

TEORIA SISTEMELOR DE REGLARE AUTOMATĂ

dr.ing. CONSTANTIN ILAȘ
Universitatea "Politehnica" București
Facultatea de Electrotehnică

MATRIX ROM
București 2001

©MATRIX ROM

C.P. 16 - 162

77500 - BUCUREȘTI

tel. 01.4113617, fax 01.4114280

e-mail: matrix@fx.ro

Referenți științifici: **prof.univ.dr.ing. RĂZVAN MĂGUREANU**
prof.univ.dr.ing. LIVIU KREINDLER

ISBN 973 - 685 - 225 - 3

CUPRINS

1	Introducere	1
1.1	Sisteme de reglare automată: structură, exemple, scurtă istorie	1
1.2	Definirea noțiunii de sistem dinamic	8
1.3	Clasificarea sistemelor dinamice	13
1.4	Structuri particulare de sisteme dinamice	14
1.5	Modelarea proceselor – considerații generale	16
2	Descrierea sistemelor lineare	26
2.1	Descrierea în spațiul stărilor. Evoluția stării	26
2.1.1	Cazul sistemelor netede	26
2.1.2	Cazul sistemelor discrete	30
2.1.3	Calculul analitic al evoluției stării sistemelor lineare	32
2.1.3.1	Evaluarea matricei fundamentale a sistemelor netede	32
2.1.3.2	Evaluarea matricei fundamentale a sistemelor discrete	34
2.2	Comportarea intrare-ieșire	41
2.3	Descrierea prin funcții (matrici) de transfer	44
2.4	Realizări. Echivalența sistemelor. Forme canonice	51
2.4.1	Realizări	51
2.4.2	Echivalența sistemelor	55
2.4.3	Forme canonice	59
2.5	Descrierea în frecvență a sistemelor lineare	60
2.5.1	Diagrame Bode	61
2.5.1.1	Coordonate logaritmice	63
2.5.2	Diagrame Nyquist (polare)	68
3	Discretizarea sistemelor lineare netede	71
3.1	Discretizarea semnalelor netede. Fenomenul de aliasing	71
3.1.1	Operația de discretizare ideală	71
3.1.2	Operația de discretizare reală	71
3.2	Formularea problemei discretizării sistemelor	76
3.2.1	Discretizarea sistemelor reprezentate în spațiul stărilor	78

3.2.2 Discretizarea sistemelor reprezentate prin funcții de transfer	80
4 Stabilitatea sistemelor lineare	85
4.1 Stabilitatea internă – definire, interpretare	85
4.1.1 Definirea stabilității interne	85
4.1.2 Interpretarea stabilității interne	89
4.2 Stabilitatea externă – definire, interpretare	91
4.2.1 Definirea stabilității externe	91
4.2.2 Interpretarea stabilității externe	93
5 Răspunsul sistemelor la intrări standard	97
5.1 Răspunsul sistemelor la intrare treaptă	97
5.2 Răspunsul sistemelor la intrare rampă unitară	101
6 Conexiunea sistemelor	102
6.1 Conexiunea serie	102
6.2 Conexiunea paralel	104
6.3 Conexiunea în reacție	106
7 Proprietățile structurale ale sistemelor	109
7.1 Controlabilitate	109
7.2 Observabilitate	111
7.3 Descompunere structurală. Minimalitate	113
7.4 Lege de comandă după stare	114
7.5 Alocabilitate	115
7.6 Stabilizabilitate	118
7.7 Detectabilitate	118
8 Estimarea stării sistemelor	122
9 Compensarea sistemelor	126
9.1 Compensarea sistemelor prin lege de reacție după stare	126
9.2 Compensarea prin reacție după ieșire	127

10 Problema reglării	130
10.1 Formularea problemei reglării	130
10.2 Soluția generală a problemei reglării	131
10.3 Soluția problemei reglării pentru mărimi exogene de tip treaptă	135
10.3.1 Soluția generală utilizând regulatoare analogice	135
10.3.2 Soluția generală folosind regulatoare discrete	140
10.4 Impunerea performanțelor dinamice pentru SRA	142
11 Regulate cu structură fixă	145
11.1 Tipuri de regulate cu structură fixă pentru sisteme continue	145
11.2 Tipuri de regulate cu structură fixă pentru sisteme discrete	148
Anexa I Transformata Fourier	149
1.1 Serii Fourier	149
1.2 Transformata Fourier	151
Anexa II Transformata Laplace	157
Anexa III Transformata Fourier a semnalelor Discrete	162
3.1 Descompunerea în serie Fourier a semnalelor discrete	162
3.2 Transformata Fourier a semnalelor discrete	162
3.3 Transformata Fourier discretă	165
Anexa IV Transformata Z	167
Bibliografie	171

1 INTRODUCERE

1.1 Sisteme de reglare automată: structură, exemple, scurtă istorie

Sistemele de reglare automată sunt sistemele care realizează în mod automat (deci fără intervenția omului) controlul uneia sau a mai multor mărimi electrice, mecanice, termice, etc. Exemple de astfel de sisteme se găsesc pretutindeni, de la aparatele de uz casnic, până la cele mai sofisticate sisteme de navigație folosite de navetele spațiale.

Astfel, în cazul unui mixer este reglată viteza paletelor, în funcție de materialul prelucrat și de ceea ce se dorește a se obține. În cazul unui frigider temperatura este menținută constantă, la o valoare care poate fi aleasă de utilizator. De fapt în ambele exemple valoarea pe care dorim să o aibă mărimea controlată se poate varia doar în trepte (de obicei 5-6), și desigur, fără să se poată depăși o valoare maximă și una minimă.

Tot viteza de rotație este cea care este controlată și în cazul unui dispozitiv pentru testarea discurilor fixe (hard-disc-uri) sau CD-urilor folosite în calculatoarele personale. Într-un astfel de dispozitiv discul este rotit cu o viteză constantă. Spre deosebire de cazul mixerului, precizia cu care trebuie controlată viteza este de data aceasta extrem de ridicată, ajungându-se până la cerința ca eroarea între viteza impusă și cea obținută să nu fie mai mare de 1 p.p.m. (10^{-6}), față de să zicem 10%, adică 10^{-1} , în cazul mixerului. O aplicație intermediară în ceea ce privește precizia reglării este controlul automat al vitezei unui autovehicol, caz în care eroarea este de ordinul 1%, deci 10^{-2} . Astfel de sisteme sunt în fabricație curentă și sunt destinate condusului pe autostradă, când se pot parcurge distanțe mari cu viteză constantă și, cu ajutorul unui astfel de dispozitiv, fără să se țină piciorul pe pedala de accelerație.

Dacă presupunem că autovehicolul este echipat cu un motor electric, atunci atât în cazul mixerului, cât și al autovehicolului și al dispozitivului pentru testarea discurilor avem de a face cu reglarea vitezei unui motor electric, să spunem, pentru simplitate, de curent continuu.¹

¹) Se va demonstra la cursul de Acționări Electrice, că practic orice motor poate fi făcut să se comporte ca unul de curent continuu, în ceea ce privește reglarea vitezei și cuplului.

După cum se știe viteza unui astfel de motor poate fi aproximată ca depinzând de tensiunea de alimentare după o ecuație de forma:

$$V_a = Ri_a + L \frac{di_a}{dt} + k\omega, \quad (1.1)$$

în care V_a este tensiunea de alimentare, i_a este curentul care trece prin motor, ω este viteza rotorului, iar k o constantă. Așadar, dacă variem tensiunea de alimentare obținem o variație aproape proporțională a vitezei (neglijând căderea de tensiune pe rezistența rotorică R și pe inductivitatea rotorică L). Putem atunci

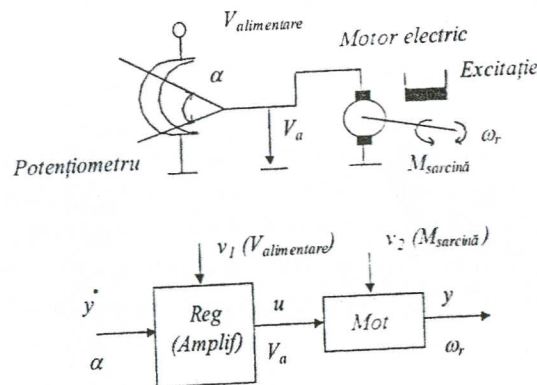


Fig. 1.1. Schema electrică de principiu și schema bloc a unui sistem automat de reglare în buclă deschisă a turației unui motor de curent continuu prin varierea tensiunii la bornele rotorului

imagina o modalitate foarte simplă de reglare a turației, în care să variem, în funcție de viteza dorită, tensiunea aplicată la bornele motorului. ca în figura 1.1. În loc ca motorului să i se aplice o tensiune constantă ($V_{alimentare}$), aceasta este variată prin intermediul unui potențiomtru.

Așa cum se vede în aceeași figură putem să reprezentăm montajul într-o formă schematică, în care ieșirea y a blocului *Mot* (reprezentând motorul) este variată în funcție de valoarea dorită y^* cu ajutorul blocului *Reg*. Acesta din urmă este desigur montajul potențiomtric, care aplică la bornele motorului o tensiune mai mare sau mai mică, în funcție de valoarea lui y^* , adică de poziția cursorului potențiomtrului.

Așadar, dacă dorim de exemplu să reducem viteza motorului vom mișca potențiometrul în sensul micșorării unghiului α , tensiunea la bornele motorului va scădea și în consecință și turația acestuia. Unghiul α a fost notat în schema bloc cu y^* , notație folosită pentru *mărimea de referință*, adică mărimea care este proporțională cu valoarea pe care dorim să o aibă mărimea reglată. Turația rotorului a fost notată cu y , notație rezervată pentru *mărimea reglată*. Tensiunea la bornele motorului joacă rolul unei *mărimi de comandă* (adică cea care este variată de sistemul de reglare automată pentru a se obține variația mărimii reglate). Potențiometrul joacă în acest montaj rolul unui *regulator*, pentru că el este cel care aplică la bornele sistemului reglat o mărime de comandă, obținută în funcție de cea de referință. În acest caz particular dependența între cele două mărimi este evident una proporțională. De fapt acest element nu este altceva decât un simplu amplificator, care amplifică valoarea mărimii de referință până la un nivel ce poate fi aplicat la bornele motorului.

Să remarcăm că turația motorului nu este influențată doar de mărimea de referință, ci și de valoarea tensiunii de alimentare precum și de cea a cuplului de sarcină. Astfel, dacă tensiunea de alimentare crește tensiunea aplicată la bornele motorului și deci și turația acestuia vor crește, atunci când mărimea de referință este constantă. O creștere a cuplului de sarcină aplicat la axul rotorului va duce la scăderea vitezei, când mărimea de referință este constantă. Așadar mărimea reglată nu depinde doar de comanda u , ci și de alte mărimi externe. Aceste mărimi care acționează din exterior asupra sistemului de reglare și influențează valoarea mărimii reglate și care sunt independente (nu pot fi modificate de sistem) se numesc *perturbații*.

În cazul schemei din figura 1.1 este clar că turația motorului nu este controlată cu o precizie prea bună, deoarece efectul perturbațiilor nu poate fi compensat de către regulator, acesta menținând permanent pentru o referință dată, o tensiune constantă, independent de viteza reală a motorului. Astfel de sisteme în care reglarea se face independent de valoarea reală a mărimii reglate, deoarece regulatorul nu are nici o informație referitoare la aceasta se numesc sisteme de reglare automată *în buclă deschisă*. De exemplu, un astfel de sistem este cel folosit în cazul mixerului, deoarece eroarea admisibilă este mai mare decât cea datorată valorilor uzuale ale perturbațiilor.

Evident o astfel de schemă nu se poate aplica în cazul reglării vitezei autovehicolului electric, deoarece precizia cerută este mult mai mare. Schema de

reglare va trebui să țină cont de viteza reală a mașinii, structura ei fiind de tipul celei din figura 1.2.²

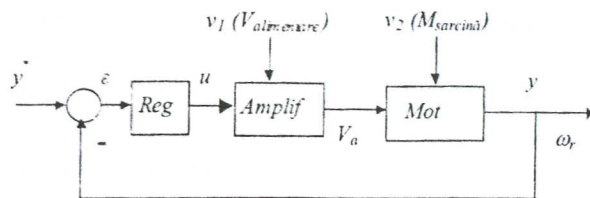


Fig.1.2. Schema bloc a unui sistem automat de reglare în buclă închisă a turației unui motor de curent continuu prin varierea tensiunii la bornele motorului.

De data aceasta turația motorului este măsurată și este comparată cu mărimea de referință. Dacă mărimea reglată este mai mică decât cea impusă (deci eroarea ε este pozitivă) regulatorul face să crească tensiunea aplicată la bornele motorului, turația crescând și ea. Similar, când ε devine negativ mărimea de comandă u scade și la fel și V_a , ducând la scăderea vitezei. În acest fel turația reală este permanent adusă la valoarea de referință, chiar atunci când există perturbații. Sistemul se numește în *buclă închisă*, sau *cu reacție*, datorită acestei informații care vine de la proces spre regulator. Se observă că în acest caz apare un bloc nou, un regulator propriu-zis. Acesta este cel care în funcție de eroarea ε variază comanda u , care e amplificată de potențiometru și aplicată apoi motorului. Funcționarea schemei din figura 1.2 este similară cu felul în care acționează șoferul care conduce fără un astfel de sistem. Astfel, el compară indicația vitezei (viteza reală) cu viteza pe care o dorește (referința) și dacă este mai mică apasă mai puternic pedala de accelerație (care, în cazul unui automobil electric, modifică poziția cursorului potențiometruului, mărind tensiunea aplicată la bornele motorului). Cu alte cuvinte omul "calculează" diferența dintre referință și mărimea reglată și modifică în consecință mărimea de comandă, îndeplinind exact rolul regulatorului.

Alte câteva exemple de sisteme de reglare automată sunt:

- sisteme de reglare a poziției:
 - lifurile;

²) Aceasta este o variantă simplificată; o soluție mai completă va fi discutată ulterior.

- mașini de găurit plăci pentru circuite imprimate și de montat circuitele pe plăci;
- mașini de împachetat sau etichetat;
- mașini pentru sortarea scrisorilor;
- mașini pentru decupat circuitele integrate de pe suport;
- roboți industriali;
- sisteme de reglare a vitezei:
 - pompe, compresoare, ventilatoare;
 - mașini de spălat automate.
- sisteme de reglare a temperaturii și umidității: incubatoare, incinte locuite;
- sisteme de reglare a traiectoriei și vitezei de zbor a avioanelor (piloți automați);
- sisteme de dirijare a navelor spațiale.

Sistemele de reglare automată sunt mult mai vechi decât s-ar putea crede: acum circa 2000 de ani Hero utiliza un sistem ingenios bazat pe diferența de presiune dată de dilatarea aerului încălzit pentru deschiderea ușilor unui templu. Era un sistem în buclă deschisă, a cărui schemă de principiu este prezentată în figura 1.3. Datorită creșterii presiunii aerului încălzit de focul din altar apa din rezervor era împinsă în căldare. Căldarea devenea astfel mai grea decât contragreutatea și apărea o mișcare pe verticală, care era convertită cu ajutorul unui sistem de frânghii în mișcarea axelor ușilor, care se deschideau astfel.

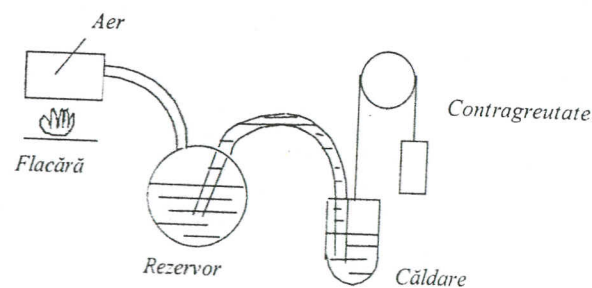


Fig.1.3. Schema sistemului automat al lui Hero de deschidere a ușilor templului

Pentru închidere se stinge focul, aerul se răcește și apa revine în rezervor, căldarea având acum mișcarea inversă, de urcare. Efectul era probabil foarte

spectaculos, mai ales că focul folosit era chiar cel din altar iar sistemul era destinat deschiderii ușilor la sosirea mai-marilor zilei.

Primul sistem de reglare automată în buclă închisă utilizat pe scară largă pare să fi fost regulatorul centrifugal al lui James Watt (1788). Schema sa principială este cea din figura 1.4. Acest regulator a fost intens folosit la mașinile cu abur. El consta în o pereche de bile suspendate pe un ax care se rotește cu viteza mașinii. Datorită forței centrifuge bilele au tendința să se ridice (α scade) atunci când viteza crește. Această mișcare duce la ridicarea unei tije care acționează asupra unui ventil, micșorând viteza mașinii. Considerând variații mici ale unghiului α se pot scrie ușor ecuațiile ce descriu funcționarea acestui regulator, dar analiza lor nu e tocmai ușoară. Printre cei care s-au ocupat de acest subiect de-a lungul timpului s-a aflat și Maxwell.

Încă înainte de al doilea război mondial încep să apară primele studii importante pentru teoria modernă a reglării, cum ar fi [78], care inaugurează cercetările în domeniul servomecanismelor și impune acest termen provenit din *servant* și *mechanism*. De asemenea Nyquist inaugurează în 1932 [82] domeniul analizei în frecvență a sistemelor de reglare automată.

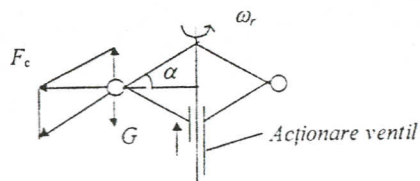


Fig.1.4. Schema simplificată a regulatorului centrifugal al lui James Watt

După război cercetările în domeniu și aplicațiile sistemelor de reglare automată cunosc o adevărată explozie, favorizate de progresele generale ale tehnicii (și favorizându-le la rândul lor). În special progresele electronicii și apariția primelor calculatoare au fost determinante pentru dezvoltarea sistemelor de control. Câteva scurte repere: în 1945 apare lucrarea lui Bode [6] referitoare la domeniul analizei în frecvență, în 1948 Evans prezintă teoria locului rădăcinilor [77]. În anii '60 Kalman și alții se ocupă de problemele filtrării și comenzii optime [79], iar la începutul anilor '70 Luenberger aduce noi contribuții la rezolvarea problemei estimării [81]. Cam în aceeași perioadă savantul român Vasile Mihai Popov, fost profesor la Politehnica din București, își publică

principalele lucrări referitoare la sisteme nelineare, introducând noțiunea de hiperstabilitate [63].

Schema din figura 1.2 este schema generală, de principiu, a oricărui sistem de reglare automată în buclă închisă. Astfel de sisteme sunt capabile de performanțe foarte bune și, datorită cerințelor din ce în ce mai mari impuse de dezvoltarea tehnologică, sunt folosite în majoritatea aplicațiilor.

Scopul principal al cursului este prezentarea principiilor care stau la baza proiectării unui astfel de sistem, pentru că în pofida diversității foarte mari a aplicațiilor, toate sistemele de reglare automată se bazează pe aceleași principii. Pentru a permite o abordare unitară a tuturor acestor aplicații, în prima parte a cursului vor fi prezentate diverse modalități de descriere a sistemelor și vor fi analizate principalele lor proprietăți. Pornind de la aceste rezultate partea a doua va prezenta mai multe metode de sinteză a sistemelor de reglare automată și va analiza performanțele pe care le pot obține astfel de sisteme.

