale energiei w , corespunzătoare valorilor (60.30), ne putem mulțumi cu o expresie aproximativă a funcțiunii de undă, cu ajutorul căreia se poate determina energia, folosind relația (60.18). O astfel de expresie aproximativă poate fi stabilită pe considerații fizice, ținînd seama de analogia menționată de la început, cu propagarea undelor electromagnetice prin cristale¹. Se admite anume că efectul principal al perturbației mișcării libere a electronului provine din apariția unei unde inverse, reflectate, de forma (60.29), alături de unda directă (60.28) a mișcării libere, — și anume astfel încît prin suprapunere să rezulte o undă staționară, în care caz propagarea (adică mișcarea electronului) e complet anihilată. Aceasta înseamnă că funcțiile de undă

¹ v. V. Sergiescu, *Introducere în fizica solidului*, Ed. tehnică, 1959.

ale mișcării perturbate sînt approximate prin soluții de forma relației (60.27) ale ecuației mișcării neperturbate, cu coeficienți aleși astfel încît să exprime unde staționare, iar densitatea de probabilitate $|\Psi|^2$ să fie o funcțiune pară de x (în acord cu simetria problemei). Există numai două combinații liniare independente care satisfac condițiile cerute și anume funcțiunile reale.

$$\Psi_1 = A_1 \cos 2\pi kx \quad (60.32)$$

$$\Psi_2 = A_2 \sin 2\pi kx. \quad (60.33)$$

Amplitudinile A_1 și A_2 se determină cu ajutorul condiției de normare (60.11) în care integrarea se face pe întregul cristal unidimensional cu N atomi. Se obține

$$1 = \int_0^{Na} |\Psi_1|^2 dx = A_1^2 \int_0^{Na} \cos^2 2\pi kx \, dx = A_1^2 \frac{Na}{2}$$

și o expresie analogă pentru A_2 , adică

$$A_1 = A_2 = \sqrt{\frac{2}{Na}}. \quad (60.34)$$

În aproximația considerată a mișcării perturbate, fiecărei valori (60.30) a numărului de unde îi corespund două funcțiuni de undă distincte cu expresiile aproximative

$$\Psi_1 \approx \sqrt{\frac{2}{Na}} \sin 2\pi kx = \sqrt{\frac{2}{Na}} \sin \frac{\pi nx}{a} \quad (60.35)$$

$$\Psi_2 \approx \sqrt{\frac{2}{Na}} \cos 2\pi kx = \sqrt{\frac{2}{Na}} \cos \frac{\pi nx}{a}. \quad (60.36)$$

Valorile corespunzătoare ale energiei electronului se obțin cu relația (60.18). În transcriere unidimensională

$$w_1 \approx \tilde{w}_1 = \int_0^{Na} \Psi_1^* \left[-\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \frac{d^2 \Psi_1}{dx^2} + U \Psi_1 \right] dx \quad (60.37)$$

$$w_2 \approx \tilde{w}_2 = \int_0^{Na} \Psi_2^* \left[-\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \frac{d^2 \Psi_2}{dx^2} + U \Psi_2 \right] dx. \quad (60.38)$$

Aici trebuie introdusă expresia corectă (60.20) a energiei potențiale. Calculul se simplifică, deoarece Ψ_1 și Ψ_2 sînt soluții ale ecuației neperturbate (60.25). Se obține :

$$\begin{aligned} w_1 &\approx \int_0^{Na} \Psi_1^* \left[\frac{\hbar^2}{2m} k^2 + U_0 + \sum_{i=1}^{\infty} U_i \cos \frac{i2\pi x}{a} \right] \Psi_1 dx = \\ &= \left(\frac{\hbar^2}{2m} k^2 + U_0 \right) \int_0^{Na} |\Psi_1|^2 dx + \sum_{i=1}^{\infty} U_i \int_0^{Na} |\Psi_1|^2 \cos \frac{i2\pi x}{a} dx \end{aligned}$$

și analog

$$w_2 \approx \left(\frac{\hbar^2}{2m} k^2 + U_0 \right) \int_0^{Na} |\Psi_2|^2 dx + \sum_{i=1}^{\infty} U_i \int_0^{Na} |\Psi_2|^2 \cos \frac{i 2 \pi x}{a} dx.$$

Din relația (60.11) rezultă $\int_0^{Na} |\Psi_1|^2 dx = \int_0^{Na} |\Psi_2|^2 dx = 1$, astfel că ultimele relații

devin

$$w_1 \approx \frac{\hbar^2}{2m} k^2 + U_0 + \sum_{i=1}^{\infty} U_i \int_0^{Na} |\Psi_1|^2 \cos \frac{i 2 \pi x}{a} \cdot dx \quad (60.39)$$

$$w_2 \approx \frac{\hbar^2}{2m} k^2 + U_0 + \sum_{i=1}^{\infty} U_i \int_0^{Na} |\Psi_2|^2 \cos \frac{i 2 \pi x}{a} \cdot dx \quad (60.40)$$

Efectuând integrarea cu Ψ_1 și Ψ_2 dați de relațiile (60.35) și (60.36), se obține

$$\begin{aligned} \int_0^{Na} |\Psi_1|^2 \cos \frac{i 2 \pi x}{a} dx &= A_1^2 \int_0^{Na} \cos^2 \left(\frac{n \pi x}{a} \right) \cdot \cos \left(\frac{i 2 \pi x}{a} \right) dx = \\ &= \frac{2}{Na} \int_0^{Na} \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{2n \pi x}{a} \right) \right] \cdot \cos \left(\frac{i 2 \pi x}{a} \right) dx = \\ &= \frac{1}{Na} \int_0^{Na} \frac{1}{2} \left[\cos \frac{(n+i) \pi x}{a} + \cos \frac{(n-i) \pi x}{a} \right] dx \\ (\text{cu } \int_0^{Na} \cos \frac{i 2 \pi x}{a} dx &= 0), \end{aligned}$$

astfel că

$$\int_0^{Na} |\Psi_1|^2 \cos \frac{i 2 \pi x}{a} dx = \begin{cases} 0 & \text{pentru } i \neq n \\ \frac{1}{2} & \text{pentru } i = n, \end{cases}$$

și deci pentru k dat (deci n dat) rezultă

$$w_1 \approx \frac{\hbar^2}{2m} k^2 + U_0 + \frac{1}{2} U_n, \quad (60.41)$$

în care U_n reprezintă amplitudinea armonicii de ordinul $i = n$ din dezvoltarea în serie Fourier (60.20) a energiei potențiale $U(x)$.