Deși prezintă principiile generale ale teoriei sistemelor și controlului, cursul de față este gândit din prisma aplicațiilor bazate pe folosirea acționărilor electrice. Aceste aplicații sunt deosebit de numeroase la ora actuală. Ele domină piața automatizărilor industriale și se estimează o creștere continuă a numărului lor, tinzându-se ca în viitor toate aceste sisteme să fie cât mai inteligente și să îndeplinească funcții cât mai complexe. Acest lucru este favorizat de adevărata revoluție produsă de dezvoltarea microelectronicii și foarte probabil în curând va fi influențat de explozia telecomunicațiilor care vor duce la comanda de la distanță a proceselor industriale și la crearea de rețele cuprinzând toate sistemele automate dintr-o fabrică și chiar din mai multe fabrici.

Actualmente se apreciază că un bun specialist în sisteme de reglare automată bazate pe acționări electrice trebuie să aibă cunoștințe solide în următoarele domenii: matematică, limbaje de programare (C, assembler) pentru PC și procesoare de semnal, folosirea programelor de proiectare asistată de calculator (Matlab, Mathcad), mașini și acționări electrice și, firește în teoria sistemelor și controlului.

De aceea cursul de față folosește cunoștințele de matematică dobândite în anii I și II, în special cele de algebră liniară, funcții complexe și transformări integrale. În același timp, cursul se leagă direct cu discipline ce vor fi studiate în anii următori, cum ar fi mașinile și acționările electrice, sisteme cu microprocesoare. De asemenea la ședințele de laborator se urmărește

familiarizarea studenților cu folosirea principalelor programe de proiectare asistată de calculator.

1.2 Definirea noțiunii de sistem dinamic

În acest paragraf vom introduce noțiunea de sistem dinamic. Pentru început să precizăm ce se înțelege prin noțiunea de *semnal*.

Definiție: Se numește *semnal continuu* o aplicație $x: R \rightarrow M$, unde $M \subset R$ este mulțimea valorilor pe care le poate lua semnalul.
Se numește *semnal discret* o aplicație $x: Z \rightarrow M$, cu $M \subset R$.
Se numește *semnal numeric (digital)* o aplicație $x: Z \rightarrow M$, cu $M \subset Z$.

Așadar un semnal continuu este definit pe un suport continuu și ia valori de asemenea într-o mulțime continuă. În această clasă intră majoritatea semnalelor întâlnite, reprezentate ca funcții de timp, cum ar fi tensiunea de la rețeaua de alimentare casnică, sau viteza unui automobil aflat în mișcare pe o șosea. De exemplu, în primul caz semnalul poate fi aproximat ca fiind:

$$v(t) = 220\sqrt{2} \cos(100\pi t + \varphi_0) \quad (1.2)$$

și are reprezentarea din figura 1.5.

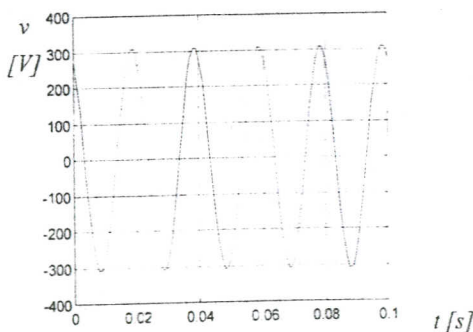


Fig. 1.5. Exemplu de semnal continuu: tensiunea de la rețeaua de alimentare casnică

Semnalele discrete nu mai sunt definite pe un suport continuu, ci pe unul discret, cu alte cuvinte, dacă sunt reprezentate ca funcții de timp acesta nu poate lua decât valori discrete, în mulțimea numerelor întregi cu semn. Astfel de semnale apar în special în cazul sistemelor numerice de control, în care diverse semnale continue sunt citite și prelucrate la un interval de timp fix, de exemplu la fiecare milisecundă. Dacă realizăm o astfel de citire în cazul tensiunii de la rețea obținem un semnal discret, care se poate scrie în funcție de *numărul citirii* astfel:

$$v_d(n) = 220\sqrt{2} \cos(100\pi \cdot 0.001n + \varphi_0) = 220\sqrt{2} \cos(0.1\pi n + \varphi_0) \quad (1.3)$$

unde: $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

Graficul acestui semnal este redat în figura 1.6., pentru $n > 0$. Evident, ca și în cazul semnalelor continue momentul zero are un caracter arbitrar, putând fi asociat oricărui moment. În acest caz am asociat $n=0$ începutului citirii.

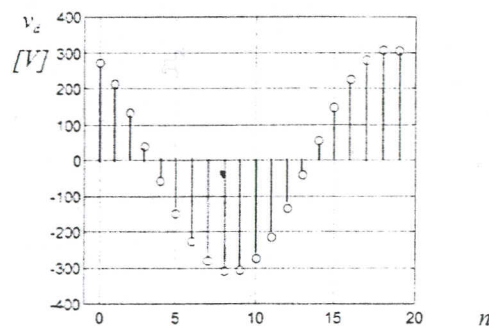


Fig. 1.6. Exemplu de semnal discret: semnal obținut prin citirea la intervale de 1ms a semnalului continuu din figura 1.5. Reprezentarea este făcută în funcție de numărul citirii.

Valorile pe care le ia semnalul aparțin unui interval din R , deci sunt continue. De altfel ele sunt exact valorile semnalului neted în momentele citirii:

$$v(0.001 * n) = v_d(n) \quad (1.4)$$

Asupra acestor aspecte ce apar la citirea unui semnal continuu de către un sistem numeric de calcul, prin intermediul unui convertor special vom reveni în capitolul 3. Să remarcăm deocamdată doar faptul că operația prezentată mai sus

este un caz ideal, în realitate convertorul și sistemul numeric neputând să reprezinte și să opereze cu valori continue.

În realitate reprezentarea se face cu numere întregi, legătura între aceste numere și valorile din gama de reprezentare a semnalului continuu fiind dată de o *constantă de scalare*, proprie sistemului. Apare în acest fel, prin trunchiere sau prin rotunjire, un semnal numeric, acesta fiind cel cu care operează sistemul numeric.

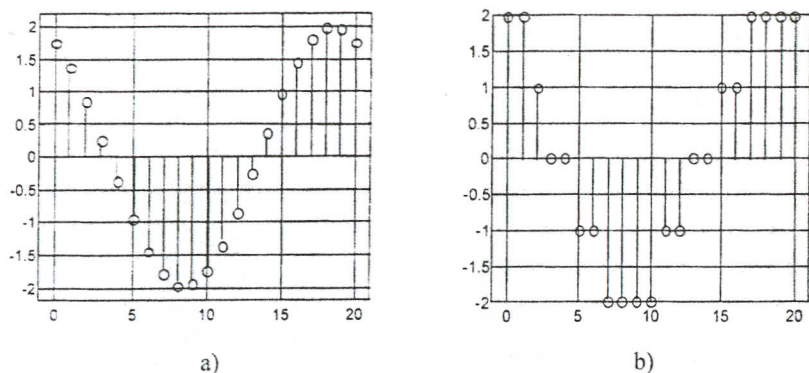


Fig.1.7. Un semnal discret și semnalul numeric obținut din acesta prin rotunjire.

De exemplu, pentru semnalul de mai sus să considerăm că această constantă de scalare ar avea valoarea:

$$k_{scal} = 156 V \quad (1.5)$$

Dacă împărțim semnalul discret de mai sus la această constantă obținem semnalul discret din figura 1.7.a. Dacă rotunjim valorile acestui semnal la cel mai apropiat întreg, se obține semnalul numeric din figura 1.7.b. Așadar un semnal numeric poate lua doar valori discrete (numere întregi) la momente de timp discrete.

Putem acum defini noțiunea de sistem cu timp continuu și respectiv discret.

Definiție: Se numește *sistem (dinamic) cu timp continuu* (sau *sistem neted*) perechea de funcții (f, g) cu semnificația:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(t, x, u, v) \\ y = g(t, x, u) \end{cases} \quad (1.6)$$

în care $t \in \mathbb{R}$ iar x, u, v, y sunt semnale continue, numite astfel:

$x \in \mathbb{R}^n$ - starea sistemului

$u \in \mathbb{R}^m$ - intrarea sistemului

$v \in \mathbb{R}^r$ - perturbarea asupra sistemului

$y \in \mathbb{R}^p$ - ieșirea sistemului

Așadar un sistem dinamic neted este alcătuit dintr-un sistem de n ecuații diferențiale și unul algebric, cu p ecuații. Se atrage atenția asupra diferenței dintre noțiunea de sistem definită mai sus (adică sistem de ecuații) și cea tradițională, de grupare de obiecte. Riguros vorbind în sensul teoriei sistemelor, în locul noțiunii tradiționale de sistem se folosește cea de *proces*, sistemul fiind descrierea matematică a procesului. În multe lucrări însă noțiunea de sistem se folosește cu dublu sens, atât ca sistem fizic cât și ca descrierea sa prin ecuații matematice.

Definiție: Se numește *sistem (dinamic) cu timp discret* (sau *sistem discret*) perechea de funcții (f, g) cu semnificația:

$$\begin{cases} x(t+1) = f(t, x, u, v) \\ y = g(t, x, u) \end{cases} \quad (1.7)$$

în care $t \in \mathbb{Z}$ iar x, u, v, y sunt semnale discrete, cu aceeași semnificație:

$x \in \mathbb{R}^n$ - starea sistemului

$u \in \mathbb{R}^m$ - intrarea sistemului

$v \in \mathbb{R}^r$ - perturbarea asupra sistemului

$y \in \mathbb{R}^p$ - ieșirea sistemului

În cazul sistemelor discrete, în locul ecuațiilor diferențiale apar așa numitele *ecuații cu diferențe*. Acest lucru apare firesc dacă ne amintim definiția derivatei unui semnal continuu:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \delta t) - x(t)}{\delta t} \quad (1.8)$$

și ținem cont că pentru semnalele discrete $\delta t = 1$. Cu această înlocuire se observă că ecuația diferențială se transformă într-o ecuație cu diferențe.

Se poate vedea imediat că în definiția de mai sus semnalele pot fi atât discrete, cât și digitale, singura diferență fiind, așa cum am văzut, eroarea de trunchiere care apare la reprezentarea semnalelor numerice. În cele ce urmează vom considera doar cazul semnalelor discrete.

Pentru o scriere compactă a ecuațiilor, atunci când nu contează dacă sistemul este neted sau discret introducem notația:

$$x' = \begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} & \text{pentru } t \in R \\ x(t+1) & \text{pentru } t \in Z \end{cases} \quad (1.9)$$

ecuațiile putându-se scrie acum:

$$\begin{cases} x' = f(t, x, u, v) \\ y = g(t, x, u) \end{cases} \quad (1.10)$$

Un sistem dinamic se poate reprezenta grafic ca în figura 1.8.a, în care se evidențiază legăturile sale cu exteriorul, fără să se precizeze și descrierea sa. Aceasta poate fi făcută de exemplu ca în figura 1.8.b.

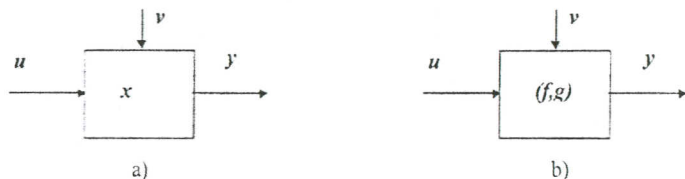


Fig.1.8. Exemple de reprezentare grafică a unui sistem dinamic

1.3 Clasificarea sistemelor dinamice

Clasificarea sistemelor se poate face, desigur după mai multe criterii. În continuare le vom considera pe cele mai importante.

- în primul rând, așa cum am văzut în paragraful anterior, în funcție de tipul semnale care compun ecuațiile sistemului, acesta este:
 - *neted*, sau
 - *discret*
- după cum funcțiile (f, g) depind sau nu *explicit* de timp, sistemele sunt:
 - *variabile în timp*, când $f \equiv f(t, x, u, v)$ și/ sau $g \equiv g(t, x, u)$, respectiv
 - *invariante*, când $f \equiv f(x, u, v)$ și $g \equiv g(x, u)$.

Sistemele invariante au proprietatea că dacă pleacă din aceleași condiții inițiale și li se aplică aceleași mărimi externe u și v , evoluția stării este aceeași, indiferent de momentul de timp la care se produce experimentul. Acest lucru este ilustrat în figura 1.9.

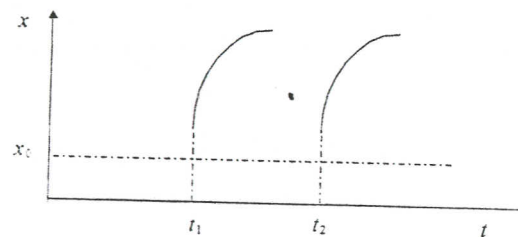


Fig.1.9. Evoluția stării unui sistem invariant este aceeași când condițiile inițiale și mărimile externe sunt aceleași.

- după cum funcțiile (f, g) sunt sau nu liniare în x, u, v, y , sistemele sunt:
 - *liniare*, când ambele funcții sunt liniare, sau
 - *neliniare*, când cel puțin una este neliniară.

Un sistem invariant liniar va avea așadar ambele funcții liniare în x, u, v, y , deci va fi de forma:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu + Ev \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (1.11)$$

în care A, B, C, D, E sunt matrice de dimensiuni corespunzătoare (astfel încât să se poată realiza operațiile de înmulțire și adunare):

$$A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times m}, C \in R^{p \times n}, D \in R^{p \times m}, E \in R^{n \times r}$$

- după cum parametrii care apar în funcțiile (f, g) sunt sau nu variabili în timp, sistemele sunt:

- cu parametrii constanți, sau
- cu parametrii variabili.

În ultimul caz parametrii pot depinde fie explicit de timp, fie într-un mod indirect. Exemplele ce vor fi discutate în paragraful 1.5 vor clarifica mult mai bine aceste noțiuni.

1.4 Structuri particulare de sisteme dinamice

Pornind de la forma generală a unui sistem dinamic liniar, dată de ecuațiile 1.11, se pot evidenția câteva structuri particulare, care se vor dovedi folositoare atât pentru analiza proprietăților sistemelor, cât și în proiectarea sistemelor de reglare automată.

În primul rând să observăm că atât intrarea cât și perturbația sunt mărimi care acționează din exterior asupra sistemului, diferența între ele fiind aceea că intrarea poate fi ușor controlată într-un sistem de reglare automată, în timp ce perturbația este complet independentă. De exemplu, în cazul unui automobil care se deplasează pe o șosea, atât forța dezvoltată de motor, cât și forțele date de frecarea cu solul, de înclinarea șoselei, sau de vânt acționează simultan și modifică viteza automobilului. Desigur, doar prima este cea care poate fi controlată într-un sistem de reglare a vitezei (fie el automat sau prin acțiune umană), celelalte fiind perturbații, asupra cărora nu avem nici o influență. Similar, în cazul unui motor de c.c., starea este determinată atât de tensiunea aplicată la bornele motorului cât și de cuplul dat de sarcină. Și în acest caz putem face aceeași distincție între aceste două mărimi.

Dacă însă am imagina un sistem de reglare a vitezei motorului în care să avem acces atât asupra tensiunii cât și asupra cuplului care acționează din exterior asupra axului mașinii, această deosebire ar dispărea. Același lucru se întâmplă de asemenea dacă pur și simplu ne interesează felul în care se comportă

sistemul ca urmare a acțiunii mărimilor externe, fără a face nici o distincție între felul acestora. În aceste cazuri vom grupa vectorii u și v în unul singur, prima ecuație din 1.11 devenind:

$$x' = Ax + Bu + Ev = Ax + [B \ E] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = Ax + Bu \quad (1.12)$$

și deci sistemul se poate scrie:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (1.13)$$

Un alt caz particular interesant este acela în care asupra sistemului acționează o singură mărime externă, iar ieșirea este de asemenea una singură. În acest caz, atât u cât și y sunt scalari, iar matricele B, C și D sunt vectori, ecuațiile devenind:

$$\begin{cases} x' = Ax + bu \\ y = c^T x + du \end{cases} \quad (1.14)$$

$$\text{cu } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in R^{n \times 1} \rightarrow b, C = [c_1 \ \dots \ c_n] \in R^{1 \times n} \rightarrow c^T \text{ și } d \text{ scalar.}$$

Astfel de sisteme se numesc sisteme cu o *intrare și o ieșire* și se abreviază *SISO* (din limba engleză). Similar, toate sistemele care nu sunt de acest tip sunt cu intrări și/ sau ieșiri multiple, și se abreviază *MIMO*.

Se observă că toate sistemele liniare sunt precizate complet dacă se cunosc matricele A, B, C și D , astfel încât un sistem liniar dat se poate scrie prescurtat:

$$(A, B, C, D), \text{ sau } (A, b, c^T, d)$$

De asemenea, deoarece de multe ori matricea D este nulă, sau pur și simplu când nu interesează efectul direct al intrărilor asupra ieșirilor, se va scrie:

$$(A, B, C), \text{ sau } (A, b, c^T).$$

1.5 Modelarea proceselor - considerații generale

În acest paragraf vom discuta câteva aspecte generale legate de felul în care se pot obține ecuațiile unui sistem dinamic, urmând ca pe parcursul cărții să revenim cu o analiză mai amănunțită.

Așadar trebuie ca pentru un anumit proces (fizic, tehnologic, etc.) să obținem o descriere matematică de tipul general dat în ecuația 1.6, deci de tipul unui sistem dinamic. Operația de obținere a ecuațiilor sistemului ce descrie un proces dat se numește **modelarea procesului**.

Există două modalități de a realiza acest lucru:

- ecuațiile sistemului se obțin din ecuațiile fizice ce se pot scrie pentru procesul respectiv;
- ecuațiile sistemului se obțin în urma unor experimente, din analiza ieșirii y și a intrării u care a provocat-o. Această operație se numește **identificare**.

Oricare din aceste două posibilități este folosită, scopul este același: obținerea unui model care să fie folosit în proiectarea unui sistem de reglare automată a procesului respectiv. De aceea modelul trebuie să satisfacă două cerințe, de multe ori contradictorii: pe de o parte să descrie cât mai precis procesul respectiv, pentru a obține o reglare cât mai performantă, iar pe de altă parte să fie cât mai simplu, pentru a face mai ușoară proiectarea și realizarea sistemului de control.

Exemplu: să se găsească un model pentru circuitul RLC serie prezentat în figura 1.10, pe baza căruia să se poată proiecta un sistem de reglare automată a curentului prin circuit (sau a tensiunii de încărcare a condensatorului).

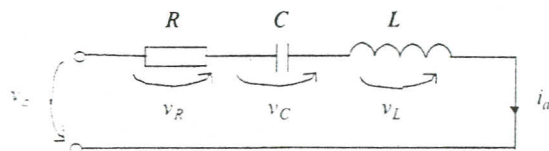


Fig.1.10. Schema electrică a unui circuit RLC serie

Considerăm un circuit RLC la bornele căruia se aplică o tensiune v_a , curentul care rezultă fiind notat i_a . Deoarece pentru un astfel de circuit se pot scrie foarte ușor ecuațiile date de legile lui Kirchhoff, vom folosi primul procedeu de modelare. Evident, forma finală sub care trebuie aduse aceste ecuații este cea dată de ecuația 1.6., deci ne interesează să separăm în partea stângă toate derivatele care apar. Putem scrie:

$$v_a = v_R + v_L + v_C \quad (1.15)$$

$$\text{unde: } v_R = Ri_a, \quad v_L = L \frac{di_a}{dt}, \quad v_C = \frac{1}{C} \int i_a dt$$

Se observă că prima derivată căutată este cea a curentului. Expresia tensiunii pe condensator nu este folositoare în această formă scopului nostru, deoarece conține o integrală. Dacă o derivăm însă, obținem:

$$i_a = C \frac{dv_C}{dt} \quad (1.16)$$

Se observă că starea sistemului are două componente: tensiunea pe condensator și curentul prin circuit, deoarece ele sunt singurele care apar derivate. Ecuațiile se pot ușor aranja în forma:

$$\begin{cases} v_a = Ri_a + L \frac{di_a}{dt} + v_C \\ \frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} i_a \end{cases} \quad (1.17)$$

și imediat apoi:

$$\begin{cases} \frac{di_a}{dt} = \frac{R}{L} i_a + \frac{1}{L} v_C - \frac{1}{L} v_a \\ \frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} i_a \end{cases} \quad (1.18)$$

Acest sistem de ecuații diferențiale este exact de forma $\dot{x} = f(t, x, u, v)$, în care:

$$x = \begin{bmatrix} i_a \\ v_C \end{bmatrix}, \quad u = v_a, \quad v = 0$$

Mai mult, se vede că funcția f este chiar liniară în raport cu aceste variabile, deci am obținut chiar un sistem liniar:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Ev \quad (1.19)$$

unde:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix},$$

iar E este nedefinită, deoarece nu există nici o perturbare v .

În ceea ce privește ecuațiile algebrice ce descriu ieșirea sistemului, ele depind evident de cine sunt componentele vectorului y , cu alte cuvinte ce anume se măsoară. De exemplu, dacă se măsoară curentul i_a , vom scrie:

$$y = i_a = C \cdot x + D \cdot u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot x \quad (1.20)$$

cu alte cuvinte: $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ iar $D = 0$.

Dacă însă se măsoară atât curentul i_a , cât și tensiunea pe condensator:

$$y = \begin{bmatrix} i_a \\ v_c \end{bmatrix} = C \cdot x + D \cdot u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x \quad (1.21)$$

adică: $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ iar $D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

De asemenea am putea măsura căderea de tensiune pe rezistor și cea pe bobină, adică v_R și v_L . Aceasta din urmă se poate exprima în funcție de componentele vectorului de stare astfel:

$$v_L = v_a - Ri_a - v_c \quad (1.22)$$

și deci:

$$y = \begin{bmatrix} v_R \\ v_L \end{bmatrix} = C \cdot x + D \cdot u = \begin{bmatrix} R & 0 \\ -R & -1 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \quad (1.23)$$

adică: $C = \begin{bmatrix} R & 0 \\ -R & -1 \end{bmatrix}$ iar $D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Se observă că dimensiunile matricelor C și D diferă în funcție de numărul de ieșiri considerate. În sfârșit, trebuie spus că numărul ieșirilor poate fi mai mare decât numărul stărilor sistemului, chiar dacă această situație este mai rar întâlnită în practică. De exemplu, pentru sistemul de mai sus se puteau măsura simultan curentul i_c , tensiunea pe condensator v_c și fluxul bobinei.

Dacă în bucla formată de circuit se induce (datorită unui câmp electromagnetic exterior, variabil în timp) o tensiune v_{ext} , ea reprezintă o perturbare asupra sistemului, deoarece în sistemul de reglare automată a curentului (sau tensiunii de încărcare a condensatorului), v_{ext} nu poate fi (cel mai probabil) controlată. În acest caz este ușor de observat că ea apare în ecuațiile de mai sus ca însumându-se cu v_a , și deci:

$$E = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad v = v_{ext}$$

Desigur, dacă și această tensiune este controlată (de sistemul de reglare automată), sau dacă pur și simplu nu interesează distincția între comandă și perturbare, ambele fiind privite ca intrări în sistem, putem scrie:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} v_a \\ v_{ext} \end{bmatrix}, \quad v = 0, \quad E \text{ nedefinită.}$$

Altă observație este că pornind de la aceleași ecuații fizice, matricele A , B , C și D pot avea expresii diferite, depinzând de ordinea în care se consideră componentele vectorilor de stare și de ieșire. În exemplul de mai sus puteam scrie întâi ecuația tensiunii pe condensator, adică puteam alege:

$$x = \begin{bmatrix} v_c \\ i_a \end{bmatrix}$$

și am fi obținut matricele A și B cu liniile permutate. Cu alte cuvinte, am fi obținut același sistem, dar scris în alt sistem de coordonate. Vom reveni asupra acestui lucru în capitolul 2.

Ecuatiile 1.19...1.23 sunt acelea ale unui sistem liniar și invariant. Parametrii sistemului pot fi constanți, sau variabili. Firește că în realitate rezistența crește odată cu încălzirea datorată pierderilor Joule, așadar R este un parametru variabil. Pentru a simplifica ecuațiile sistemului, această variație va fi însă ignorată, atâta timp cât precizia nu va avea de suferit. Valoarea R va trebui însă să fie considerată ca variabilă dacă se dorește controlul curentului cu o precizie foarte ridicată și dacă ponderea rezistenței este mare comparativ cu reactanțele X_L și X_C .

De asemenea, în realitate bobina se poate satura atunci când curentul care o parcurge crește peste o anumită valoare. În acest caz căderea de tensiune pe bobină nu mai are expresia de mai sus, ci devine:

$$v_L = \frac{d\phi_L}{dt} = \frac{dL(i_a)i_a}{dt} \quad (1.24)$$

cu alte cuvinte sistemul este nelinear. Din nou se va încerca să se ignore acest lucru, pentru a păstra sistemul liniar. Chiar dacă acest lucru nu e direct posibil, se poate încerca, în funcție de cerințele impuse sistemului de reglare automată, limitarea curentului i_a , astfel încât saturația să fie evitată. Aceste eforturi de a păstra sistemul liniar sunt justificate, așa cum se va vedea, de faptul că este mult mai ușor de lucrat cu un model liniar pentru construirea unui sistem de reglare automată. Să considerăm în continuare un alt exemplu.

Exemplu: să se găsească un model pentru motorul de c.c. cu excitație separată, în scopul proiectării unui sistem de reglare automată a vitezei.

Așa cum se cunoaște de la cursul de Mașini Electrice, și cum spus deja în treacăt și în primul paragraf, ecuațiile unui astfel de motor sunt:

$$v_a = Ri_a + L \frac{di_a}{dt} + k\omega_r, \quad (1.25)$$

$$J \frac{d\omega_r}{dt} = m - m_s = k i_a - m_s$$

unde V_a este tensiunea de alimentare, i_a este curentul care trece prin rotor, ω_r este viteza rotorului, iar k o constantă, depinzând de construcția mașinii și de curentul statoric. Cuplul mașinii este notat m , iar cel pe care îl opune sarcina m_s . R și L sunt rezistența și respectiv inductivitatea rotorului, iar J este momentul total de inerție al motorului și sarcinii. Schema unui astfel de motor este cea din figura 1.11, unde e_a reprezintă tensiunea contra-electromotoare, sau căderea de tensiune pe rotorul ideal, datorată rotirii acestuia, respectiv termenul $k\omega_r$ în ec. 1.25.

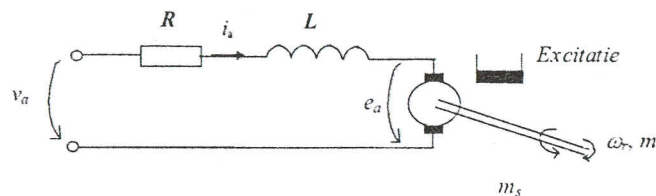


Fig 1.11. Schema motorului de c.c. cu excitație independentă

Procedând întocmai ca și în exemplul precedent obținem următoarele ecuații ale sistemului:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{\omega}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{k}{L} \\ \frac{k}{J} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot v_a + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \cdot m_s \quad (1.26)$$

Similar sistemul este liniar, cu parametrii constanți, atâta timp cât se poate neglija variația rezistenței rotorice și saturația circuitului magnetic rotoric. De asemenea, trebuie remarcat că pentru obținerea acestui model simplu, și de altfel foarte eficient pentru proiectarea sistemelor de control, s-au folosit o serie întreagă de ipoteze simplificatoare¹. Acestea permit simplificarea considerabilă a ecuațiilor, fără a se pierde însă mult în ceea ce privește acuratețea modelului, toate fenomenele importante fiind bine descrise.

Uzual, în cazul sistemelor de acționări cu motoare de c.c. se măsoară atât viteza, cât și curentul², astfel încât ecuațiile de ieșire sunt:

¹) V. cursul de Mașini electrice

²) Acest lucru va fi explicat în cadrul cursului de Acționări Electrice

$$y = \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_r \end{bmatrix} = C \cdot x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_r \end{bmatrix}$$

și deci matricele sistemului sunt:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{k}{L} \\ \frac{k}{J} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ iar } D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

Și în acest caz am considerat că inductivitatea rotorică nu se saturează, astfel încât sistemul să rezulte liniar. Din nou, parametrii vor fi considerați constanți ori de câte ori acest lucru este posibil (în majoritatea aplicațiilor uzuale adică, atunci când variația lor este mică). O excepție este de exemplu cazul unui ascensor de mare capacitate, în care momentul de inerție total variază în limite largi în funcție de numărul de persoane din cabină (adică de masa cabinei). O problemă interesantă care apare este așadar până la ce limită a variației parametrilor putem lucra cu un model invariant, și respectiv când trebuie considerați parametrii variabili (și în consecință se va proiecta un regulator special, de exemplu unul care să se schimbe în funcție de variația parametrilor).

În primul caz regulatorul are o structură fixă și trebuie să atenueze efectele variațiilor parametrilor asupra performanțelor sistemului de reglare, fără a "bănuși" această variație, în timp ce în al doilea regulatorul va trebui să se schimbe în funcție de variația (măsurată sau dedusă) a parametrilor. Răspunsul nu este foarte simplu, deocamdată trebuie reținută doar ideea că în cazurile în care parametrii variază puțin este preferabil din toate punctele de vedere să se lucreze cu modele invariante.

O observație interesantă este aceea că sistemele ce descriu circuitul RLC serie și respectiv motorul de c.c. cu excitație independentă au exact aceeași formă, diferind doar valorile parametrilor (adică ale coeficienților matricelor). Așadar, toate concluziile pe care le vom trage referitoare la proprietățile unuia din aceste sisteme, și la felul în care se poate proiecta un sistem de reglare automată, vor fi valabile pentru ambele cazuri. Mai mult, putem înțelege cum de este posibilă găsirea unor metode generale de proiectare a unor sisteme de reglare automată pentru procese atât de diverse, cum sunt cele prezentate în paragraful 1.1: procesele sunt diverse, dar modelele lor sunt, în foarte multe cazuri, asemănătoare. Chiar dacă această asemănare nu este perfectă, ca în cazurile

analizate mai sus, totuși simplul fapt că sunt liniare, este suficient pentru a permite tratarea lor generală, indiferent de valorile parametrilor și de semnificația lor fizică.

În exemplele de mai sus componentele vectorului de stare x nu sunt întâmplătoare, ci au o semnificație fizică foarte precisă: în toate cazurile ecuațiile provin din ecuațiile unui bilanț energetic de forma:

$$\frac{dW}{dt} = \sum_i P_i \quad (1.28)$$

adică variația energiei unui element care înmagazinează energie se regăsește în suma puterilor care intră, ies, sau se consumă. Acest lucru poate fi înțeles foarte simplu pentru un circuit RL serie, din a cărui ecuație:

$$v_a = Ri_a + L \frac{di_a}{dt} \quad (1.29)$$

se obține, prin înmulțirea cu i_a a ambilor membri:

$$v_a i_a = Ri_a + Li_a \frac{di_a}{dt} = Ri_a + L \frac{di_a^2}{dt} \quad (1.30)$$

adică: $P_a = P_R + \frac{dW_L}{dt}$.

Așadar, puterea primită din exterior este egală cu suma puterii disipată pe rezistență și a variației energiei înmagazinată în bobină. Așadar, în acest caz curentul este variabilă de stare pentru că în circuit există o bobină, care este un element ce înmagazinează energie, iar această energie depinde de curent. Similar, dacă există un condensator înseamnă că tensiunea la bornele lui va fi una din componentele stării, iar dacă există un corp în mișcare de rotație (corpul având desigur un moment de inerție) viteza sa de rotație va fi de asemenea componentă a stării. Această legătură între energia înmagazinată de diverse elemente și variabilele de stare care apar datorită lor este dată în tabelul 1.1.

Așadar, simpla examinare a elementelor existente în procesul ce trebuie modelat ne indică ce variabile de stare vor fi în sistemul rezultat în urma modelării.

Element	Energia înmagazinată	Variabilă de stare
condensator, cu capacitatea C	$C \frac{v_c^2}{2}$	tensiunea v_c
bobină, cu inductanța L	$L \frac{i_L^2}{2}$	curentul i_L
solid, cu masa m , în mișcare de translație	$m \frac{v^2}{2}$	viteza liniară v
solid, cu momentul de inerție J , în mișcare de rotație	$J \frac{\omega^2}{2}$	viteza de rotație ω
resort, cu constanta (rigiditatea) k	$k \frac{x^2}{2}$	deplasamentul x

Tab.1.1. Energia înmagazinată de diferite elemente electrice sau mecanice și variabilele de stare care apar în sistemele ce conțin aceste elemente

Trebuie însă remarcat că aceste elemente nu sunt neapărat singurele, și de asemenea, că s-ar putea ca forma cea mai simplă a sistemului să nu le conțină pe toate. Două scurte exemple vor clarifica aceste afirmații.

Exemplu: să considerăm un motor de c.c. folosit într-un sistem de reglare automată a poziției. În acest caz una din mărimile măsurate trebuie să fie poziția unghiulară a rotorului, ceea ce implică, pentru scrierea ecuației ieșirii, ca poziția să fie aleasă ca variabilă suplimentară de stare. Ecuațiile devin:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{\omega}_r \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{k}{L} & 0 \\ \frac{k}{J} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_r \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot v_a \quad (1.31)$$

$$y = \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_r \\ \theta \end{bmatrix} = C \cdot x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_r \\ \theta \end{bmatrix}$$

Se observă așadar că în acest caz una din variabilele de stare este poziția θ , mărime a cărei prezență nu poate fi explicată pe baze energetice, ca apărând

dintr-o ecuație introdusă suplimentar la setul de ecuații diferențiale ce descriu procesul din punct de vedere energetic.

Exemplu: să se modeleze circuitul din figura 1.12.

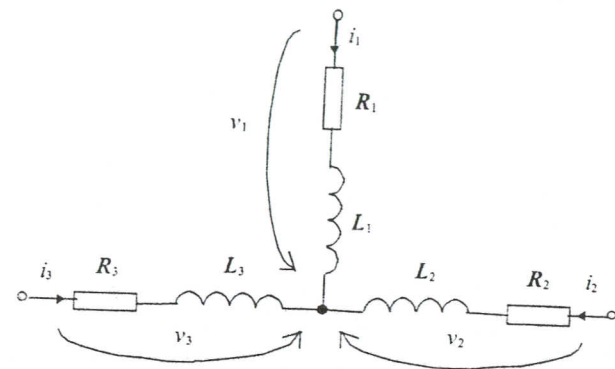


Fig.1.12. Circuit RL în conexiune stea

În acest caz circuitul are trei bobine și conform interpretării energetice vor fi trei variabile de stare, curenții i_1, i_2, i_3 . Acest lucru se confirmă ușor scriind cele trei ecuații diferențiale pentru cele trei ramuri ale circuitului:

$$v_k = Ri_k + L_k \frac{di_k}{dt}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.32)$$

Aceasta ar conduce la un sistem cu trei ecuații, respectiv cu trei variabile de stare. Însă, deoarece cele trei variabile nu sunt *liniar independente*, între ele existând desigur relația:

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0 \quad (1.33)$$

înseamnă că putem renunța la una din ecuații, respectiva variabilă de stare putând fi determinată în orice moment din celelalte două, conform relației de mai sus. În concluzie, pentru a păstra dimensiunea sistemului minimă, nu se vor alege ca variabile de stare decât cele care sunt liniar independente.

2 DESCRIEREA SISTEMELOR LINIARE

2.1 Descrierea în spațiul stărilor. Evoluția stării

Ecuatiile din definiția noțiunii de sistem, așa cum a fost dată în paragraful 1.2 (v. ec. 1.6, 1.7, 1.10 și ec. 1.11) reprezintă o descriere în spațiul stărilor a sistemului:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \dot{y} = Cx + Du \end{cases} \quad (2.1)$$

deoarece prin rezolvarea ecuațiilor diferențiale se obține chiar vectorul de stare x al sistemului. Așa cum s-a precizat în paragraful 1.5 starea unui sistem care modelează un anumit proces are, în general, o justificare fizică precisă, rezultată din considerente energetice.

Definiție: Se numește *spațiul stărilor* spațiul n - dimensional care are ca bază vectorul de stare x ($x \in R^n$).

Se numește *evoluția (traietoria) stării* curba definită în spațiul stărilor de variația lui x în timp.

Faptul că vectorul de stare x este o bază în spațiul stărilor (adică un sistem de coordonate pentru acest spațiu) cere, așa cum am văzut deja în paragraful 1.5, ca stările să fie *liniar independente*.

Dacă se cunosc *condițiile inițiale* ale stărilor x_0 și intrarea $u(t)$ se poate determina, prin rezolvarea ecuațiilor 2.1 valoarea ieșirilor și a stărilor (evoluția stării) la orice moment.

2.1.1 Cazul sistemelor netede

Teoremă: Soluția ecuației diferențiale vectoriale (a sistemului de ecuații):

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.2)$$

cu condiția inițială $x(0) = x_0$ este:

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

Demonstrație:

Să considerăm pentru început ecuația omogenă ($u=0$):

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{cu } x(0) = x_0 \quad (2.4)$$

pe care să o rezolvăm prin metoda aproximațiilor succesive. Aceasta înseamnă să scriem următoarele aproximații ale soluției $x(t)$:

$$\begin{aligned} x^0(t) &= x_0 \\ x^1(t) &= x^0(0) + \int_0^t Ax^0(\tau) d\tau = x_0 + Ax_0 t = (I + At)x_0 \\ x^2(t) &= x^0(0) + \int_0^t Ax^1(\tau) d\tau = x_0 + \int_0^t A(I + A\tau)x_0 d\tau = x_0 + Ax_0 t + \frac{A^2 t^2}{2!} x_0 = \\ &= (I + At + \frac{A^2 t^2}{2!})x_0 \\ &\vdots \\ x^k(t) &= x^0(0) + \int_0^t Ax^{k-1}(\tau) d\tau = x_0 + \int_0^t A(I + At + \dots + \frac{A^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!})x_0 d\tau = \\ &= (I + At + \dots + \frac{A^k t^k}{k!})x_0 \end{aligned}$$

Prin definiție, matricea către care converge seria de mai sus se numește *exponențiala matricei At* :

$$e^{At} = I + At + \dots + \frac{A^k t^k}{k!} + \dots \quad (2.5)$$

Rezultă atunci că soluția ecuației vectoriale omogene dată de ecuația 2.4 se poate scrie:

$$x_1(t) = e^{At} x_0 \quad (2.6)$$

În continuare se poate rezolva ecuația neomogenă (ec. 2.2), cu condiții inițiale nule. Pentru aceasta, pornind de la 2.6 se caută o soluție de forma:

$$x_f(t) = e^{At}c(t) \quad (2.7)$$

Înlocuind-o în 2.2 se obține:

$$Ae^{At}c(t) + e^{At} \frac{dc(t)}{dt} = Ae^{At}c(t) + Bu(t)$$

și deci:

$$\frac{dc(t)}{dt} = (e^{At})^{-1} Bu(t) = e^{-At} Bu(t)$$

în care s-a folosit o proprietate a exponențialei matriceale ce va fi discutată în cele ce urmează.