Analog dacă se ținea seama de relația

$$\begin{aligned} \int_0^{Na} |\Psi_2|^2 \cos \frac{i2\pi x}{a} dx &= A_2^2 \int_0^{Na} \sin^2 \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \cdot \cos \left(\frac{i2\pi x}{a} \right) dx = \\ &= \frac{2}{Na} \int_0^{Na} \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2n\pi x}{a} \right) \right] \cdot \cos \left(\frac{i2\pi x}{a} \right) dx = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{pentru } i \neq n \\ -1 & \text{pentru } i = n \end{cases}, \end{aligned}$$

se obține

$$w_2 \approx \frac{\hbar^2}{2m} k^2 + U_0 - \frac{1}{2} U_n. \quad (60.42)$$

Recapitulând, am obținut pentru dependența energiei electronului de numărul de undă $w = w(k)$ expresiile următoare :

a) pentru $k \neq \pm n \frac{1}{2a}$ (mișcare neperturbată)

$$w = w(k) \approx \frac{\hbar^2}{2m} k^2 + U_0; \quad (60.43)$$

b) pentru $k = \pm n \frac{1}{2a}$ (mișcare perturbată), cu $n = 1, 2, \dots$,

$$w = w(k) \approx \frac{\hbar^2}{2m} k^2 + U_0 \pm \frac{1}{2} U_n. \quad (60.44)$$

Rezultă că variația energiei electronului în funcțiune de numărul de unde k se reprezintă aproximativ printr-o parabolă (60.43) care, în punctele „critice“ $k = \pm n \frac{1}{2a}$, suferă salturi egale în valoare absolută cu U_n ; în vecinătatea punctelor „critice“, parabola se deformează pentru a se obține racordări impuse de considerente de continuitate, așa cum se arată în figura 60.5, a. Deoarece U_n scade când n crește, seria Fourier fiind uniform convergentă, salturile energiei în punctele critice se micșorează pe măsură ce $k = n \frac{1}{2a}$ crește.

În realitate, și în intervalele cuprinse între două valori critice consecutive ale mărimii k , energia electronului variază discontinuu, salturile energiei fiind însă extrem de mici în aceste intervale. În adevăr, observînd că funcțiunea de undă Ψ este periodică în x , cu perioada egală și cu Na — deoarece din motive de simetrie în punctele omologe ale două cristale vecine electronul se găsește în stări egale — rezultă, ținînd seama de relația (60.28):

$$A' e^{j2\pi kx} = A' e^{j2\pi k(x+Na)},$$

de unde se deduce

$$e^{j2\pi kNa} = 1,$$

care conduce la relația $kNa = \text{număr întreg}$, sau

$$k = \frac{r}{Na}. \quad (r = 1, 2, 3, \dots) \quad (60.45)$$

Deci și în intervalele dintre punctele critice, mărimea k variază discontinuu, astfel că energia electronului e capabilă de valori discrete și în aceste intervale, în care însă salturile sînt foarte mici, deoarece N este foarte mare.

În figura 60.5 *a* este reprezentată variația energiei în funcție de k într-un punct arbitrar din cristal. Se poate face o reprezentare a variației energiei electronului, ca în figura 60.5 *b*, de-a lungul axei Ox extinsă în lungul cristalului, obținindu-se astfel benzile de energie permise (b.p.) și interzise (b.i.), găsite în paragraful precedent pe altă cale. Electronul poate avea deci

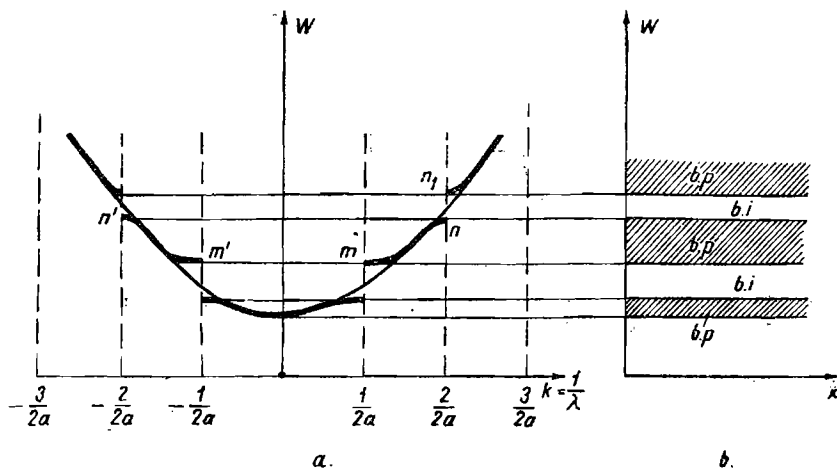


Fig. 60.5

numai stări în care energia sa are valori cuprinse în benzile (zonele) permise; în aceste benzi energia variază practic continuu, deoarece, așa cum s-a arătat mai sus, structura discontinuă a zonelor permise este foarte fină. Teoria care folosește zonele interzise și permise de energie pentru explicarea unor proprietăți ale corpului solid se numește *teoria zonelor*.