Prin integrare, ținând cont de faptul că am considerat condiții inițiale nule și apoi prin înlocuirea în ec. 2.7 rezultă:

$$x_f(t) = e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (2.8)$$

În concluzie, soluția ecuației 2.2 este suma soluțiilor date de relațiile 2.6 și 2.8:

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (2.9)$$

Așadar evoluția stării unui sistem liniar este dată de suprapunerea *evoluției libere*, datorată exclusiv condițiilor inițiale $x_l(t)$, și a *evoluției forțate*, datorată exclusiv intrărilor $x_f(t)$. O denumire echivalentă este aceea de *regim liber* și respectiv *forțat*. Această suprapunere a efectelor este desigur o proprietate ce derivă direct din liniaritatea sistemului. În cazul sistemelor neliniare lucrurile sunt mai complicate, de exemplu, pentru ecuația (considerată pentru simplificarea expunerii scalare):

$$\dot{x} = xu,$$

cu condiția inițială x_0 , soluția se poate obține ușor scriind:

$$dx = xudt$$

$$\frac{dx}{x} = udt$$

$$x(t) = x_0 e^{\int_0^t u(\tau) d\tau}$$

dar nu se poate vorbi de un regim liber și unul forțat. Dacă am fi încercat să aplicăm metoda de mai sus, ceea ce desigur este incorect, am fi obținut ecuațiile:

$$\dot{x} = 0, \text{ cu } x(0) = x_0$$

$$\dot{x} = xu, \text{ cu } x(0) = 0$$

soluțiile lor fiind:

$$x(t) = x_0 \quad x(t) = 0$$

iar suma lor este complet diferită de soluția adevărată.

Să enunțăm acum câteva din proprietățile cele mai importante și mai utile ale exponențialei matricei e^{At} , definită de relația 2.5:

$$1. (\forall) A \in R^{n \times n} \Rightarrow (\exists) e^{At}, e^{At} \in R^{n \times n}$$

$$2. \mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI_n - A)^{-1}, \quad e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI_n - A)^{-1}\}$$

$$3. e^{At} \Big|_{t=0} = I_n$$

$$4. \text{ dacă } A_1 A_2 = A_2 A_1 \Rightarrow e^{A_1 t} e^{A_2 t} = e^{(A_1 + A_2)t}$$

$$\text{cu consecința directă: } (e^{At})^T = e^{-At} \quad (2.10)$$

$$5. \frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A$$

$$6. \text{ dacă } A \text{ este nesingulară: } \int_0^t e^{A\tau} d\tau = e^{At} A^{-1} - A^{-1}$$

$$7. \text{ pentru } (\forall) T \text{ nesingulară: } e^{TAT^{-1}t} = T e^{At} T^{-1}$$

Majoritatea proprietăților de mai sus reies imediat din relația de definiție a exponențialei matriceale (2.5) și demonstrația lor este lăsată ca exercițiu pentru cititor ($\mathcal{L}$ reprezintă simbolul pentru transformata Laplace (v. Anexa II)).

Se observă că atât prin relația de definiție (2.5) cât și prin toate proprietățile sale, exponențiala matriceală este o generalizare a exponențialei scalare. O diferență notabilă este restricția din proprietatea 4.

Acest lucru ne permite să afirmăm că soluția unui sistem liniar de ecuații diferențiale (dată de relația 2.9) este o generalizare directă a soluției unei singure ecuații diferențiale.

Faptul că exponențiala unei matrice oarecare este inversabilă (consecința proprietății 4) ne conduce la o concluzie importantă referitoare la posibilitatea determinării condiției inițiale a sistemului. Astfel, din 2.9 rezultă imediat:

$$x_0 = e^{-At} x - e^{-At} \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu d\tau = e^{-At} x - \int_0^t e^{-A\tau} Bu d\tau$$

și deci starea inițială se poate determina în orice moment al evoluției dacă se cunoaște starea sistemului (x) în acel moment și variația intrării u pe intervalul de timp $[0, t]$. Se spune atunci că orice sistem neted este *reversibil*.

2.1.2 Cazul sistemelor discrete

Teoremă: Soluția ecuației vectoriale cu diferențe (a sistemului de ecuații):

$$x(t+1) = Ax + Bu, \quad (2.11)$$

cu condiția inițială $x(0) = x_0$ este:

$$x(t) = A^t x_0 + \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} Bu(\tau) \quad (2.12)$$

Demonstrație

Relația 2.12 se poate verifica imediat, prin inducție. Se scrie succesiv:

$$\begin{aligned} x(1) &= Ax(0) + Bu(0) = Ax_0 + Bu(0) \\ x(2) &= Ax(1) + Bu(1) = A^2 x_0 + ABu(0) + Bu(1) \\ &\vdots \\ x(k-1) &= A^{k-1} x_0 + \sum_{\tau=0}^{k-2} A^{k-\tau-2} Bu(\tau) \\ x(k) &= Ax(k-1) + Bu(k-1) = A^k x_0 + \sum_{\tau=0}^{k-1} A^{k-\tau-1} Bu(\tau) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Din nou se evidențiază un regim liber, ce depinde doar de condițiile inițiale și un regim forțat, datorat exclusiv intrării:

$$x_f(t) = A^t x_0 \quad x_f(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} Bu(\tau)$$

Pentru a determina starea inițială a unui sistem discret dacă se cunoaște starea x într-un moment oarecare t și variația intrării u pe intervalul $[0, t]$ se scrie:

$$A^t x_0(t) = x(t) - \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} Bu(\tau) \Rightarrow x_0(t) = A^{-t} x(t) - \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{-t-\tau-1} Bu(\tau)$$

în care s-a ținut cont de faptul că:

$$(A^t)^{-1} = A^{-t}$$

Această matrice există însă doar dacă există A^{-1} , deoarece: $A^{-t} = (A^{-1})^t$ și în concluzie starea inițială a unui sistem discret se poate determina din starea x într-un moment oarecare t și variația intrării u până în acel moment, numai dacă matricea A este nesingulară. Acest lucru constituie o diferență între sistemele netede și cele discrete, deoarece, așa cum am văzut primele permit necondiționat acest lucru.

Matricea A^t , cu $t \in \mathbb{Z}$ are următoarele proprietăți:

1. $\mathcal{Z}\{A^t\} = z(zI_n - A)^{-1}$, $A^t = \mathcal{Z}^{-1}\{z(zI_n - A)^{-1}\}$
2. dacă $A_1 A_2 = A_2 A_1 \Rightarrow A_1^t A_2^t = (A_1 A_2)^t$ (2.14)

cu consecința directă: $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

3. pentru $(\forall) T$ nesingulară: $(TAT^{-1})^t = TA^t T^{-1}$

(cu $\mathcal{Z}$ am simbolizat transformata Z a unei funcții – v. Anexa IV).

Relațiile care descriu evoluțiile stării unui sistem liniar neted și respectiv discret se pot scrie sub o formă care să scoată în evidență asemănările dintre ele, dacă se notează:

$$\Phi(t) = \begin{cases} e^{At}, & t \in \mathbb{R} \\ A^t, & t \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (2.15)$$

Matricea $\Phi(t)$ se numește *matrice fundamentală* a sistemului. Cu această notație ecuațiile 2.3 și respectiv 2.12 devin:

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau, & t \in \mathbb{R} \\ x(t) &= \Phi(t)x_0 + \sum_{\tau=0}^{t-1} \Phi(t-\tau-1)Bu(\tau), & t \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (2.16)$$

și se observă că ele sunt foarte asemănătoare, deoarece suma din a doua relație poate fi privită ca o aproximare în cazul discret a integralei din prima. Similar, putem scrie:

$$\begin{aligned} x_0 &= \Phi(-t)x(t) - \int_0^t \Phi(-\tau)Bu(\tau)d\tau & t \in \mathbb{R} \\ x_0 &= \Phi(-t)x(t) - \sum_{\tau=0}^{t-1} \Phi(-\tau-1)Bu(\tau) & t \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

cu deosebirea că a doua relație este valabilă numai dacă A este nesară. În fine, se observă și faptul că unele din proprietățile matricei fundamentale în cele două forme sunt foarte asemănătoare.

2.1.3 Calculul analitic al evoluției stării sistemelor liniare

Determinarea evoluției stării unui sistem liniar neted sau discret se poate face analitic, cu ajutorul relațiilor 2.3 sau 2.12, sau numeric, cu ajutorul unor programe de calcul. Calculul numeric are avantaje certe, în special în ceea ce privește rapiditatea și posibilitatea de a opera cu sisteme de dimensiune foarte mare și este studiat în detaliu în cadrul ședințelor de laborator. Calculul analitic, făcut de obicei doar pentru sistemele de dimensiune mică permite înțelegerea mai bună a procesului respectiv, și a modului în care diverși parametri fizici influențează evoluția stării.

Pentru calcularea analitică a evoluției stării este necesară în primul rând evaluarea matricei fundamentale a sistemului respectiv.

2.1.3.1 Evaluarea matricei fundamentale a sistemelor netede

Pentru sistemele netede evaluarea matricei fundamentale înseamnă, conform relației 2.16, calculul unei exponențiale matriceale. Există două modalități principale pentru efectuarea acestui calcul: utilizând proprietățile 2 sau 7 din relațiile 2.10.

Pașii algoritmului ce folosește proprietatea 2 sunt:

- determinarea matricei: $(sI_n - A) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$;
- determinarea inversei acestei matrice: $(sI_n - A)^{-1}$;

Formula folosită uzual este: $(sI_n - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI_n - A)} (sI_n - A)^*$,

determinantul și adjuncta obținându-se prin aplicarea regulilor cunoscute.

- calculul transformatei Laplace inverse a matricei găsite la pasul anterior. Acesta se face prin unul din cele două procedee (calculul reziduurilor sau descompunerea în fracții simple) prezentate în Anexa II, aplicate fiecărui element al matricei.

Pașii algoritmului ce folosește proprietatea 7 sunt:

- aducerea matricei A la o formă diagonală (dacă e posibil), sau la o formă canonică Jordan, printr-o transformare de coordonate $\hat{A} = TAT^{-1}$;
- calculul, mult mai simplu, al exponențialei acestei matrice:
 - dacă $\hat{A}$ e diagonală:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow e^{\hat{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix};$$

- dacă $\hat{A}$ e o formă canonică Jordan:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{bmatrix}, \text{ cu } A_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$$

$$\Rightarrow e^{\hat{A}t} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{A_k t} \end{bmatrix}, \text{ unde: } e^{A_i t} = \begin{bmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & t \\ & & & 1 \end{bmatrix};$$

- obținerea matricei căutate:

$$e^{\hat{A}t} = e^{TAT^{-1}} = Te^{At}T^{-1} \Rightarrow e^{At} = T^{-1}e^{\hat{A}t}T$$

2.1.3.2 Evaluarea matricei fundamentale a sistemelor discrete

Similar, matricea fundamentală, care acum este, conform relației 2.15 matricea A ridicată la o putere întreagă se calculează folosind proprietățile 1 sau 3 din 2.15.

Pașii algoritmului ce folosește proprietatea 1 sunt identici cu cei prezentați în cazul sistemelor netede, cu deosebirea că acum matricea inversată depinde de variabila z , iar transformata $\mathcal{Z}$ inversă se calculează din: $z(zI_n - A)^{-1}$.

La fel, al doilea algoritm este similar cu cel din cazul sistemelor netede, dar acum se calculează:

$$\hat{A}^t = \begin{bmatrix} \lambda_1^t & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^t \end{bmatrix}$$

sau:
$$\hat{A}^t = \begin{bmatrix} A_1^t & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k^t \end{bmatrix}, \text{ cu } A_i^t = \begin{bmatrix} \lambda_i^t & * & * & * \\ & \ddots & & * \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_i^t \end{bmatrix},$$

celelalte elemente de deasupra diagonalei fiind coeficienții binomului $(\lambda_i + I)^t$, în ordinea descrescătoare a puterilor. Dacă e cazul linia respectivă se completează cu zerouri, respectiv, în caz de depășire, se renunță la ultimii coeficienți.

Exemplu: Să calculăm evoluția stării sistemului ce descrie un circuit RL serie. Ecuația acestui circuit (1.29) poate fi ușor pusă sub forma unei ecuații de stare:

$$\frac{di_a}{dt} = -\frac{R}{L}i_a + \frac{1}{L}v_a$$

în care intrare este tensiunea de alimentare v_a iar starea este i_a .

Evoluția ei este firește descrisă de relația 2.3. Deoarece A este în acest caz un scalar evaluarea acestei relații este foarte simplă:

$$x(t) \equiv i_a(t) = e^{-\frac{R}{L}t}i_0 + \int_0^t e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)} \frac{1}{L}v_a(\tau)d\tau$$

Dacă tensiunea de alimentare este o treaptă de valoare U se obține:

$$i_a(t) = e^{-\frac{R}{L}t}i_0 + \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

iar componentele de regim liber și respectiv forțat sunt:

$$i_{al}(t) = e^{-\frac{R}{L}t}i_0 \quad i_{af}(t) = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

În figura 2.1 sunt prezentate evoluțiile celor două componente, precum și suma lor (adică evoluția stării) pentru cazul în care $U=10$ V, $R=1$ Ω , $L=0.01$ H iar $i_0 = 5$ A.

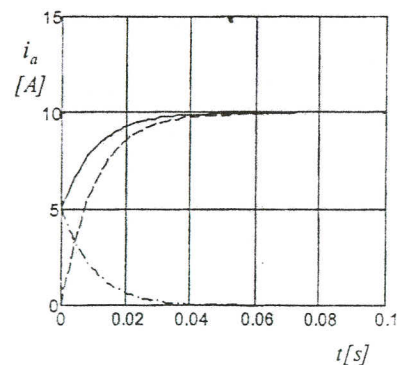


Fig.2.1. Evoluția stării (linie continuă) precum și a componentelor liberă (linie punctată) și forțată (linie întreruptă) pentru un circuit RL serie, la intrare treaptă de tensiune.

Se observă că în acest caz componenta de regim liber devine practic zero după un timp de circa 40 ms, adică după patru constante de timp ($\tau = \frac{L}{R} = 10$ ms) iar cea de regim forțat atinge, după același interval, o valoare constantă. Acest

lucru este desigur bine știut, dar trebuie să observăm că nu întotdeauna lucrurile stau așa. Astfel, dacă în ecuația sistemului ar fi fost, în loc de termenul $-\frac{R}{L}$, care este tot timpul negativ, un termen pozitiv, atât componenta liberă cât și cea forțată ar fi tins către infinit. Vom reveni asupra acestui lucru când vom discuta despre stabilitatea sistemelor.

Exemplu: Să calculăm acum evoluția stării sistemului ce descrie un motor de c.c. cu excitație independentă. Ecuația acestui sistem este dată de relația 1.26. Desigur, dacă în această relație am separat tensiunea de alimentare (considerată ca putând fi mărime de comandă) de cuplul de sarcină (necontrolabil, deci perturbăție), acum este firesc să le considerăm pe ambele drept intrări, ambele influențând firește evoluția stării. De aceea este convenabil să scriem, folosind notațiile din 1.26:

$$u = \begin{bmatrix} v_a \\ m_s \end{bmatrix} \quad B_{n \times u} = \begin{bmatrix} B & E \end{bmatrix}^{n \times u}$$

Vom determina matricea fundamentală prin primul procedeu, scriind succesiv:

$$(sI_n - A) = \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & \frac{k}{L} \\ -\frac{k}{J} & s \end{bmatrix}$$

$$(sI_n - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{k^2}{LJ}} \begin{bmatrix} s & -\frac{k}{L} \\ \frac{k}{J} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{(sI_n - A)^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{k^2}{LJ}} & \frac{-\frac{k}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{k^2}{LJ}} \\ \frac{\frac{k}{J}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{k^2}{LJ}} & \frac{s + \frac{R}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{k^2}{LJ}} \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{k^2}{LJ}} \right\} & \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{-\frac{k}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{k^2}{LJ}} \right\} \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{\frac{k}{J}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{k^2}{LJ}} \right\} & \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s + \frac{R}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{k^2}{LJ}} \right\} \end{bmatrix}$$

În calculul acestor transformate inverse ne vom folosi de următoarele relații (v. Anexa II):

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad \mathcal{L}\{e^{qt} f(t)\} = F(s - q)$$

Numitorul se va scrie atunci sub forma:

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{k^2}{LJ} = \left(s + \frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{R^2}{4L^2} + \frac{k^2}{LJ} = \left(s + \frac{R}{2L}\right)^2 + \omega^2$$

unde am presupus că parametrii motorului respectă relația:

$$\frac{R^2}{4L^2} < \frac{k^2}{LJ} \quad (2.17)$$

$$\text{și am notat: } -\frac{R^2}{4L^2} + \frac{k^2}{LJ} = \omega^2 \quad (2.18)$$

Dacă relația 2.17 nu este îndeplinită rădăcinile determinantului vor fi reale și nu complex conjugate, iar transformata Laplace inversă va avea cu totul altă formă. Acest caz este lăsat ca exercițiu pentru cititor.

Dacă însă relația este satisfăcută, matricea fundamentală a sistemului va fi:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{R}{2L}t} \left(\cos \omega t - \frac{R}{2L\omega} \sin \omega t \right) & -\frac{k}{L\omega} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega t \\ \frac{k}{J\omega} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega t & e^{-\frac{R}{2L}t} \left(\cos \omega t + \frac{R}{2L\omega} \sin \omega t \right) \end{bmatrix}$$

Răspunsul liber se obține imediat:

$$x_i(t) = e^{At} x_0 = \begin{bmatrix} i_{a0} e^{-\frac{R}{2L}t} \left(\cos \omega t - \frac{R}{2L\omega} \sin \omega t \right) - \omega_{r0} \frac{k}{L\omega} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega t \\ i_{a0} \frac{k}{J\omega} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega t + \omega_{r0} e^{-\frac{R}{2L}t} \left(\cos \omega t + \frac{R}{2L\omega} \sin \omega t \right) \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

și, prin calcule mai laborioase se poate obține și răspunsul forțat, cu ajutorul expresiei:

$$x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u d\tau = \int_0^t e^{A\tau} d\tau B u = \int_0^t e^{A\tau} d\tau \begin{bmatrix} \frac{1}{L} V_a \\ -\frac{M_s}{J} \end{bmatrix}$$

în care am considerat cazul în care ambele intrări sunt constante și am folosit relația:

$$\int_0^t e^{A(t-\tau)} d\tau = \int_0^t e^{A\tau_1} d\tau_1, \quad \tau_1 = t - \tau$$

Se observă că fiecare componentă depinde atât de tensiunea aplicată la borne cât și de cuplul de sarcină. Pentru simplificarea calculelor vom considera însă separat efectele datorate celor două intrări. Deoarece sistemul este liniar putem aplica principiul superpoziției, iar ulterior vom obține răspunsul forțat total ca fiind suma răspunsurilor forțate datorate tensiunii și respectiv cuplului de sarcină. În evaluarea termenilor integralei matricei fundamentale sunt utile formulele:

$$\int e^{qt} \cos \omega t dt = \frac{e^{qt}}{q^2 + \omega^2} (q \cos \omega t + \omega \sin \omega t)$$

$$\int e^{qt} \sin \omega t dt = \frac{e^{qt}}{q^2 + \omega^2} (q \sin \omega t - \omega \cos \omega t)$$

formule care se obțin ușor calculând $\int e^{qt} \cos \omega t dt + j \int e^{qt} \sin \omega t dt$ și separând apoi partea reală și cea imaginară.

Efectuând calculele, și păstrând notația:

$$q = -\frac{R}{2L} \quad (2.20)$$

se găsesc următoarele formule ce arată dependența răspunsului forțat de tensiunea de alimentare:

$$i_{afv}(t) = \frac{V_a}{L} \frac{1}{\omega} e^{qt} \sin \omega t \quad (2.21)$$

$$\omega_{rfv}(t) = V_a \frac{k}{LJ} \frac{1}{q^2 + \omega^2} \left(1 + \frac{e^{qt}}{\omega} q \sin \omega t - \frac{e^{qt}}{\omega} \omega \cos \omega t \right) = \quad (2.22)$$

$$= V_a \frac{k}{LJ} \left(\frac{1}{q^2 + \omega^2} - \frac{e^{qt}}{\omega \sqrt{q^2 + \omega^2}} \sin(\omega t + \varphi) \right)$$

$$\text{unde: } \cos \varphi = -\frac{q}{\sqrt{q^2 + \omega^2}} \quad \text{și} \quad \sin \varphi = \frac{\omega}{\sqrt{q^2 + \omega^2}}$$

Cu aceste formule putem reprezenta grafic răspunsul liber și respectiv forțat, datorat tensiunii V_a . În figura 2.2 sunt prezentate aceste răspunsuri pentru următorul set de parametri: $R=1\Omega$, $L=0.01$ H, $J=0.02$ kgm² $k=2$ Vs⁻¹ condițiile inițiale fiind: $i_{a0}=10$ A și respectiv $\omega_{r0}=50$ rad s⁻¹ iar treapta de tensiune aplicată având valoarea $V_a=50$ V.

Similar se poate calcula și răspunsul forțat datorat cuplului de sarcină M_s . Se obțin următoarele relații:

$$i_{afm}(t) = M_s \frac{k}{JL} \left(\frac{1}{q^2 + \omega^2} - \frac{e^{qt} \sin(\omega t + \varphi)}{\omega \sqrt{q^2 + \omega^2}} \right) \quad (2.23)$$

$$\omega_{rfm}(t) = \frac{M_s}{J} \left(\frac{2q}{q^2 + \omega^2} + \frac{e^{qt}}{\omega} \sin(\omega t + 2\varphi) \right) \quad (2.24)$$

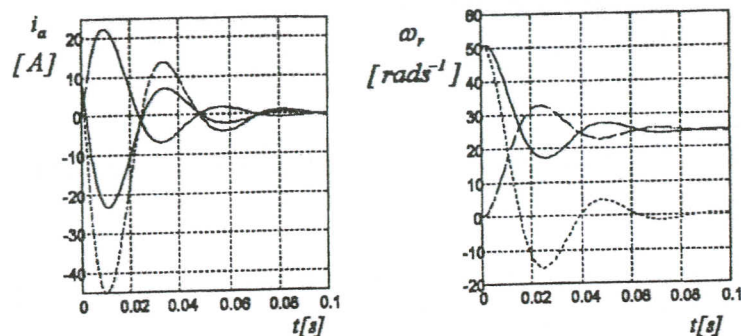


Fig. 2.2. Evoluția componentelor stării (linie continuă) precum și răspunsul liber (linie punctată) și forțat (linie întreruptă) pentru un motor de c.c., la intrare treaptă de tensiune.

În figura 2.3 sunt prezentate răspunsul forțat datorat unui cuplu de sarcină de 20 Nm, împreună cu același răspuns liber.

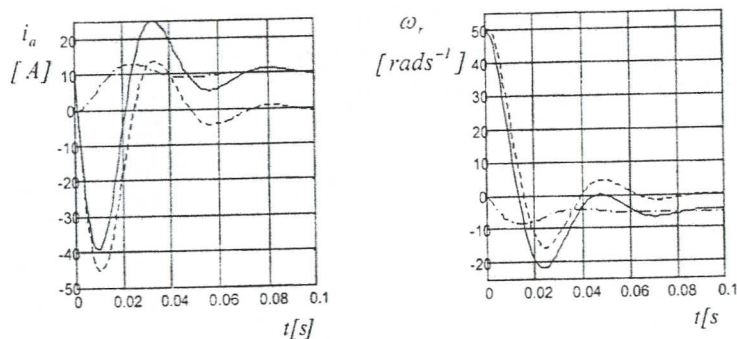


Fig. 2.3. Evoluția componentelor stării (linie continuă) precum și răspunsul liber (linie punctată) și forțat (linie întreruptă) pentru un motor de c.c., la intrare treaptă de cuplu de sarcină

Analiza acestor formule ne permite să tragem câteva concluzii importante. În primul rând, să observăm că toate răspunsurile au o formă oscilant-amortizată. Oscilațiile au pulsația ω dată de relația 2.18 și ele se datorează faptului că am presupus îndeplinită condiția 2.17. Amortizarea oscilațiilor depinde de factorul q (relația 2.20): cu cât acest factor este mai mare, cu atât amortizarea este mai rapidă

Analiza acestor formule ne permite de asemenea să regăsim câteva concluzii referitoare la funcționarea motorului de c.c. cu excitație independentă. Astfel, se vede că aplicarea bruscă a unei tensiuni continue la borne duce la pornirea motorului, valoarea la care se stabilizează turația fiind direct proporțională cu tensiunea aplicată, dacă nu există cuplu de sarcină (v. 2.22). Factorul de proporționalitate se găsește, după câteva calcule simple, ca fiind $1/k$, lucru care se vede cu ușurință și în ecuațiile motorului (1.26). Când se aplică și un cuplu de sarcină, turația va scăde (puțin) față de această valoare proporțională.

De asemenea se observă că, la aplicarea unei tensiuni apare un curent prin circuitul rotor, curent care există doar când motorul accelerează și dispare în momentul în care viteza se stabilizează. Acest curent produce cuplul care face ca mașina să accelereze.

Când însă cuplul de sarcină este diferit de zero, curentul prin mașină este diferit de zero, chiar după ce turația s-a stabilit. Valoarea finală a acestui curent se găsește, pornind de la relația 2.23, ca fiind M_s/k , ceea ce se observă și în ecuațiile motorului (1.26), punând condiția de anulare a derivatei vitezei.

În fine, se observă că regimul liber al ambelor componente ale stării tinde către zero. Stingerea componentelor libere se produce după același timp ca și stabilizarea componentelor forțate, anume circa: $\frac{4}{-q} = 4 \frac{2L}{R}$, ceea ce pentru datele considerate corespunde la 0.08 s. Aceasta înseamnă printre altele că timpul în care pornește un motor de c.c. prin conectare directă la rețea nu depinde direct de momentul de inerție, deci de dimensiunea (și puterea) motorului, ci doar de constanta de timp electrică (a circuitului rotor).

Cu toate acestea, motoarele mari au un timp de pornire mare, deoarece au o inductivitate mare (datorită numărului de spire mai mare, pentru a da un cuplu mai mare) și o rezistență mai mică (datorită secțiunii mai mari a conductoarelor, cerută de curentul mai mare) decât cele mici.

2.2 Comportarea intrare-ieșire

Așa cum s-a văzut în capitolul 1, un sistem liniar, ca orice sistem dinamic se poate reprezenta grafic în modul următor, evidențiindu-se legăturile sale cu exteriorul:

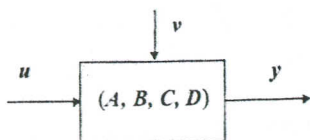


Fig.2.4. Reprezentarea grafică a unui sistem dinamic linear

O problemă firească rezultând din această reprezentare este aceea a determinării unei legături directe între ieșirea y a sistemului și intrarea u care o produce. Desigur că în acest caz nu vom face distincție între comandă și perturbație, ci vom folosi termenul general de intrare (1.12). Concluziile pe care le vom obține vor fi valabile așadar, în egală măsură, pentru amândouă.

Să considerăm că la momentul $t=0$ se aplică la intrarea sistemului un semnal u . În capitolul 2.1 am văzut că evoluția stării unui sistem linear are două componente, una liberă și alta forțată. Deoarece între starea și ieșirea unui astfel de sistem există o legătură lineară (dată de 1.12) rezultă că, atunci când intrarea nu acționează *direct* asupra ieșirii (adică atunci când $D = 0$), și ieșirea va avea o componentă liberă y_l și alta forțată y_f :

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t) = Cx_l(t) + Cx_f(t)$$

prima depinzând exclusiv de starea inițială. Rezultă că influența intrării asupra ieșirii este dată de următoarele relații:

$$y_f(t) = C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u d\tau \quad \text{pentru sistemele netede} \quad (2.25)$$

$$y_f(t) = C \sum_{\tau=0}^{t-1} \Phi(t-\tau-1) B u(\tau) \quad \text{pentru cele discrete.}$$

Dacă introducem funcția:

$$h_c(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ C e^{At} B & t \geq 0 \end{cases} \quad \text{pentru sistemele netede} \quad (2.26)$$

$$h_c(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ C A^{t-1} B & t > 0 \end{cases} \quad \text{pentru cele discrete}$$

putem scrie componenta forțată a ieșirii sub forma:

$$y_f(t) = \int_0^t h_c(t-\tau) u(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h_c(t-\tau) u(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h_c(\tau) u(t-\tau) d\tau \quad (2.27)$$

$$y_f(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} h_c(t-\tau) u(\tau) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} h_c(t-\tau) u(\tau) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} h_c(\tau) u(t-\tau)$$

În obținerea relațiilor de mai sus s-a folosit faptul că $h_c(\tau)$ este nulă pentru τ negativ și la fel este și intrarea u , care se aplică începând cu momentul zero, de aceea se poate considera că τ variază între plus și minus infinit.

Așadar, pentru ambele tipuri de sisteme rezultă că ieșirea forțată este produsul de convoluție între intrare și funcția h_c :

$$y_f(t) = (h_c * u)(t) \quad (\forall) t \geq 0, \quad t \in \mathbb{R} \text{ sau } t \in \mathbb{Z} \quad (2.28)$$

Desigur, t trebuie să fie pozitiv pentru că, intrarea aplicându-se la momentul zero, ieșirea forțată se definește numai începând din acel moment.

Se constată că dacă pe toate componentele intrării sistemului se aplică un impuls, ieșirea forțată va fi, conform proprietății cunoscute a produsului de convoluție:

$$y_f(t) = h_c(t) \quad (\forall) t \geq 0, \quad t \in \mathbb{R} \text{ sau } t \in \mathbb{Z}$$

Din această cauză funcția h_c se numește *răspunsul causal la impuls* al sistemului (vezi Figura 2.5, în care pentru simplificare s-a reprezentat cazul unui sistem în care intrarea și ieșirea au o singură componentă - SISO).

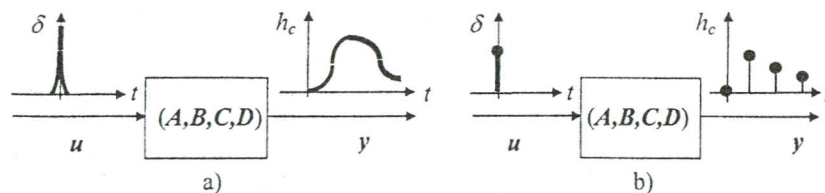


Fig.2.5. Răspunsul causal la impuls $h_c(t)$ al unui sistem linear neted a), respectiv discret b), este ieșirea forțată a sistemului când la intrare se aplică un impuls (continuu, respectiv discret).

Faptul că acest semnal este cauzal se verifică imediat, deoarece din relația de definiție el este nul pentru orice moment de timp premergător aplicării intrării (adică pentru $t < 0$). Dacă nu ar fi așa, ieșirea sistemului la un moment oarecare t ar depinde de valorile intrării u la $\tau > t$.

În concluzie, componenta forțată a ieșirii unui sistem linear depinde de intrarea aplicată și de funcția $h_c(t)$, funcție determinată de matricele A , B și C . Componenta liberă a ieșirii depinde de evoluția liberă a stării sistemului (deci de condiția inițială a stării și de matricea A și de matricea C). Deoarece intrarea nu influențează această componentă, este normal ca matricea B să nu apară în expresia ei. În cazul în care există o dependență directă intrare-ieșire (adică $D \neq 0$) la componenta forțată a ieșirii se adaugă termenul Du .

2.3 Descrierea prin funcții (matrici) de transfer

Așadar, dacă pentru un sistem linear se cunoaște răspunsul cauzal la impuls $h_c(t)$, se poate calcula ieșirea forțată pentru orice intrare u aplicată sistemului. Aceasta se face prin evaluarea produsului de convoluție între cele două mărimi (cf. ec. 2.28, 2.27). Pentru simplificarea acestei operații se poate folosi una din proprietățile importante ale transformatorilor Laplace și respectiv Z , anume aceea că transformata unui produs de convoluție a două semnale este egală cu produsul algebric al transformatorilor celor două semnale. Așa cum se poate vedea, în ambele cazuri h_c este nulă pentru $t < 0$, și satisface și celelalte condiții cerute pentru existența transformatei respective.

Să calculăm transformata Laplace a răspunsului cauzal la impuls al unui sistem neted, considerat pentru început ca fiind de tip SISO:

$$\mathcal{L}\{h_c(t)\} = \mathcal{L}\{C e^{At} B\} = C \mathcal{L}\{e^{At}\} B = C \int_0^\infty e^{-st} e^{At} dt B = C(sI - A)^{-1} B \quad (2.29)$$

Se observă că, datorită faptului că sistemul este SISO (și deci C are o singură linie, iar B o singură coloană), după efectuarea produsului matriceal se obține o funcție scalară de variabilă complexă s , lucru firesc dacă avem în vedere că în acest caz și h_c este scalar.

Similar, pentru un sistem discret SISO putem calcula transformata Z a lui $h_c(t)$ astfel:

$$\mathcal{Z}\{h_c(t)\} = \mathcal{Z}\{C A^{t-1} B\} = C \mathcal{Z}\{A^{t-1}\} B = z^{-1} C \mathcal{Z}\{A^t\} B = z^{-1} C z(I - A)^{-1} B = C(zI - A)^{-1} B \quad (2.30)$$

În evaluarea celor două transformate s-a ținut cont de proprietățile matricii fundamentale a unui sistem neted și respectiv discret (relațiile 2.10 și 2.14).

Definiție: Se numește *funcție de transfer* asociată sistemului SISO linear (A, B, C, D) funcția de variabilă complexă:

$$H(s) = \mathcal{L}\{h_c(t)\} \text{ pentru } t \in R$$

respectiv:

$$H(z) = \mathcal{Z}\{h_c(t)\} \text{ pentru } t \in Z$$

În cazul sistemelor de tip MIMO răspunsul cauzal la impuls nu va mai fi un scalar, ci o matrice cu numărul de linii egal cu numărul de ieșiri și numărul de coloane egal cu numărul de intrări. Acest lucru se poate vedea imediat dacă se ține cont de dimensiunile matricelor C și B și de relațiile 2.26 și 2.29. Fiecare element al acestei matrice este o funcție de timp. Se obișnuiește ca pentru aceste sisteme să se noteze răspunsul la impuls cu $T_c(t)$. Similar cu cazul sistemelor SISO se introduce următoarea definiție:

Definiție: Se numește *matrice de transfer* asociată sistemului MIMO linear (A, B, C, D) matricea formată din funcții de variabilă complexă:

$$T(s) = \mathcal{L}\{T_c(t)\} \text{ pentru } t \in R$$

respectiv:

$$T(z) = \mathcal{Z}\{T_c(t)\} \text{ pentru } t \in Z$$

După cum am anticipat, cu ajutorul funcției (matricei de transfer) se poate obține imediat transformata Laplace (Z) a componentei forțate a ieșirii sistemului, pentru orice intrare:

$$Y_f(s) = H(s)U(s) \quad \text{pentru sistemele SISO netede,}$$

$$Y_f(z) = H(z)U(z) \quad \text{pentru cele discrete și respectiv:}$$

$$Y_f(s) = T(s)U(s) \quad \text{pentru sistemele MIMO netede,} \quad (2.31)$$

$$Y_f(z) = T(z)U(z) \quad \text{pentru cele discrete.}$$

Formula de calcul a funcției (matricei) de transfer a unui sistem liniar, în funcție de matricele care îl descriu în spațiul stărilor este dată de relația 2.29, pentru sisteme netede și respectiv 2.30 pentru cele discrete. După cum se poate vedea singura diferență între relația de calcul pentru cazul sistemelor netede și respectiv discrete este notația pentru variabila complexă. Se poate scrie atunci compact:

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= C(\lambda I - A)^{-1} B \\ \text{sau} \\ T(\lambda) &= C(\lambda I - A)^{-1} B \end{aligned} \quad (2.32)$$

unde $\lambda \equiv s$ pentru sisteme netede și respectiv $\lambda \equiv z$ pentru cele discrete. Desigur că întrucât funcția de transfer este un caz particular al unei matrice de transfer (care are dimensiunea $l \times l$) am putea folosi o singură notație, anume $T(\lambda)$, dar tradițional acest lucru nu se obișnuiește, deoarece de cele mai multe ori sistemele SISO sunt tratate separat de cele MIMO.

Aceeași formulă se poate obține prin aplicarea transformatei Laplace (respectiv Z) sistemului de ecuații de stare dat de ec. 1.6, 1.7, 1.10, 1.13 (reluat în 2.1), în care, ca peste tot în paragrafele 2.2 și 2.3 considerăm că $D = 0$. Astfel, în cazul sistemelor netede putem scrie:

$$\begin{cases} sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) \end{cases}$$

și întrucât răspunsul forțat este obținut pentru condiții inițiale nule:

$$T(s) = Y_f(s)U^{-1}(s) = CX(s)U^{-1}(s) = C(sI - A)^{-1} B$$

unde $U^{-1}(s)$ denotă așa-numită inversă la dreapta a acestui vector. Pentru sistemele discrete se aplică transformata Z:

$$\begin{cases} zX(z) - zx_0 = AX(z) + BU(z) \\ Y(z) = CX(z) \end{cases}$$

și cu aceeași observație referitoare la condițiile inițiale se obține imediat:

$$T(z) = Y_f(z)U^{-1}(z) = CX(z)U^{-1}(z) = C(zI - A)^{-1} B$$

În fine, pentru cazul general, în care există și o dependență directă a ieșirii de intrare (deci $D \neq 0$) formula de calcul a funcției (matricei) de transfer se obține prin același procedeu ca mai sus. După calcule simple se găsește:

$$T(\lambda) = \frac{CX(\lambda) + DU(\lambda)}{U(\lambda)} = C(\lambda I - A)^{-1} B + D \quad (2.33)$$

În continuare ne propunem să găsim forma generală a dependenței de λ a funcției (matricei) de transfer. Astfel, pentru sistemele SISO în care $D = 0$ și firește $A \in R^{n \times n}$ se obține:

$$H(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1} B = \frac{C(\lambda I - A)^{-1} B}{\det(\lambda I - A)} = \frac{\beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \beta_1\lambda + \beta_0}{\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0} \quad (2.34)$$

în care s-a ținut cont de faptul că cea mai mare putere care poate apare la numărător este, datorită felului în care se calculează adjuncta unei matrice, $n-1$. Așadar, când $D = 0$, atât pentru sisteme netede cât și discrete, funcția de transfer este o fracție având la numărător un polinom de ordin maximum $n-1$ (se poate ca β_{n-1} , și nu numai, să fie 0), iar la numitor un polinom de ordin n , și întotdeauna cu $\alpha_n = 1$. Coeficienții α_i și β_i depind firește de elementele matricelor A , B și C .