60.4. Elemente de teorie cuantică a conducerii electrice în solide

60.4.1. *Statistica Fermi-Dirac*. S-a arătat mai sus că electronii pot „ocupa” numai benzile de energie permise (înțelegându-se prin această afirmație că ei pot avea numai acele valori ale energiei care sînt cuprinse în aceste benzi), fără a se indica însă modul de ocupare al benzilor. Aceasta rezultă din *statistica Fermi-Dirac*, aplicabilă electronilor sau, mai general, microparticulelor cu spin semîntreg. Conform statisticii Fermi-Dirac, numărul mediu $\tilde{n}_k$ de electroni care se pot afla într-o stare dată, care are energia w_k , e dat de expresia

$$\tilde{n}_k = \frac{1}{\frac{w_k - \mu(T)}{e kT} + 1}, \quad (60.46)$$

în care k este constanta lui Boltzmann, T temperatura absolută, iar μ o mărime numită *potențial chimic pentru o particulă*, care depinde de temperatura cristalului. În adevăr, numărul total de electroni N fiind dat, există relația

$$N = \sum_k \tilde{n}_k, \quad (60.47)$$

care exprimă implicit o legătură între mărimile μ și T (la N dat). Studiul termodinamic al condițiilor de echilibru a două corpuri în contact chimic (care pot schimba particule între ele) arată că *se realizează echilibrul chimic* (adică lipsa unui transfer mediu de particule) *dacă potențialele chimice ale celor două corpuri sînt egale*. Potențialul chimic are deci pentru schimbul de particule, rolul pe care temperatura îl are pentru schimbul de căldură.

Interacțiunea electronilor din cristal asigură nivelurile de energie distincte pentru stări orbitale distincte ale electronilor. Deoarece însă la fiecare stare orbitală corespund două stări (cuantice) posibile (cu spinii electronilor opuși), fiecărui nivel de energie îi corespund două stări (cuantic) posibile. Numărul mediu de electroni care revin unui nivel de energie cu energia w e deci de două ori mai mare la numărul mediu de electroni ai unei stări (60.46)

$$\tilde{n}_w = \frac{2}{e^{\frac{w-\mu(T)}{kT}} + 1} = F(w). \quad (60.48)$$

Se observă că nivelurile cu energii mici sînt ocupate cu precădere la μ și T date. De asemenea, dacă temperatura absolută e nulă, $T = 0$, se obțin următoarele egalități

$$\begin{aligned} \tilde{n}_w &= 2 \text{ pentru } w_0 < w < \mu(0) \\ \tilde{n}_w &= 0 \text{ pentru } w > \mu(0) \end{aligned} \quad (60.49)$$

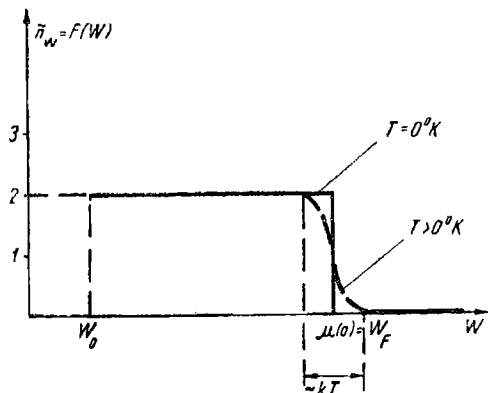


Fig. 60.6

(în care w_0 e cel mai scăzut nivel de energie permis) care conduc la reprezentarea din figura 60.6 a dependenței mărimii $\tilde{n}_w = F(w)$ de energia permisă w . Rezultă deci existența unui nivel limită de energie $w_F = \mu(0)$, dependent de natura corpului, deasupra căruia nivelurile permise nu pot fi ocupate de electroni — și care se numește *nivelul limită Fermi*. De asemenea, mai rezultă că, la $T = 0$, nivelurile de energie permise situate sub nivelul limită Fermi sînt ocupate fiecare de doi electroni (în conformitate și cu principiul de excluziune al lui Pauli de care se ținea seama în statistica Fermi-Dirac). Dacă $T \neq 0$, curba $\tilde{n}_w = F(w)$ are colțurile rotunjite (curba punctată în fig. 60.6), astfel că nu există un nivel limită perfect definit. Zona de trecere de la $\tilde{n}_w = 2$ la $\tilde{n}_w = 0$ are însă o extensiune egală cu kT . La temperaturile obișnuite de utilizare ale corpurilor solide $kT \ll \mu(0) - w_0$ (deoarece constanta lui Boltzmann $e k = 1,36 \cdot 10^{-23}$ jouli/grad). De aceea, relațiile (60.49) sînt practic satisfăcute și la aceste temperaturi.

60.4.2. Conducția electrică. Presupunem acum că în interiorul cristalului se stabilește un cîmp electric mediu dirijat (pentru simplificarea expunerii), în sensul negativ al axei Ox , de intensitate $E_x = -E$. Din punctul de vedere al mecanicii clasice asupra electronilor se exercită o forță medie $F = -q_0 E_x = q_0 E$ ($-q_0$ fiind sarcina lui electrică), care determină variația în timp a impulsului p . Din punctul de vedere cuantic, cîmpul exterior constituie o perturbăție, care determină tranziții ale electronilor de pe nivelurile cu număr de unde mai mic pe nivele cu număr de undă mai mare. Nivelul de energie ocupat de un electron se deplasează pe curba $w = f(k)$ din figura 60.5, a, în sensul numerelor de undă k crescătoare.

În cazul unei particule libere cu energia (60.26), viteza $v = \frac{p}{m}$ a electronului se poate determina din relația

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dk} &= h \frac{dw}{dp} = h \frac{d}{dp} \left(\frac{p^2}{2m} + U_0 \right) = h \frac{p}{m} = hv, \\ &= \frac{1}{h} \frac{dw}{dk}. \end{aligned} \quad (60.50)$$

În mecanica cuantică se demonstrează că această relație este valabilă și în cazul mișcării unei particule într-un cîmp de forțe (cînd energia lui nu mai e dată de (60.26), și unda asociată lui nu mai e o undă progresivă, plană, monocromatică), și anume pentru viteza de grup a unei asociale, interpretabilă ca viteză a particulei în reprezentarea ei corpusculară.