Pentru sistemele SISO în care $D \neq 0$ (deci $D \equiv d$, cf. ec. 1.11) rezultă imediat:

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= C(\lambda I - A)^{-1} B + d = \\ &= \frac{\beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \beta_1\lambda + \beta_0}{\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0} + d = \frac{d\lambda^n + \gamma_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \gamma_1\lambda + \gamma_0}{\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0} \end{aligned} \quad (2.35)$$

și deci în acest caz ordinul numărătorului este egal cu al numitorului, iar coeficientul lui λ^n este chiar d . În ambele cazuri ordinul numitorului este chiar dimensiunea matricei A .

Pentru a înțelege structura matricei de transfer a unui sistem linar MIMO trebuie să observăm mai întâi că pentru un astfel de sistem dacă partiționăm matricea C pe linii și respectiv B pe coloane:

$$\begin{cases} \dot{x}' = Ax + Bu = Ax + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \\ y' = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} = Cx = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix} x \end{cases}$$

fiecare coloană b_j a lui B înmulțește semnalul care se aplică pe intrarea j a sistemului, iar fiecare linie c_i a lui C dă (prin înmulțirea cu x) componenta i a ieșirii sistemului.

Calculând matricea de transfer a sistemului:

$$\begin{aligned} T(\lambda) &= C(\lambda I - A)^{-1} B = \frac{C(\lambda I - A)^* B}{\det(\lambda I - A)} = \\ &= \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix} \frac{(\lambda I - A)^*}{\det(\lambda I - A)} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} c_1 \frac{(\lambda I - A)^*}{\det(\lambda I - A)} b_1 & \dots & c_1 \frac{(\lambda I - A)^*}{\det(\lambda I - A)} b_m \\ \vdots & & \vdots \\ c_p \frac{(\lambda I - A)^*}{\det(\lambda I - A)} b_1 & \dots & c_p \frac{(\lambda I - A)^*}{\det(\lambda I - A)} b_m \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ H_{p1} & \dots & H_{pm} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.36)$$

se observă că fiecare element H_{ij} al ei este chiar funcția de transfer calculată pentru intrarea j și ieșirea i . Așadar matricea de transfer este o matrice formată din funcțiile de transfer calculate pentru fiecare combinație posibilă de intrări - ieșiri. Acest lucru se poate verifica ușor și pentru cazul general, în care $D \neq 0$. În consecință este evident că fiecare element al său va fi o fracție având exact forma 2.34, respectiv 2.35. Se vede de asemenea că matricea de transfer are numărul de coloane egal cu numărul de intrări în sistem iar numărul de linii egal cu numărul ieșirilor sistemului.

În fine, să observăm că dacă în relațiile 2.34 și 2.35 numitorul și numărătorul au rădăcini comune funcția de transfer se poate reduce la o formă în care evident ordinul fiecăruia din cele două polinoame va fi mai mic decât cel menționat în respectivele relații. Vom vorbi în consecință de forma inițială și respectiv de forma ireductibilă a funcției de transfer. Aceasta din urmă este exact ca cea dată de relațiile 2.34 și 2.35, în care însă se înlocuiește n cu $n_m < n$.

Exemplu: Să se obțină funcția de transfer a motorului de c.c. cu excitație independentă.

Descrierea în spațiul stărilor a acestui sistem este dată de ec. 1.26. Vom considera pentru început cazul în care intrarea este tensiunea aplicată rotorului, iar ieșirea viteza sa. Aplicând formula 2.30 obținem:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{\Omega_f(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & \frac{k}{L} \\ -\frac{k}{J} & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -\frac{k}{L} \\ \frac{k}{J} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{k^2}{LJ}} = \frac{\frac{k}{LJ}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{k^2}{LJ}} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Se observă, așa cum era de așteptat, că ordinul numitorului este 2. În acest caz funcția de transfer nu este reductibilă.

Considerând alte combinații posibile de intrări - ieșiri (v. paragraful 1.5) funcțiile respective de transfer se obțin practic cu aceleași calcule (diferă doar matricele C și B , deci înmulțirile matriceale, adică ultimele din calculele de mai

sus). Astfel, pentru cazul în care intrarea este aceeași, dar considerăm ca ieșire curentul rotoric, se obține imediat:

$$H(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B = [1 \ 0] \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & \frac{k}{L} \\ -\frac{k}{J} & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{[1 \ 0] \begin{bmatrix} s & -\frac{k}{L} \\ \frac{k}{J} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{k^2}{LJ}} = \frac{\frac{s}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{k^2}{LJ}} \quad (2.38)$$

Dacă pentru același sistem considerăm ca intrări atât tensiunea rotorică, cât și cuplul de sarcină, iar ca ieșiri turația și curentul rotoric, ecuațiile sistemului sunt date de relația 1.27. Deoarece în acest moment nu ne interesează să facem distincție între caracterul celor două intrări, matricele B și E se vor uni în:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix}$$

Se poate obține atunci matricea de transfer a sistemului:

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & \frac{k}{L} \\ -\frac{k}{J} & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -\frac{k}{L} \\ \frac{k}{J} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{k^2}{LJ}} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{s}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{k^2}{LJ}} & \frac{\frac{k}{LJ}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{k^2}{LJ}} \\ \frac{\frac{k}{LJ}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{k^2}{LJ}} & -\frac{\left(s + \frac{R}{L}\right)\frac{1}{J}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{k^2}{LJ}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} H_{i,v_a} & H_{i,m_s} \\ H_{\omega,v_a} & H_{\omega,m_s} \end{bmatrix}$$

Se observă că elementele ei sunt, din nou previzibil, chiar funcțiile de transfer corespunzătoare, în ordine, fiecărei combinații de intrări-ieșiri.

2.4 Realizări. Echivalența sistemelor. Forme canonice

După cum am arătat în paragrafele anterioare (2.1 și 2.3), un sistem liniar poate fi descris atât prin ecuațiile de stare, cât și prin funcția (matricea) de transfer. Dacă se cunosc ecuațiile de stare, funcția (respectiv matricea) de transfer se obține din acestea cu ajutorul relațiilor 2.35 și respectiv 2.33. Problema inversă este obținerea ecuațiilor de stare din funcția de transfer.

2.4.1 Realizări

Definiție: Se numește *realizare* a funcției de transfer $H(\lambda)$ orice sistem liniar – evident SISO – (A, B, C, D) pentru care:

$$C(\lambda I - A)^{-1}B + D = H(\lambda)$$

Să considerăm pentru început cazul în care $H(\lambda)$ este o rațională strict proprie, adică ordinul numărătorului este mai mic strict decât al numitorului. Conform celor arătate în subcapitolul anterior (relația 2.35) rezultă că în acest caz $D = 0$. Matricele A, B și C sunt date de următoarele teoreme:

Teoremă: O realizare a funcției de transfer (rațională strict proprie)

$$H(\lambda) = \frac{\beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \beta_1\lambda + \beta_0}{\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0}$$

este cea numită *standard controlabilă*:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$C = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_{n-1}]$$

în care matricea A este matrice de tip *companion*.

Demonstrație: Pentru tripletul de mai sus putem scrie:

$$(\lambda I - A) \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \lambda + \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \chi(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \chi(\lambda) = B \chi(\lambda)$$

unde $\chi(\lambda)$ este polinomul caracteristic al matricei A :

$$\chi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

Rezultă imediat:

$$(\lambda I - A)^{-1} B = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{bmatrix}}{\chi(\lambda)}$$

și deci:

$$C(\lambda I - A)^{-1} B = \frac{[\beta_0 \quad \beta_1 \quad \dots \quad \beta_{n-1}] \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{bmatrix}}{\chi(\lambda)} = \frac{r(\lambda)}{\chi(\lambda)} = H(\lambda)$$

Este interesant de observat că realizarea de mai sus nu este unică. Un alt sistem care are exact aceeași funcție de transfer este obținut ca urmare a aplicării următoarei teoreme:

Teoremă: Dacă sistemul (A, B, C, D) este o realizare a funcției de transfer $H(\lambda)$, atunci și (A^T, C^T, B^T, D) este o realizare a aceleiași funcții.

Demonstrație: Deoarece $H(\lambda)$ și D sunt scalari putem scrie:

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= H^T(\lambda) = \{C(\lambda I - A)^{-1} B + D\}^T = \\ &= B^T \{C(\lambda I - A)^{-1}\}^T + D^T = B^T \{(\lambda I - A)^{-1}\}^T C + D = \\ &= B^T \{(\lambda I - A)^T\}^{-1} C + D = B^T (\lambda I - A^T)^{-1} C + D \end{aligned} \quad (2.40)$$

în care am folosit proprietățile de transpunere și inversare a matricelor.

Folosind acest rezultat putem introduce următoarea:

Teoremă: O realizare a funcției de transfer (rațională strict proprie)

$$H(\lambda) = \frac{\beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \beta_1\lambda + \beta_0}{\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0}$$

este cea numită *standard observabilă*:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \\ C &= [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \end{aligned} \quad (2.41)$$

Demonstrație: Se observă că realizările standard observabilă (2.41) și standard controlabilă (2.39) respectă relația (2.40) din teorema precedentă, deci ambele sunt realizări ale aceleiași funcții de transfer.

În cazul în care $H(\lambda)$ nu este o rațională strict proprie:

$$H(\lambda) = \frac{d\lambda^n + \gamma_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \gamma_1\lambda + \gamma_0}{\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0}$$

ca și în (2.35) putem scrie:

$$H(\lambda) = \frac{\beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \beta_1\lambda + \beta_0}{\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0} + d$$

și deci realizările controlabilă și observabilă se obțin ca mai sus, la relațiile (2.39), respectiv (2.41) adăugându-se $D = d$.

Exemplu: Fie funcția de transfer: $H(z) = \frac{2z-1}{z^2+1.5z-0.8}$

Realizarea standard controlabilă este:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.8 & -1.5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [-1 \quad 2]$$

iar cea standard observabilă:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.8 \\ 1 & -1.5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 1]$$

și firește în ambele cazuri $D = d = 0$.

Dacă însă am fi avut:

$$H(z) = \frac{3z^2 + 2z - 1}{z^2 + 1.5z - 0.8}$$

am fi scris:

$$H(z) = 3 + \frac{-2.5z + 1.4}{z^2 + 1.5z - 0.8}$$

și în consecință am fi obținut, de exemplu pentru realizarea standard controlabilă:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.8 & -1.5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1.4 \quad -2.5] \quad D = 3.$$

2.4.2 Echivalența sistemelor

Pentru o funcție de transfer $H(\lambda)$, ne punem problema dacă realizările controlabilă și observabilă sunt singurele posibile.

Definiție: Două sisteme (A, B, C, D) și respectiv $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ se numesc:

- **echivalente pe stare** dacă există o matrice T nesingulară, astfel încât:

$$\hat{A} = TAT^{-1} \quad \hat{B} = TB \quad \hat{C} = CT^{-1} \quad \hat{D} = D \quad (2.42)$$

- **echivalente intrare-ieșire** dacă pentru aceeași intrare u aplicată ieșirile lor forțate sunt egale.

Observații:

1) Pentru două sisteme echivalente pe stare, conform definiției rezultă imediat că de fapt este vorba despre același sistem, văzut însă în două sisteme de coordonate diferite, legate între ele prin T , care nu este altceva decât matricea de transformare. Astfel, dacă pentru sistemul:

$$\begin{cases} \dot{x}' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

introducem o schimbare de coordonate care să modifice starea în $\hat{x} = Tx$, putem scrie:

$$\begin{cases} T\dot{x}' = TAx + TBu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

și deci:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}' = TAT^{-1}\hat{x} + TBu \\ y = Cx + Du = CT^{-1}\hat{x} + Du \end{cases}$$

Am obținut așadar ecuațiile sistemului scrise în noul sistem de coordonate, în care starea este $\hat{x} = Tx$. Matricele sistemului în noile coordonate sunt chiar cele date de (2.42). Se observă de asemenea că intrarea și ieșirea sunt aceleași, în ambele sisteme de coordonate. Cu alte cuvinte, rezultă că două sisteme echivalente pe stare sunt în mod necesar și echivalente din punct de vedere intrare/ieșire.

2) Două sisteme sunt echivalente intrare-ieșire dacă și numai dacă au aceeași funcție (matrice) de transfer. Acest lucru se poate verifica ușor, având în vedere relația (2.31). Ținând cont de faptul că o funcție de transfer poate să fie exprimată într-o formă reductibilă sau ireductibilă, trebuie precizat că respectivele sisteme sunt echivalente intrare-ieșire dacă și numai dacă au aceeași *formă ireductibilă* a funcției (matricei) de transfer.

Având în vedere aceste observații este firesc să formulăm următoarea:

Teoremă: Două sisteme echivalente pe stare au aceeași funcție de transfer.

Demonstrație: În afară de demonstrația care se poate deduce imediat din observațiile anterioare, putem verifica acest lucru și calculând funcțiile de transfer ale celor două sisteme:

$$H_1(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}B + D$$

$$\begin{aligned} H_2(\lambda) &= CT^{-1}(\lambda I - TAT^{-1})^{-1}TB + D = C((\lambda I - TAT^{-1})T)^{-1}TB + D = \\ &= C(\lambda IT - TA)^{-1}TB + D = C(T^{-1}(\lambda IT - TA))^{-1}B + D = H_1(\lambda) \end{aligned}$$

Concluzia imediată este că există o infinitate de sisteme care au aceeași funcție de transfer (în forma primară), respectiv toate sistemele echivalente pe stare. În același timp funcția de transfer este unică pentru un sistem dat (cel mult se poate reduce la o formă mai simplă). Următoarele exemple vor clarifica aceste observații.

Exemplu: Să se construiască realizarea standard controlabilă a funcției de transfer (2.37) a motorului de c.c. cu excitație independentă și să se compare cu relația (1.26).

Realizarea standard controlabilă este:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k^2}{LJ} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{k}{LJ} & 0 \end{bmatrix}$$

și este diferită de forma obținută în capitolul 1 (ec. 1.26). Conform celor spuse mai sus, întrucât ambele sisteme au aceeași funcție de transfer, rezultă că ele trebuie să fie echivalente pe stare. Pentru a ne convinge de aceasta, să găsim matricea T de transformare care face legătura între cele două sisteme de coordonate. Vom nota cu " $\hat{\cdot}$ " sistemul dat de (1.26).

Pornind de la relația $\hat{B} = TB$ găsim: $\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ și deci: $t_{12} = \frac{1}{L}$, $t_{22} = 0$.

În continuare: $\hat{C} = CT^{-1} \Rightarrow \hat{C}T = C$ și deci: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & \frac{1}{L} \\ t_{21} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k}{LJ} & 0 \end{bmatrix}$, de unde rezultă $t_{21} = \frac{k}{LJ}$.

Cu aceste informații putem scrie: $T = \begin{bmatrix} t_{11} & \frac{1}{L} \\ \frac{k}{LJ} & 0 \end{bmatrix}$, iar inversa sa va fi:

$$T^{-1} = \frac{1}{-\frac{k}{L^2J}} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ -\frac{k}{LJ} & t_{11} \end{bmatrix}$$

În fine, înlocuind aceste matrice în $\hat{A} = TAT^{-1}$ obținem:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{k}{L} \\ \frac{k}{J} & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} t_{11} & \frac{1}{L} \\ \frac{k}{LJ} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k^2}{LJ} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \frac{1}{-\frac{k}{L^2J}} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ -\frac{k}{LJ} & t_{11} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{-\frac{k}{L^2J}} \begin{bmatrix} -\frac{k^2}{L^2J} & t_{11} - \frac{R}{L^2} \\ 0 & \frac{k}{LJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ -\frac{k}{LJ} & t_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{-\frac{k}{L^2J}} \begin{bmatrix} \frac{kR}{L^3J} & \frac{k^2}{L^3J} \\ -\frac{k^2}{L^2J^2} & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{k}{L} \\ \frac{k}{J} & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow t_{11} = 0 \end{aligned}$$

Am verificat aşadar că cele două expresii reprezintă ecuaţiile aceluiaşi sistem, în două sisteme diferite de coordonate, legătura între acestea fiind dată de matricea:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ \frac{k}{LJ} & 0 \end{bmatrix}, \text{ a cărei inversă este: } T^{-1} = \frac{1}{-\frac{k}{L^2J}} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ -\frac{k}{LJ} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{LJ}{k} \\ L & 0 \end{bmatrix}$$

Dacă starea sistemului (1.26) este $\hat{x} = \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_r \end{bmatrix}$, starea sistemului în noile coordonate va fi:

$$x = T^{-1}\hat{x} = \begin{bmatrix} \frac{LJ}{k}\omega_r \\ Li_a \end{bmatrix}.$$

În acest caz se poate găsi o semnificaţie fizică şi pentru noua stare (componenta a doua este fluxul prin inductivitatea rotorică iar prima este raportul între tensiunea contra-electromotoare şi un factor care, după cum se va vedea ulterior este pătratul pulsaţiei naturale a sistemului) dar această semnificaţie nu este interesantă. În general, pornind să zicem de la (1.26), prin schimbarea coordonatelor se poate ajunge la stări care nu au nici o semnificaţie fizică, dar care vor fi toate de forma:

$$\begin{bmatrix} t'_{11}i_a + t'_{12}\omega_r \\ t'_{21}i_a + t'_{22}\omega_r \end{bmatrix}$$

Exemplu: Fie sistemul descris de funcţia de transfer: $H(s) = \frac{2}{s+3}$. Să se găsească sistemele care au ca funcţie de transfer această expresie.

Realizarea standard controlabilă este: $A = -3$, $B = 1$, $C = 2$ şi fireşte toate sistemele de forma: $A = -3$, $B = t$, $C = 2\frac{1}{t}$, $t \neq 0$ vor avea exact aceeaşi funcţie de transfer. Sunt oare aceste sisteme unicele cu această proprietate? Dacă scriem:

$$H(s) = \frac{2}{s+3} = \frac{2(s+1)}{(s+3)(s+1)} = \frac{2s+2}{s^2+4s+3}$$

şi construim realizarea, să zicem observabilă de această dată:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 1]$$

găsim, pornind de la ea, o nouă mulţime de sisteme, de data aceasta de ordinul 2, care au aceeaşi funcţie de transfer (după reducere). Tot astfel, prin acelaşi procedeu se pot construi şi sisteme de ordinul 3, 4, etc. cu aceeaşi funcţie de transfer (reduşă).