De asemenea, tot în cazul unei particule libere cu energia (60.26), masa m a electronului se poate determina din relația

$$\frac{d^2 w}{dk^2} = h^2 \frac{d^2 w}{dp^2} = h^2 \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{p^2}{2m} + U_0 \right) = h^2 \frac{1}{m},$$

din care rezultă

$$m = \frac{1}{h^2} \frac{d^2 w}{dk^2}. \quad (60.51)$$

În cazul mișcării unei particule într-un câmp de forțe, expresia (60.51) definește o masă echivalentă sau efectivă asociabilă particulei, în ipoteza că mișcarea ei poate fi considerată în primă aproximație ca mișcarea unei particule libere.

Mișcarea electronilor din cristalul considerat, sub acțiunea unui câmp mediu (macroscopic) E , poate fi deci tratată în plină aproximație din punctul de vedere corpuscular ca mișcarea unei particule libere, avînd însă viteza echivalentă v^* și masa echivalentă m^* date de relațiile

$$v^* = \frac{1}{h} \frac{dw}{dk}, \quad m^* = \frac{1}{h^2} \frac{d^2 w}{dk^2}, \quad (60.52)$$

unde $w = f(k)$ e, reprezentat în figura 60.5, a.

Se constată că viteza electronului e proporțională cu coeficientul unghiular al tangentei la curba $w = f(k)$ din figura 60.5, a, fiind, de exemplu, nulă în punctele m, m', n, n' , pozitivă pe porțiunea $m n$ și negativă pe porțiunea $m' n'$ a curbei. Dacă considerăm un electron din banda permisă corespunzătoare, de exemplu, porțiunilor $m n$, respectiv $m' n'$, observăm că la creșterea numărului k el trece de pe nivelurile inferioare pe niveluri superioare de energie (dacă acestea sînt libere), punctul figurativ fiind pe porțiunea $m n$, și că el se mișcă în sensul pozitiv al axei Ox , deoarece $v > 0$. Aceste tranziții între niveluri vecine ale unei benzi permise sînt foarte probabile, deoarece diferența dintre nivelurile respective e extrem de mică. Cînd electronul ajunge la nivelul superior al benzii, corespunzător punctului n , viteza sa se anulează, iar starea sa poate evolua în unul din următoarele două moduri:

a) electronul poate „sări” peste banda interzisă pe nivelul corespunzător punctului n_1 , dacă acest nivel este liber; saltul este însă posibil numai dacă banda interzisă respectivă este suficient de îngustă și temperatura e suficient de mare, ca electronul să poată dispune, prin efecte cumulative ale agitației termice, de energia necesară, egală cu diferența dintre energiile corespunzătoare nivelurilor care limitează banda interzisă.

b) electronul poate trece din starea corespunzătoare punctului n în care numărul de unde e pozitiv, în aceea corespunzătoare punctului n' , în care numărul de unde e negativ, dar cu aceeași valoare absolută. Această tranziție a electronului între cele două stări constituie un proces specific cuantic: în punctul n , funcțiunea de undă a electronului e aproximată prin expresia (60.27), care reprezintă o suprapunere de două stări descrise de funcțiunile $\Psi' = A' e^{j2\pi kx}$ și $\Psi'' = A'' e^{-j2\pi kx}$, corespunzătoare unor particule libere care s-ar mișca cu impulsuri $p = h k$ egale și opuse. În această stare, electronul nu are un impuls determinat și de aceea viteza lui echivalentă (a „corpusculului” echivalent — 60.50) e nulă. Tranziția $n \rightarrow n'$ corespunde din punct de vedere corpuscular trecerii vitezei prin zero spre valori negative corespunzătoare porțiunii $n' n'$ (viteza electronului se micșorează începînd de la punctul de inflexiune al curbei $m n$, deoarece pe toată porțiunea finală a acestei curbe masa echivalentă (60.52) e negativă și forța medie dirijată în sensul pozitiv al axei Ox accelerează electronul în sens opus, adică îl decelerează). După ce electronul atinge nivelul inferior al benzii, punctul figurativ trece din m' în m și procesul se poate repeta ciclic.

Dacă banda considerată e complet ocupată de electroni, adică are cîte doi electroni pe fiecare nivel de energie, iar în interiorul corpului se stabilește un câmp electric exterior, ca mai sus, fiecărui electron care se mișcă într-un sens al axei Ox îi corespunde unul care se mișcă în sensul opus. În adevăr, câmpul electric imprimă electronilor o mișcare în bloc, astfel că fiecare nivel de energie rămas liber este ocupat de un electron de pe nivelul vecin; nivelul inferior, precum și cel situat imediat sub nivelul superior al benzii, se ocupă de electronii care își schimbă sensul de mișcare (corespunzător salturilor din m' în m și din n în n'), astfel că banda fiind complet ocupată, numărul electronilor care ocupă nivelurile superioare de energie părăsindu-le pe cele inferioare este egal cu numărul celor care trec de pe nivelurile superioare pe cele inferioare. Electronii unei astfel de benzi, complet ocupate, nu pot deci contribui la stabilirea unui curent electric mediu, adică a unui curent de conducție, celor două sensuri opuse de mișcare revenindu-le numere egale de electroni.

Dacă însă banda e incomplet ocupată de electroni, există mai mulți electroni care au viteza orientată într-unul din sensurile axei Ox decât în celălalt, deoarece câmpul electric, determinând un sens privilegiat de mișcare a electronilor, mărește probabilitatea de realizare a stărilor electronilor în care vectorul k este orientat în sensul opus vectorului E (sarcina electronilor fiind negativă), față de stările în care k și E au aceeași orientare. Benzile incomplet ocupate pot deci contribui la stabilirea unui curent de conducție în corp, deoarece electronii lor se pot mișca într-un sens în număr mai mare decât în sens contrar.

Rezultă următoarea concluzie importantă: materialele care au în lipsa unui câmp electric exterior numai benzi complet ocupate sînt izolanti electrici, iar cele care au benzi incomplet ocupate — în lipsa unui câmp electric exterior — sînt conductori electrici.

În teoria zonelor, conducția electrică nu se explică deci pe baza existenței unor electroni care se pot mișca liber în interiorul corpului, ci pe baza modului de ocupare a benzilor care determină un surplus de electroni ce se mișcă într-un sens privilegiat.

60.4.3. Conductori, semiconductori, izolanti. S-a arătat mai sus că modul de ocupare a benzilor de energie permise e dat de statistica Fermi-Dirac, din care rezultă că electronii ocupă (la temperaturi joase) numai benzile situate sub nivelul limită Fermi. Dacă acest nivel se găsește în interiorul unei benzi permise, ca în figura 60.7, *a*, banda e incomplet ocupată, deoarece nive-

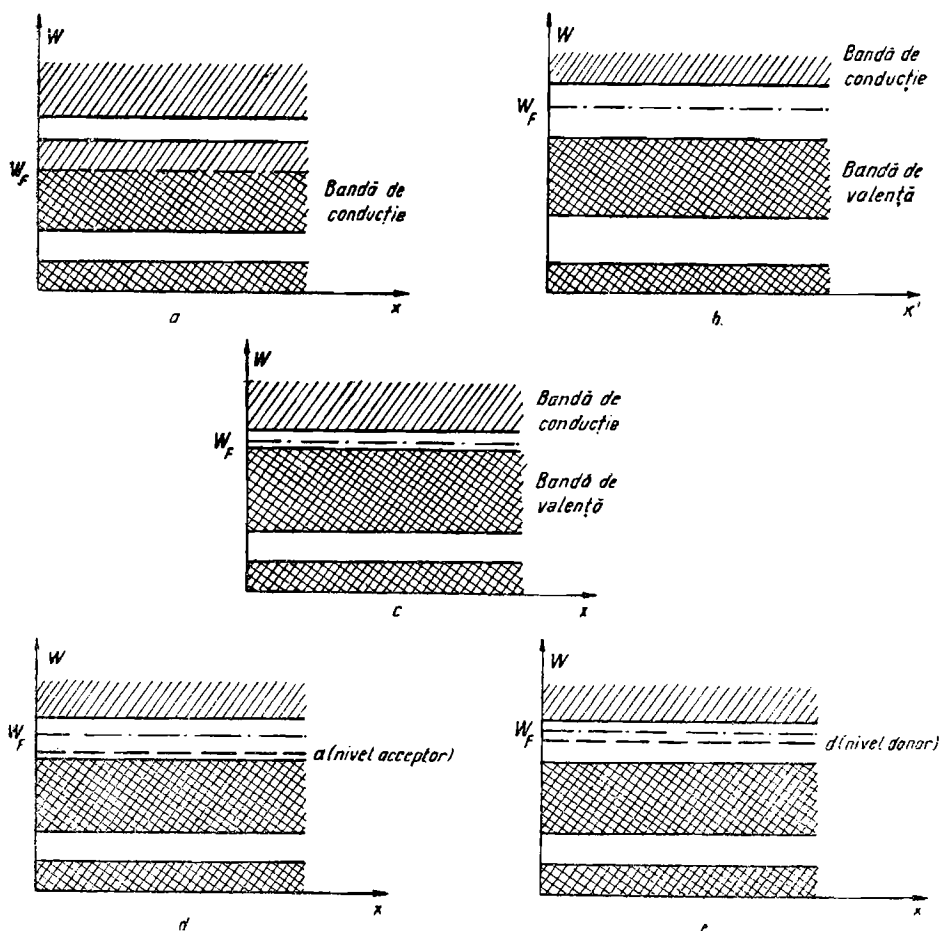


Fig. 60.7

lurile situate deasupra nivelului limită Fermi $w_F = \mu(0)$, desenat cu linie-punct în figura 60.7.a și următoarele, sînt libere¹. Un corp al cărui nivel limită se găsește în interiorul unei benzi permise este deci conductor. Banda incomplet ocupată se numește *bandă de conducție*; celelalte benzi, inferioare, sînt toate complet ocupate și nu contribuie la stabilirea curentului electric. Mai există posibilitatea (la cristale reale, tridimensionale) ca banda cea mai înaltă ocupată de electroni să se suprapună parțial peste banda permisă imediat superioară, așa cum se observă și în figura 60.3 pentru valori destul de mici ale distanței a ; în acest caz, electronii pot trece ușor din ultima bandă ocupată de electroni în cea superioară, la stabilirea cîmpului electric. În corp se poate stabili un curent electric: corpul este conductor.

La izolanti, nivelul limită trece prin mijlocul unei benzi interzise, astfel că toate benzile inferioare sînt complet ocupate, și deci nu se poate stabili un curent electric în corp (fig. 60.7.b). Banda permisă situată imediat sub nivelul w_F se numește *bandă de valență*.

În această clasificare, *semiconductorii* sînt materiale solide, care au nivelul Fermi w_F situat într-o bandă interzisă ca și la izolanti și care satisfac una din următoarele două condiții:

a) *Banda interzisă în care se găsește nivelul Fermi e suficient de îngustă*, pentru ca o parte din electroni să o poată depăși sub acțiunea agitației termice, lăsînd banda de valență incomplet ocupată (fig. 60.7.c). Semiconductorii din această categorie se numesc *semiconductori intrinseci*;

b) *Bandă interzisă străbătută de nivelul Fermi nu e suficient de îngustă, dar conține unele niveluri de energie permise, numite niveluri adiționale și notate cu a și d în figura 60.7.d și 60.7.e*, datorită prezenței impurităților (cum se va explica mai jos) și care pot fi libere (cele notate cu a) sau ocupate de electroni (cele notate cu d). Nivelurile adiționale libere trebuie să fie situate la mică distanță de banda de valență, iar cele ocupate la mică distanță de banda imediat superioară celei de valență și care se numește *banda de conducție*. Dacă aceste ultime condiții sînt satisfăcute, electronii pot trece ușor de pe banda de valență pe nivelurile adiționale libere (a) care se numesc *niveluri acceptoare*, sau pot trece ușor de pe nivelurile adiționale ocupate (d), numite *niveluri donoare*, în banda de conducție. În ambele cazuri, una din benzile permise rămîne descompletată și poate deci contribui la stabilirea curentului electric. Semiconductorii din această categorie se numesc *semiconductori extrinseci*. Semiconductorii uzuali sînt *semiconductori extrinseci*.