Aşadar, informaţia dată de o funcţie de transfer este incompletă, spre deosebire de cea dată de ecuaţiile de stare. Acest lucru este firesc, având în vedere că funcţia de transfer nu conţine nici o informaţie despre stare, ci doar despre intrare şi ieşire. Pentru evitarea confuziilor este important ca atunci când se lucrează cu funcţii de transfer să se fixeze clar ordinul lor, respectiv dimensiunea modelelor în spaţiul stărilor echivalente. În acest caz funcţia de transfer va descrie sisteme care sunt echivalente pe stare.

2.4.3 Forme canonice

Aşadar, ecuaţiile de stare ale unui sistem liniar neted sau discret se pot reprezenta într-o infinitate de forme, fiecare corespunzând unui alt sistem de coordonate, adică unei alte reprezentări ale vectorului de stare. În general, atunci când ecuaţiile sistemului se obţin direct din ecuaţiile fizice ale procesului respectiv, componentele vectorului de stare au o semnificaţie fizică precisă (v. sistemele descrise de 1.19, 1.26). Această semnificaţie se pierde în general prin schimbarea sistemului de coordonate. Cu toate acestea, există anumite sisteme de coordonate care sunt deosebit de utile în diverse aplicaţii, deoarece duc la forme particulare relevante ale matricelor sistemului. Acestea se numesc **forme canonice** şi cele mai des întâlnite sunt:

- forma canonică **controlabilă** - (2.39);
- forma canonică **observabilă** - (2.40);
- forma canonică **diagonală** - numai dacă matricea A este diagonalizabilă:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad \tilde{C} = [\gamma_0 \quad \gamma_1 \quad \dots \quad \gamma_{n-2} \quad \gamma_{n-1}]$$

unde λ_i sunt valorile proprii ale matricei A (valorile proprii sunt independente de sistemul de coordonate), iar β_i și γ_i sunt oarecare. Dacă sistemul este scris sub această formă funcția de transfer se obține direct descompusă în fracții simple:

$$H(s) = \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1} \hat{B} = \hat{C} \begin{bmatrix} \frac{1}{s - \lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{s - \lambda_n} \end{bmatrix} \hat{B} = \frac{\gamma_0 \beta_0}{s - \lambda_1} + \dots + \frac{\gamma_{n-1} \beta_{n-1}}{s - \lambda_n}$$

unde am presupus că este vorba despre un sistem neted.

2.5 Descrierea în frecvență a sistemelor liniare

Să considerăm din nou circuitul RLC serie, al cărui model în spațiul stărilor este descris de relațiile 1.19 și 1.20. Pentru acest model intrarea este tensiunea aplicată la bornele circuitului, iar ieșirea este curentul rezultat. După cum se cunoaște, atunci când tensiunea este o sinusoidă de o anumită frecvență, după un anumit timp de la aplicarea acesteia, curentul prin circuit devine de asemenea o sinusoidă pură, având aceeași frecvență cu a tensiunii. Amplitudinea curentului depinde de cea a tensiunii, dar și de valorile elementelor circuitului. De asemenea, între curent și tensiune există un defazaj care depinde și el de cei trei parametri (R , L și C).

Dacă exact același model, având exact aceleași valori ale coeficienților matricelor A , B și C corespunde unui cu totul alt sistem fizic (așa cum am văzut tot în capitolul 1, un astfel de sistem este de exemplu un motor de c.c.), este firesc ca acest nou sistem să aibă exact aceeași comportare intrare-ieșire ca circuitul RLC (pentru că are aceeași funcție de transfer). Așadar, dacă intrarea este sinusoidală, ieșirea va fi de asemenea o sinusoidă, de aceeași frecvență și defazată față de intrare.

În fine aceeași concluzie se poate extinde asupra tuturor sistemelor liniare, indiferent de dimensiune și de semnificația fizică.

Să presupunem atunci că unui sistem oarecare îi aplicăm la intrare sinusoidă având amplitudine constantă și frecvență variabilă. Dacă măsurăm și notăm, pentru fiecare frecvență a intrării, amplitudinea și defazajul ieșirii vom obține o

tabelă care caracterizează respectivul sistem. Pentru a realiza o descriere în frecvență a sistemului, aceste date pot fi reprezentate în diverse moduri. Cele mai folosite sunt diagramele Bode, în care, amplitudinea și respectiv defazajul se reprezintă în funcție de frecvență, și cele Nyquist, în care raportul ieșire/intrare se reprezintă în coordonate polare, cu frecvența ca parametru.

2.5.1 Diagrame Bode

Așadar, este vorba despre reprezentarea amplitudinii și defazajului ieșirii în funcție de frecvență (mai precis în funcție de pulsație de obicei). În cele ce urmează vom presupune că sistemul este SISO. Intrarea sistemului se consideră a fi o sinusoidă de amplitudine unitară. În caz contrar (general) se reprezintă direct raportul între amplitudinea ieșirii și a intrării și respectiv defazajul. Dacă se cunoaște funcția de transfer a sistemului, cele două curbe se pot determina analitic, înlocuind în funcția de transfer: $s = j\omega$.

Într-adevăr, dacă considerăm intrarea:

$$u(t) = \sin(\omega t)$$

și ieșirea:

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi).$$

Funcția de transfer este desigur:

$$H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{A \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} e^{j\varphi}}{\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}} = A e^{j\varphi}$$

în care am ținut cont de expresia transformatei Laplace a sinusului și de teorema întârzierii. Așadar:

$$H(j\omega) = A e^{j\omega \frac{\varphi}{\omega}} = A e^{j\varphi}$$

și deci raportul amplitudinilor este modulul lui $H(j\omega)$ iar defazajul este chiar argumentul acesteia.

Exemplu: Să considerăm un sistem de ordinul 1, așa cum ar fi de exemplu un circuit RL serie. Ecuațiile în spațiul stărilor sunt:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + bu \\ y = cx \end{cases}, \text{ în cazul general, sau:}$$

$$\begin{cases} \dot{i} = -\frac{R}{L}x + \frac{1}{L}u \\ y = i \end{cases} \text{ pentru circuitul RL (adică } a = -\frac{R}{L}, b = \frac{1}{L} \text{ și } c = 1).$$

Funcția de transfer a unui astfel de sistem este: $H(s) = \frac{cb}{s+a}$. Înlocuind $s=j\omega$ se

obține:

$$H(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{u(j\omega)} = \frac{cb}{j\omega + a} = \frac{cb(a - j\omega)}{a^2 + \omega^2} = \frac{cb\sqrt{a^2 + \omega^2}}{a^2 + \omega^2} e^{j\theta}$$

în care am evidențiat modulul:

$$|H(j\omega)| = \frac{|y(j\omega)|}{|u(j\omega)|} = \frac{cb\sqrt{a^2 + \omega^2}}{a^2 + \omega^2} = \frac{cb}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

și argumentul θ , unde:

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \quad \text{iar} \quad \sin \theta = -\frac{\omega}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

Așadar în acest caz expresia raportului între amplitudinea ieșirii și a intrării, în funcție de pulsația ω este:

$$M(j\omega) = \frac{cb}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \quad (2.43)$$

iar cea a dependenței defazajului este:

$$\varphi(\omega) = \theta(\omega) = -\arctg\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (2.44)$$

Reprezentarea grafică a acestor dependențe este indicată în Fig. 2.6, în care am considerat $a = 100$, $cb = 20$ iar pentru ω ne-am limitat la valori mai mici de 1000.

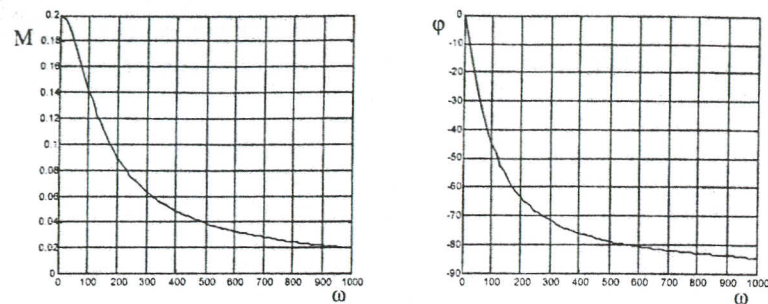


Fig.2.6. Reprezentarea grafică a amplitudinii și respectiv fazei ieșirii unui sistem de ordinul 1, pentru intrare sinusoidală. Ambele mărimi sunt reprezentate în funcție de pulsația intrării, iar coordonatele sunt liniare.

Așadar amplitudinea ieșirii scade odată cu creșterea frecvenței intrării tinzând către zero, iar defazajul tinde către -90° (întârzierea crește de la 0 la 90°). Sistemul de ordinul 1 se comportă așadar ca un filtru trece jos (FTJ). Acest lucru corespunde întocmai cu ceea ce se cunoștea deja pentru circuitul RL serie.

2.5.1.1 Coordonate logaritmice

Uzual reprezentarea caracteristicilor Bode nu se face în unități naturale, ci în unități logaritmice, pentru raportul amplitudinilor și pentru pulsație (defazajul rămâne în continuare în grade). Această reprezentare simplifică, după cum vom vedea, operațiile de trasare a graficului și de calculare a funcției de transfer.

Mai mult, raportul amplitudinilor se preferă să se măsoare în **decibeli (dB)**, deci în ordonata primului grafic vom avea:

$$20 \log \left| \frac{y(j\omega)}{u(j\omega)} \right| \quad (\text{dB})$$

iar în abscisa ambelor grafice: $\log \omega$. De remarcat că în acest fel apare o singură unitate pentru raportul amplitudinilor ieșirii și intrării, deși acestea pot fi în general mărimi cu totul diferite, fiecare măsurată în alte unități (de ex. pentru motorul de c.c. intrarea este tensiunea aplicată rotorului, măsurată în V, iar ieșirea este turația, măsurată în rad/s). În noile coordonate graficele din Fig. 2.6 au forma arătată în Fig. 2.7. Se observă că alura curbilor este diferită, datorită faptului că noile coordonate nu sunt liniare. Zona pulsațiilor "mici" este acum mult mai clară (mărită) decât în cazul anterior, chiar dacă, deoarece nu se poate

calcula $\log 0$ reprezentarea începe la o valoare mai mare (10 pentru această figură). Prin pulsații "mici" înțelegem acele pulsații inferioare *pulsației naturale* a sistemului. Pentru sistemele de ordinul 1 pulsația naturală este invers proporțională cu constanta de timp a acestuia.

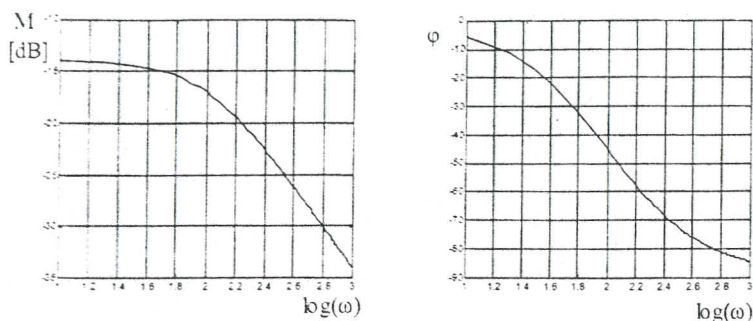


Fig.2.7. Reprezentarea grafică a amplitudinii și respectiv fazei ieșirii unui sistem de ordinul 1, pentru intrare sinusoidală (diagramele Bode). Ambele mărimi sunt reprezentate în funcție de pulsația intrării, iar coordonatele sunt logaritmice (cu excepția fazei).

De multe ori în abscisă nu se notează valoarea logaritmului - deși aceasta este cea reprezentată -, ci chiar pulsația. În acest caz reprezentarea echivalentă a graficelor din Fig. 2.7 este cea din Fig. 2.8.

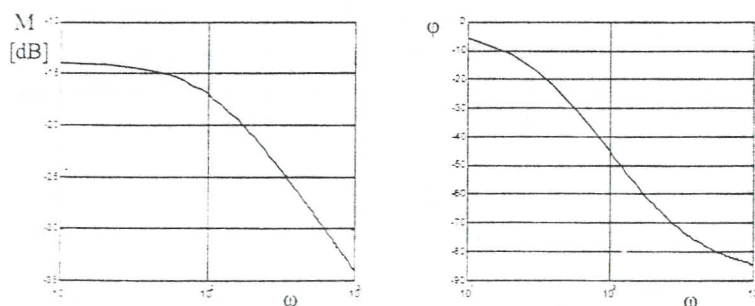


Fig.2.8. Aceleași diagrame Bode ca în Fig. 2.7, notația de pe abscisă fiind însă în radiani, deși scara pentru ω este în continuare logaritmică.

Diagramele Bode sunt foarte utile în aprecierea comportării sistemelor la intrări sinusoidale (de diferite frecvențe) dar și, în general la orice intrări periodice, deoarece, după cum se știe orice semnal periodic se poate descompune într-o serie Fourier, ce conține semnale sinusoidale de diverse pulsații. De

exemplu, pentru sistemul ale cărui diagrame Bode sunt date în Fig. 2.8 se observă că se comportă ca un filtru trece jos. Deci, dacă la intrare se aplică un semnal cu pulsația de 1000 rad/s, amplitudinea sa va fi redusă cu circa 20 dB, adică de 10 ori. De asemenea în acest caz ieșirea va fi întârziată cu aproape 90°.

Diagramele Bode, ca și cele pe care le vom prezenta în continuare au jucat un rol foarte important în analiza și proiectarea sistemelor de reglare automată. Fiind folosite deosebit de intens, cel puțin înainte de apariția calculatoarelor, s-a dezvoltat o întreagă terminologie specifică, ca și un întreg set de reguli pentru trasarea manuală simplificată a lor. Vom prezenta în continuare, foarte pe scurt, o parte din acești termeni și reguli.

1. *Octavă și decadă* - termeni folosiți pentru desemnarea unei benzi de pulsație cu proprietatea că limitele acesteia satisfac:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 2 \text{ și respectiv: } \frac{\omega_2}{\omega_1} = 10$$

Se observă că lățimea acestor benzi nu este fixă când exprimăm pulsațiile în rad/s, dar este fixă pe scara logaritmică a diagramelor Bode. Astfel, de la 10 la 100 Hz, de exemplu este o decadă, la fel ca și de la 100 la 1000 Hz. Pe graficele din Fig. 2.7 și 2.8 aceste decade sunt chiar cele două jumătăți ale abscisei.

2. *Decibeli* - așa cum am arătat deja aceasta este unitatea în care se exprimă amplitudinea (relativă la intrare) a ieșirii, indiferent de unitățile și semnificațiile fizice ale intrării și ieșirii. În tabelul 2.1. este arătată legătura între câteva din valorile raportului amplitudinilor ieșirii și intrării exprimat în unități fizice și respectiv în dB. Valorile în dB au fost rotunjite, așa cum se procedează uzual în lucrul cu diagramele Bode.

Se observă că două numere care au produsul 1 au aceeași valoare exprimată în dB, dar cu semn contrar. Evident aceasta se datorează proprietăților logaritmului. Pe baza aceluiași proprietăți se pot deduce următoarele reguli:

- când valoarea unei mărimi, exprimată în unități fizice se dublează, valoarea sa exprimată în dB crește cu 6 dB;
- când aceeași valoare crește de 10 ori, numărul de decibeli crește cu 20.

Unități fizice	dB	Unități fizice	dB
0.01	-40	1.4142 ($\sqrt{2}$)	3
0.1	-20	2	6
0.5	-6	10	20
0.707 ($1/\sqrt{2}$)	-3	100	40
1	0	200	46

Tab.2.1. Legătura între diverse valori ale raportului amplitudinilor ieșirii și intrării unui sistem, exprimate în unități fizice și respectiv în decibeli.

Pe baza unor astfel de reguli se pot trasa, fără ajutorul calculatorului, diagrame Bode simplificate pentru orice sistem liniar. Diagramele trasate analitic au cunoscut o foarte mare răspândire în analiza și proiectarea sistemelor de reglare automată, înainte de apariția calculatoarelor. Spre deosebire de cele exacte, aceste diagrame simplificate nu sunt formate din curbe, ci din linii frânte. Pentru exemplificare, în Fig. 2.9 sunt trasate, pentru același sistem de ordinul 1 atât caracteristicile exacte, cât și cele aproximative. Se observă că și caracteristicile aproximative dau o imagine clară a comportării în frecvență a sistemului. Pentru diagramele amplitudinii eroarea maximă apare la îmbinarea liniilor și este de 3 dB. Frecvența la care apare această îmbinare se numește *frecvență (pulsatie) de colț*. Se observă că ea este 100 rad/s, valoarea fiind dată de constanta de timp considerată. Diagramele de fază se intersectează în punctul corespunzător acestei valori.

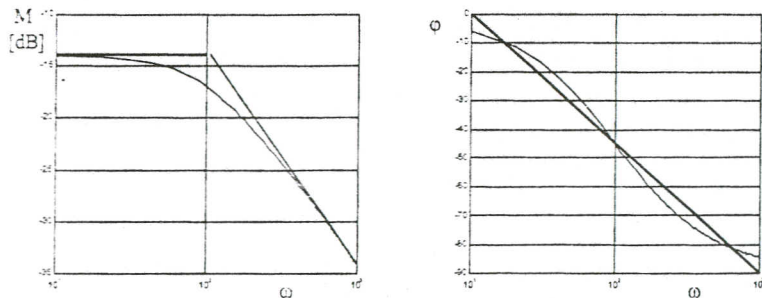


Fig.2.9. Diagramele Bode exacte și aproximative (linie îngroșată) pentru sistemul de ordinul 1 considerat în exemplul precedent (v. Fig. 2. 8)

Explicația pentru această alură este dată de modul în care se face trasarea aproximativă a diagramelor Bode. Diagrama simplificată a modului se obține dacă în expresia sa, dată de ecuația (2.43) facem aproximația:

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} \frac{cb}{a}, & \omega \leq a \\ \frac{cb}{\omega}, & \omega > a \end{cases}$$

Ambele expresii au caracteristicile liniare, punctul lor de intersecție (colțul) apărând firește pentru $\omega = a$. Caracteristica fazei, dată de relația (2.44) se poate aproxima cu o dreaptă care trece prin următoarele puncte:

$$\begin{aligned} -\arctg\left(\frac{\omega}{a}\right) &\approx 0 \frac{\omega}{a} = 0.1 & -\arctg\left(\frac{\omega}{a}\right) &= -45^\circ \frac{\omega}{a} = \\ &= 1 & -\arctg\left(\frac{\omega}{a}\right) &\approx -90^\circ \frac{\omega}{a} = 10 \end{aligned}$$

În fine, în figura 2.10 și 2.11 sunt prezentate diagramele Bode ale elementului de ordinul 2 cu funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

pentru diverse valori ale parametrului ζ și pentru $\omega_n = 100$.