Semiconductorii extrinseci care au nivelurile donoare se numesc *semiconductori de tip „n”*, deoarece curentul electric e stabilit în aceste materiale de electronii încărcăți negativ (de aici inițiala „n”) ajuși în banda de conducție de pe nivelurile donoare. Semiconductorii extrinseci care au niveluri acceptoare se numesc *semiconductori de tip „p”*, din următorul motiv: electronii care trec pe nivelurile acceptoare lasă în nivelurile superioare ale benzii de valență locuri vacante. Cum electronii au sarcina negativă, iar cei de pe nivelurile superioare ale benzilor au (v. rel. 60.52 și fig. 60.5, a) masa echivalentă (efectivă) negativă, lipsa unui astfel de electron, numită și *lacună* (sau gaură, gol), e echivalentă prezenței unei particule de masă pozitivă și sarcină pozitivă; aceste locuri sînt ocupate de electronii de pe nivelurile imediat inferioare, astfel că lacunele se deplasează în sensul opus deplasării electronilor care vin să le ocupe. Deoarece numărul electronilor ajuși pe nivelurile acceptoare e relativ mic, rezultă că numărul lacunelor din banda de valență e mult mai mic decît al electronilor și deci e mai simplu să se studieze mișcarea de ansamblu a electronilor prin mișcarea acestor lacune, echivalente unor particule pozitive. De aceea se spune că la semiconductorii din această categorie, conductivitatea e datorită lacunelor pozitive, de unde litera „p” (de la pozitiv) care indică tipul semiconductorului.

Nivelurile adiționale pot apărea dacă există adausuri străine, numite *impurități*, în cristalele unor anumite substanțe. De exemplu, dacă germaniului, care este tetravalent, i se adaugă fosfor (pentavalent), una din valențele fiecărui atom de fosfor rămîne nesaturată (deoarece el are cinci electroni de valență, dintre care numai patru sînt folosiți pentru a realiza legătura chimică cu cei patru atomi vecini de germaniu; electronul rămas liber poate fi cedat benzii de conducție a germaniului și deci efectul este apariția unui nivel donor; dacă însă se adaugă atomi de bor care sînt trivalenți, unul din acești atomi saturează numai trei dintre valențele atomilor de germaniu vecini, iar saturarea celei de a patra valențe se realizează prin trecerea unui electron de pe banda de valență a corpului pe nivelul corespunzător nesaturat. Efectul este apariția unui nivel acceptor.

¹ Riguros, conform celor arătate anterior, numai la 0°K. Practic și la temperatura camerei cînd, de fapt, agitația termică aduce puțini electroni pe niveluri superioare nivelului Fermi.

În încheiere menționăm că electronii ajunși în banda de conducție, respectiv lacunele formate în banda de valență, sînt în număr relativ mic, din care cauză conducția electrică este mai slabă la semiconductori decît la conductori. Totodată, numărul acestor electroni și lacune sporește considerabil o dată cu creșterea temperaturii, de aceea *conductivitatea electrică a semiconductoarelor crește cu temperatura.*

60.5. Aplicație. Efecte de contact

La suprafața de contact a unui metal cu un semiconductor sau a doi semiconductori de tipuri diferite (unul „p” și altul „n”) se realizează un *efect de redresare*, care consistă în trecerea mai ușoară a curentului electric prin contact în unul din sensuri decît în celălalt.

Prezentăm, ca exemplu, efectul de redresare la contactul dintre un conductor metalic și un semiconductor extrinsec de tip „n” (cu conducție electronică). Dacă un conductor metalic (m) e situat în imediata apropiere a unui semiconductor de tip „n” (s_n), fără să se atingă, ambele fiind neîncărcate electric, așezarea relativă a nivelurilor de energie e arătată în figura 60.8. Deoarece nu există cîmp electric în exteriorul lor, potențialul electric e constant în exterior și energia potențială a unui electron complet îndepărtat din corp e aceeași (w_{ext}^0) pentru ambele corpuri. Nivelurile superioare coincid deci pentru ambele diagrame ale nivelurilor de energie. Potențialele chimice sînt însă distincte în cele două materiale. La temperaturi suficient de joase, aceste potențiale chimice sînt practic egale cu valorile lor la $T = 0^\circ K$, adică cu nivelurile Fermi: din metal, w_F^m (situat în banda de conducție a acestuia), și din semiconductor, w_F^s (situat în marginea inferioară a benzii de conducție și nivelul adițional donor populat cu electroni). Energiile de extracție ale metalului, respectiv ale semiconductorului, sînt $\Phi^m = w_{ext}^0 - w_F^m$, respectiv $\Phi^s = w_{ext}^0 - w_F^s$, și presupunem $\Phi^m > \Phi^s$, adică $w_F^m < w_F^s$. Dacă vom considera acum că cele două corpuri sînt puse în contact electric, în primul moment diferența de potențial chimic dintre ele determină un schimb de particule pînă se realizează echilibrul termodinamic. Semiconductorul, care are potențialul chimic mai înalt, cedează electroni de pe nivelurile lui adiționale, deoarece, metalului, care are potențialul chimic mai scăzut. Metalul se încarcă (superficial) negativ, iar semiconductorul rămîne încărcat pozitiv în vecinătatea zonei de contact. Potențialul electric mediu V_0 al metalului scade, iar energia potențială $U_0 = -q_0 V_0$ a unui electron (negativ) din metal crește, astfel încît toate nivelurile de energie din metal (inclusiv nivelul Fermi) se înalță, nivelul superior devenind $w_{ext}^m > w_{ext}^s$. Deoarece semiconductorul se descarcă de electroni, potențialul lui electric mediu crește și energia potențială a unui electron din semiconductor scade. Spre deosebire de metal, încărcarea semiconductorului se face pe o anumită porțiune din volumul lui, corespunzător numărului mult mai mic de purtători de sarcină liberi pe care îi furnizează nivelurile donoare. Sarcina pozitivă se repartizează spațial pe o lungime L măsurată de la suprafața de contact. În acest strat de lungime L , energia potențială scade continuu și întreaga diagramă a nivelurilor (care a fost calculată avînd ca referință energia potențială medie) coboară continuu în intervalul de la $x = 0$ la $x = L$. Schimbul de particule e încetinit de cîmpul electric E , care apare în stratul de grosime L , ca urmare a separării sarcinilor, și se oprește cînd potențialele chimice ajung egale în cele două medii (fig. 60.9). Din punct de vedere microscopic, în stratul de grosime L există un cîmp electric imprimat (v. vol. I, par. 10.3), care la echilibru este $E_i = -E$. Pentru $x > L$, nivelurile semiconductorului rezultă coborîte față de ale metalului cu $\Delta w = w_{ext}^m - w_{ext}^s = \Phi^m - \Phi^s$ (adică cu diferența energiilor lor de extracție). În urma acestui proces de stabilire a echilibrului în semiconductor s-a creat un strat de grosime L , numit *strat de blocare* sau *strat de baraj*, în cuprinsul căruia nivelurile donoare au rămas neocupate. În acest strat nu există practic purtători de sarcină liberi și de aceea rezistența lui electrică e mult sporită. Totodată, în cuprinsul acestui strat există o sarcină spațială, o variație a potențialului electric mediu și un cîmp electric imprimat dinspre metal spre semiconductor. Stratul de blocare are un rol esențial în proprietatea de redresare a contactului dintre metal și semiconductor.

Dacă sistemul metal — semiconductor e alimentat din exterior, astfel încît în regiunea de contact se stabilește un cîmp electric exterior orientat de la semiconductor la metal potențialul electric al semiconductorului crește, energia potențială a unui electron scade, benzile de energie se înclină și, mai mult, lărgimea stratului de blocare crește. De aceea, rezistența electrică a contactului e sporită și curentul electric care se stabilește e slab. Sensul semiconductor-metal e deci

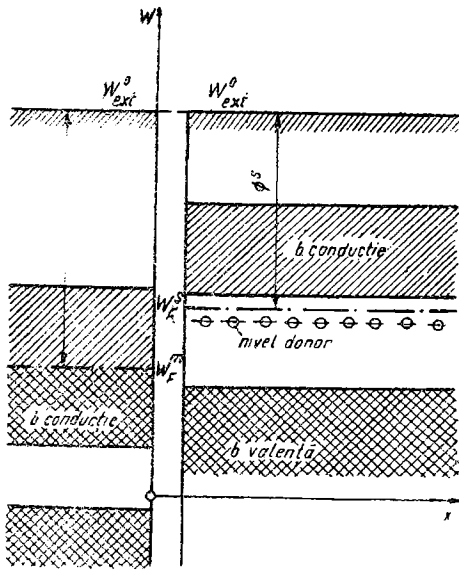


Fig. 60.8

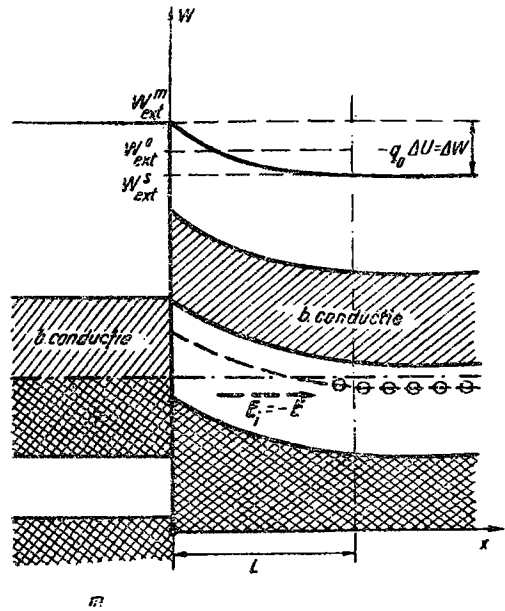


Fig. 60.9

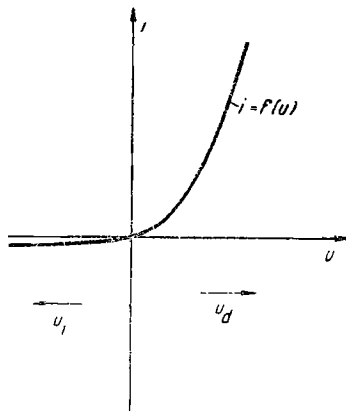


Fig. 60.10

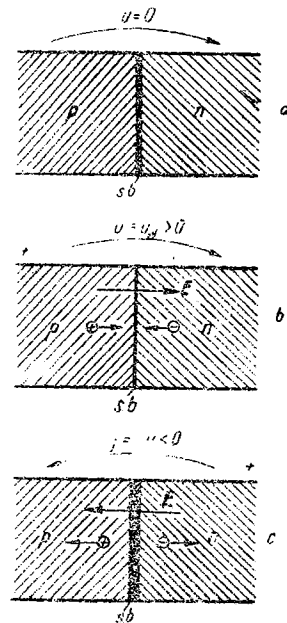


Fig. 60.11

sensul de oprire, iar tensiunea aplicată corespunzătoare se numește *tensiune inversă*. Dacă *sensul câmpului electric exterior e îndreptat de la metal la semiconductor*, fenomenele decurg invers, lărgimea stratului de blocare scade și rezistența electrică a contactului scade, curentul electric fiind mult mai intens. Acest sens se numește *sensul de trecere* și tensiunea aplicată corespunzătoare se numește *tensiune directă*. În ansamblu, variația curentului cu tensiunea aplicată e redată în caracteristica din figura 60.10.

Efectul de redresare se poate realiza și prin contactul unui semiconductor extrinsec tip „p” (cu conducție lacunară, sau de goluri), cu un semiconductor extrinsec tip „n” (cu conducție electronică). Se obține așa-numita *joncțiune „p—n”*. Și în acest caz, la echilibru apare un strat de blocare (s.b. fig. 60.11, a), sărac în purtători de sarcină liberi. La aplicarea unei tensiuni dinspre semiconductorul tip „p” spre cel de tip „n” (tensiune directă), atât lacunele din primul cit și electronii din cel de-al doilea sînt dirijați de câmpul exterior spre regiunea de joncțiune, căreia îi furnizează purtători de sarcină. Stratul de blocare se îngustează și rezistența electrică a contactului scade (fig. 60.11, b). La aplicarea unei tensiuni dinspre semiconductorul de tip „n” spre cel de tip „p” (tensiune inversă), purtătorii de sarcină sînt îndepărtați de la regiunea de contact care devine și mai săracă în purtători liberi. Stratul de blocare se lărgeste și rezistența electrică a contactului scade. Această prezentare sumară, valabilă numai calitativ pentru anumite limite ale tensiunii aplicate, se poate completa cu un studiu mai detaliat cantitativ, care se prezintă în lucrările de specialitate ¹.

¹ V. M. Drăgănescu, *Procese electronice în dispozitive semiconductoare de circuit*) Ed. Acad. R.P.R., 1962.

BIBLIOGRAFIE

A. BIBLIOGRAFIE PRINCIPALĂ

1. Răduleş, R., *Bazele teoretice ale electrotehnicii*, vol. I, Litografia Învăţământului, 1955, vol. II, Ed. energetică de stat, 1954, vol. III Litografia Învăţământului, 1955, vol. IV Tipografia şi litografia M.I., 1956.
2. Răduleş, R., *Bazele electrotehnicii*. Probleme I, Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1963, Culegere de probleme de Bazele teoretice ale electrotehnicii, vol. II Litografia şi tipografia învăţământului, 1957, vol. III Litografia şi tipografia învăţământului, 1958.
3. Budeanu, C., ş. a., *Bazele teoretice ale electrotehnicii*, Probleme I, Ed. tehnică, 1958 şi II, Ed. tehnică, 1959.
4. Neiman, L. R. şi Kalantarov, P. L., *Bazele teoretice ale electrotehnicii* (trad. din l. rusă), vol. I, II, Ed. Energetică de stat, 1955, vol. III Ed. tehnică, 1956.
5. Antonin, S. I., *Chestiuni speciale de electrotehnică*, Ed. Acad. R.P.R. 1956.
6. Preda, M., *Bazele teoretice ale electrotehnicii: circuite electrice în curent variabil*, Litografia învăţământului, Bucureşti, 1955.
7. Küpfmüller, K., *Einführung in die theoretische Elektrotechnik*, Springer Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1957.

B. BIBLIOGRAFIE SUPLIMENTARĂ PENTRU ELECTROTEHNICĂ TEORETICĂ ŞI GENERALĂ.

8. Becker, R., *Theorie der Elektrizität*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1957, Bd. I.
9. Simony, K., *Theoretische Elektrotechnik*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.
10. Weiss, A., *Übersicht über die theoretische Elektrotechnik*. Die physikalisch-mathematischen Grundlagen. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K. G., Leipzig, 1954.
Weiss, A. şi Kleinwächter, H., *Übersicht über die theoretische Elektrotechnik*. Ausgewählte Kapitel und Aufgaben, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K. G., Leipzig, 1956.
11. Smythe, W., *Static and Dynamic Electricity*, Mc. Graw-Hill Book Company, Inc. New-York, Toronto, London, 1950.
12. Joos, G., *Lehrbuch der theoretischen Physik*, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K. G., Leipzig, 1954.
13. Durand, E., *Electrostatique et magnetostatique*, Masson & Co., Paris, 1953.
14. Ionescu, Th., *Electricitatea*. Ed. de stat didactică şi pedagogică, 1962.
15. Novacu, V. *Introducere în Electrodinamică* vol. I şi II, Ed., Acad. R.P.R., 1955.
16. Tamm, I. E., *Bazele teoriei electricităţii*, Ed. tehnică, 1952.
17. Krug, K. A., *Osnovii elektrotehniki*, Gosenergoizdat Moskva — Leningrad, 1946.
18. K ssatkin, A. S., Perekalin, M. A., Sergeev, P. S., *Elektrotehnika*, Gosenergoizdat Moskva, Leningrad, 1953.

19. Netușil, A. W. și Polivanov, K. M., *Osnovii elektrotehniki*, Gosenergoizdat, Moskva, Leningrad, 1956.
20. Mierdel, G. și Wagner, S., *Aufgaben zur theoretischen Elektrotechnik*, Berlin, VEB Verlag Technik, 1959.
21. Philippow, E., *Grundlagen der Elektrotechnik*, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K. G., Leipzig, 1959.
22. Cahen, Fr., *Electrotechnique. Circuits et réseaux en régime permanent*. Tome I. Librairie Gauthier-Villars, Paris, 1962.

C. BIBLIOGRAFIE SUPLIMENTARĂ PENTRU ANUMITE CAPITOLE

23. Antoniu, S. I., *Calculul matriceal și tensorial în electrotehnică*, București, Ed. tehnică, 1962.
24. Doetsch, G., *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation*. R. Oldenburg München, 1961.
25. Andronescu, Pl., *Aplicațiile calculului operațional la studiul circuitelor electrice*, Ed. tehnică, 1957.
26. Weiss, A., *Einführung in die Matrizenrechnung zur Anwendung in der Elektrotechnik*. R. Oldenburg, München, 1961.
27. Hochrainer, A., *Symmetrische Komponenten in Drehstromsystemen*. Springer Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1957.
28. Popescu, A. I. T., *Curs de electrotehnică II*, partea I-a. Analiza armonică a funcțiilor periodice nesinusoidale. 1957.
29. Lunze Kl., *Berechnung elektrischer Stromkreise*, VEB Verlag Technik Berlin 1960.
30. Wegrzyn, St., *Operatorenrechnung in der Elektrotechnik*, PWN Warszawa, 1962.
31. Kontorovici, M. I., *Calculul operațional și fenomenele tranzitorii în circuitele electrice* (trad. din l. rusă), Ed. energetică de stat, 1955.