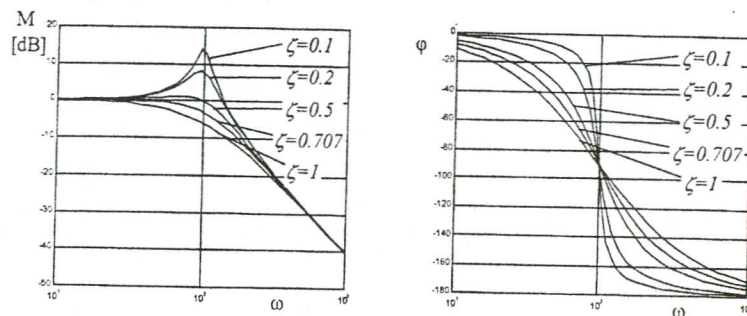


Fig.2.10. Diagramele Bode pentru elementul de ordinul 2 cu $\omega_n = 100$ și diverse valori subunitare ale lui ζ

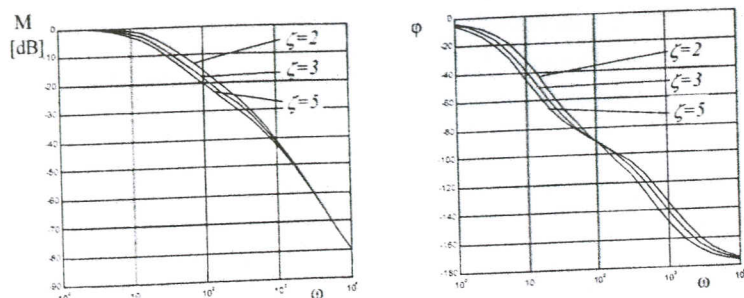


Fig.2.10. Diagramele Bode pentru elementul de ordinul 2 cu $\omega_n = 100$ și diverse valori supraunitare ale lui ζ .

2.5.2 Diagrame Nyquist (polare)

Aceeași informație care este conținută în diagramele Bode poate fi reprezentată în coordonate polare, în care pentru fiecare pulsație se trasează vârful vectorului având modulul și faza date de cele două diagrame Bode. De data aceasta însă unitățile din ambele axe sunt liniare. Uzual se trasează și curba corespunzătoare pulsațiilor negative, aceasta fiind obținută prin oglindire (simetrie) față de abscisă. Explicația acestei simetrii este lăsată ca exercițiu pentru cititor. De exemplu, în figura 2.12 este reprezentată diagrama polară (Nyquist) pentru elementul de ordinul 2 având, $\zeta = 0.1$ și respectiv 1, iar $\omega_n = 100$. Pentru o mai ușoară comparație cu diagramele Bode din figura 2.9 acestea au fost retrase în coordonate liniare, pentru cazul $\zeta = 0.1$ (figura 2.13).

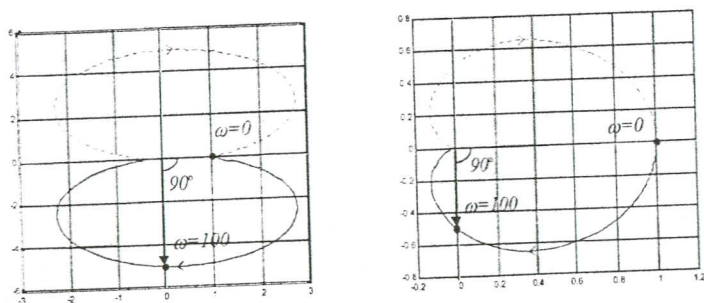


Fig.2.12. Diagramele Nyquist pentru elementul de ordinul 2 având $\omega_n = 100$ și $\zeta = 0.1$, respectiv 1. Linia întreruptă corespunde pulsațiilor negative.

În figură au fost evidențiate punctele obținute pentru $\omega = 100$ și $\omega = 0$ precum și o poziție particulară a vectorului care dă această diagramă. În figura 2.10 se vede că de exemplu pentru $\omega = 100$ faza este de -90° iar modulul este 5 ceea ce corespunde întocmai fazei și modulului vectorului din diagrama polară. Pentru $\omega = 0$ faza este zero, iar modulul este unitar, ceea ce din nou se verifică pe diagrama Nyquist.

În cazul în care $\zeta = 1$ se poate face o comparație similară cu diagrama Bode din figura 2.9, cu deosebirea că acum trebuie făcută conversia între unitățile naturale ale diagramei polare și cele logaritmice ale diagramei Bode. De exemplu, pentru $\omega = 100$ modulul este circa -6 dB, adică 0.5 .

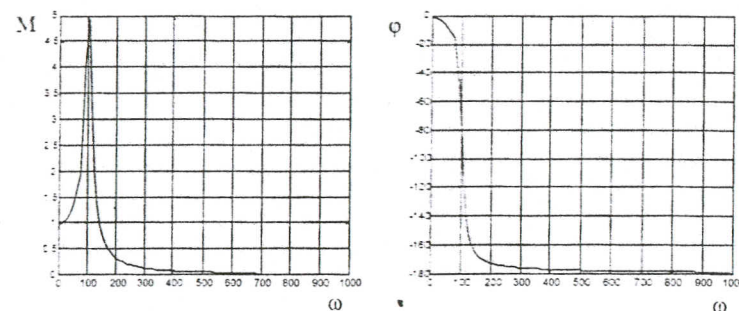


Fig.2.13. Diagramele Bode pentru elementul de ordinul 2 având $\omega_n = 100$ și $\zeta = 0.1$, retrase în coordonate liniare. A se compara cu cele în coordonate logaritmice (figura 2.10) și cu diagrama Nyquist, din figura 2.12.

În ambele grafice din Fig. 2.12 au fost trasate și curbele corespunzătoare pulsațiilor negative, obținute prin simetrie față de abscisă. Atât în diagramele Nyquist cât și în cele Bode se observă că pentru acest sistem ieșirea este întotdeauna întârziată față de ieșire, variind între 0 și -180° . În cazul în care pulsațiile semnalelor sunt negative ieșirea este întotdeauna în avans, lucru care se poate verifica matematic scriind expresiile intrării și ieșirii pentru o pulsație oarecare ω și pentru $-\omega$:

$$u_1 = U \sin(\omega t) \quad y_1 = Y \sin(\omega t - \varphi) \quad \omega > 0, \varphi > 0$$

$$u_2 = U \sin(-\omega t) = -U \sin(\omega t) \quad y_2 = Y \sin(-\omega t - \varphi) = -Y \sin(\omega t + \varphi)$$

Nu întotdeauna ieșirea este întârziată față de intrare. Mai mult, există și sisteme în cazul cărora pentru o anumită gamă a frecvențelor de intrare ieșirea este întârziată, iar pentru restul este în avans. Un astfel de caz este circuitul prezentat în figura 2.14:

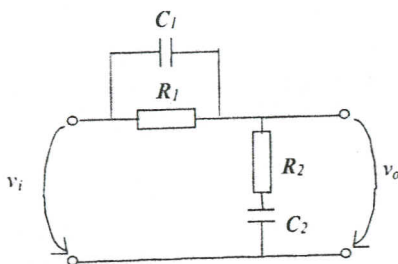


Fig.2.14. Exemplu de circuit atât cu întârziere dar și cu avans al semnalului de ieșire în funcție de frecvențele semnalului aplicat la intrare.

Acesta este descris de funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2 + T_{12})s + 1} \quad (2.45)$$

$$\text{unde: } T_1 = R_1 C_1, \quad T_2 = R_2 C_2, \quad T_{12} = R_1 C_2$$

Pentru cazul particular în care $T_1 = 1$ și $T_2 = 0.2$ diagrama Nyquist este, așa după cum se vede în figura 2.15 o curbă închisă (o elipsă) și, datorită simetriei se suprapune complet peste cea corespunzătoare frecvențelor negative.

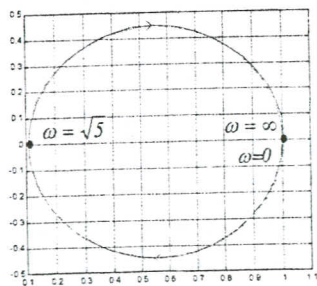


Fig.2.15. Diagrama Nyquist a sistemului dat de ecuația (2.45) și circuitul din figura 2.14.

3 DISCRETIZAREA SISTEMELOR LINIARE NETEDE

3.1 Discretizarea semnalelor netede. Fenomenul de aliasing

3.1.1 Operația de discretizare ideală

Discretizarea unui semnal neted $u(t)$ este operația prin care se obține un semnal discret $u_d(k)$ cu proprietatea:

$$u_d(k) = u(kh), \quad (\forall) k \in \mathbb{Z}$$

în care $h \in \mathbb{R}$ este o constantă numită *pas de discretizare (de eșantionare)*. Această operație constă așadar în citirea semnalului u la intervale constante de timp, h . Frecvența cu care se realizează aceste citiri este $1/h$ și se numește *frecvență de discretizare (de eșantionare)*. Un exemplu de reprezentare grafică a unui semnal discret și a celui neted din care provine este dat în figura 1.6 și respectiv 1.5. Dacă suprapunem cele două grafice, se observă că semnalul discretizat coincide cu cel neted în toate punctele în care este definit. Operația de discretizare astfel definită este una ideală.

3.1.2 Operația de discretizare reală

Așa cum am menționat în paragraful 1.2 în practică această operație este realizată de un convertor analog - numeric (numit deseori analog - digital și notat CAN, A/D sau A/N). Acesta este un circuit integrat care primește la intrare semnalul analogic, ieșirea sa fiind semnalul numeric, reprezentat pe n biți. Desigur că, așa cum am menționat deja (v. 1.2) semnalul numeric obținut la ieșirea acestui circuit este afectat de o *eroare de cuantizare*, datorită numărului finit n de biți pe care se face reprezentarea sa. Pentru ca circuitul să nu se distrugă semnalul de intrare trebuie să nu depășească o anumită valoare maximă, care este un parametru important al respectivului circuit. Dacă semnalul real nu respectă această cerință, el trebuie divizat corespunzător înainte de aplicarea la intrarea circuitului. Eroarea de cuantizare a unui convertor este așadar:

$$\varepsilon = \frac{\Delta u}{2^n} = \frac{u_{\max}}{2^{n-1}}$$

în care am ținut cont de faptul că gama de variație a intrării este de forma:

$$\Delta u = [-u_{\max} \quad u_{\max}] .$$

O altă caracteristică a unui convertor analog - numeric este aceea că realizează două operații distincte: eșantionarea propriu-zisă și menținerea valorii eșantionate până la următorul moment de eșantionare (adică pe durata lui h). De aceea ele se mai numesc și elemente *de eșantionare și menținere*. După cum vom vedea în continuare operația de menținere constantă a valorii ieșirii pentru un anumit interval de timp are, în general, consecințe deosebit de importante pentru funcționarea sistemelor discrete de comandă. O altă caracteristică a convertorului A/D real este faptul că operația de discretizare nu este instantanee, ci necesită un anumit timp, numit *timp de conversie*. Acesta este de ordinul câtorva μs , și uzual este mult mai mic decât pasul de eșantionare.

În figura 3.1.a) este reprezentat un semnal neted variind între $\pm 1 V$ care este discretizat cu ajutorul unui convertor analog digital (figura 3.1.b) și c)) și respectiv printr-o operație de discretizare ideală (figura 3.1.d), cu un pas de eșantionare de $0.5 ms$. Atât pentru discretizarea reală, cât și pentru cea ideală se observă că axa timpului continuu, măsurat în s se înlocuiește cu o axă discretă, a momentelor în care se face discretizarea. Legătura între cele două axe este dată de pasul de eșantionare, de exemplu valorii $t = 0.002 s$ corespunzându-i valoarea $k = 4$ ($0.002 = 0.0005 \cdot 4$).

În figura 3.1.b) este arătată ieșirea propriu-zisă a convertorului (care este și element de reținere), în timp ce în figura 3.1.c) este prezentat semnalul discret, așa cum este el citit de sistemul digital, câte o singură dată pe fiecare palier. În ambele cazuri valorile semnalului variază în trepte, între ± 25 unități (biți). La aceste cifre s-a ajuns pentru că am considerat cazul în care convertorul A/D are 8 biți iar gama de variație a intrării care poate fi aplicată este de $\pm 5 V$. Cum pe 8 biți se pot reprezenta numere întregi între -128 și 127 , rezultă că pentru $1 V$ la intrare vom avea la ieșire parte întreagă din $127/5$, adică 25 unități. (Se observă că pentru valoarea maximă a semnalului apare o eroare de cuantizare de 0.4 unități, respectiv de $15,8 mV$). Timpul de conversie nu se distinge în figură, fiind de câteva μs , deci de câteva sute de ori mai mic decât pasul de discretizare.

Desigur, în lucrul cu un astfel de semnal trebuie ținut cont de constanta de scalare pe care o introduce convertorul analog numeric, respectiv $5/127$ în acest exemplu. În fine, în figura 3.1.d) este arătat semnalul discret obținut printr-o eșantionare ideală, care nu este scalat și nici afectat de erori de cuantizare.

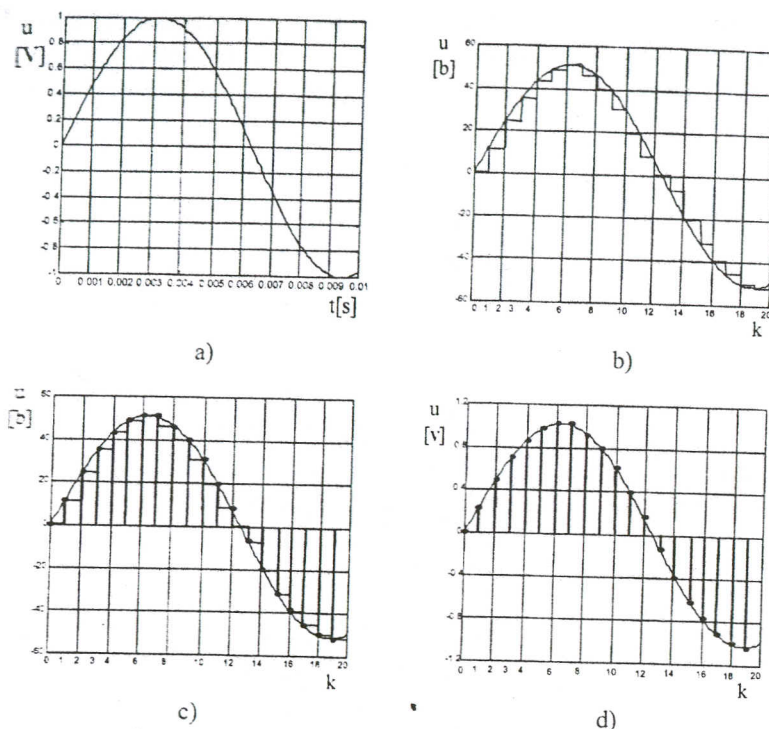


Fig.3.1. Exemplu de semnal neted (a), semnalul corespunzător obținut prin discretizare reală cu CAN (b, c) și prin discretizare ideală (d).

Pentru simplificare vom presupune deocamdată că nu există nici o eroare de cuantizare. Această presupunere este foarte aproape de adevăr când numărul de biți ai convertorului analog - numeric este suficient de mare (de exemplu, pentru $n=16$, când gama de variație a semnalului de intrare este de $\pm 5V$, eroare de cuantizare este de $0.15 mV$) și în plus proprietățile fundamentale ale semnalului numeric (dat de convertorul real) sunt aceleași cu cele ale semnalului discret (dat de operația ideală de discretizare).

Teoremă: Un semnal continuu având componente de frecvență maximă f_1 poate fi reprezentat prin eșantionare regulată, cu o frecvență de eșantionare de cel puțin $2f_1$. (Acest rezultat este întâlnit în literatura de specialitate cu numele de *teorema lui Shannon*).

Pentru a înțelege mult mai bine acest aspect este necesar să apelăm la analiza semnalului discret cu ajutorul Transformatei Fourier.

Exemplu: Fie un semnal continuu având componente de frecvență maximă f_1 . Modulul transformatei Fourier poate fi reprezentat schematic ca în figura 3.2

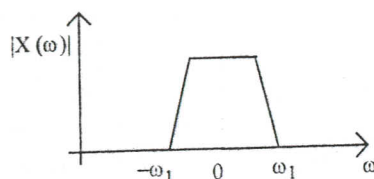


Fig.3.2. Modulul transformatei Fourier pentru un semnal continuu.

unde $\omega_1 = 2\pi f_1$. Se știe că acesta este o funcție pară în raport cu originea. Fie T lungimea (perioada) semnalului și fie o eșantionare a sa cu o frecvență $f_{es} > 2f_1$. Numărul de puncte pe perioadă va fi N și evident:

$$f_{es} = \frac{N}{T}.$$

Se poate defini o transformată Fourier (v. Anexa I) a semnalului eșantionat, funcție continuă de ω . Ea nu este altceva decât înfășurătoarea punctelor date de transformata Fourier discretă, care este proporțională cu spectrul semnalului continuu. Aceasta din urmă se repetă periodic pentru $k > N$. Aceasta înseamnă că și înfășurătoarea ei se repetă întocmai, cu o perioadă dată de $\omega_{es} = 2\pi f_{es}$ așa după cum se poate remarca în figura 3.3.

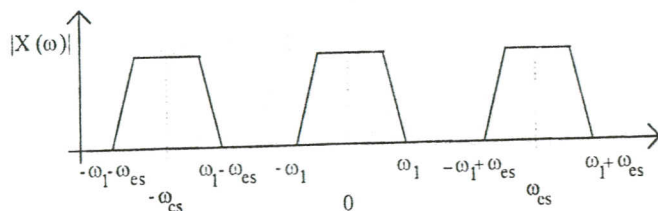


Fig.3.3 Modulul transformatei Fourier a semnalului din figura 3.2 pentru o frecvență de eșantionare mai mare de două ori frecvența f_1 .

Se observă că $f_{es} > 2f_1$ înseamnă că spectrele nu se intersectează.

O altă regulă de care trebuie să se țină seamă este evitarea **fenomenului de aliasing**. Dacă pentru semnalul anterior nu este respectată condiția cerută de teorema lui Shannon, se observă că pentru $f_{es} = 2f_1$ spectrele se repetă fără pauză între ele, iar pentru $f_{es} < 2f_1$ ele se suprapun. În acest caz, ceea ce se obține în urma calculării transformatei Fourier discrete pentru semnalul astfel eșantionat, sunt coeficienții corespunzători *sumei* celor două spectre, deci un alt spectru, care nu mai este proporțional cu cel al semnalului continuu. Acest fenomen este redat în figura 3.4.

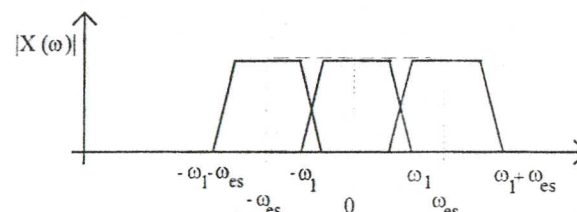


Fig.3.4. Modulul transformatei Fourier a semnalului din figura 3.2 pentru o frecvență de eșantionare mai mică de două ori frecvența f_1 .

În situația particulară reprezentată în figura 3.4, această sumă (linia întreruptă) este chiar constantă. În general, de acest fenomen vor fi afectate frecvențele care intră în zona de suprapunere a spectrelor.

Pentru a evita această situație rezultă că trebuie respectată teorema lui Shannon, deci aleasă frecvența f_{es} suficient de mare. Acest lucru nu este însă totdeauna posibil. Astfel, dacă semnalul are și componente de frecvență foarte mare, sau dacă există și zgomot (care este de frecvență mare) nu vom putea, sau nu vom dori creșterea excesivă a frecvenței de eșantionare.

Rezolvarea problemei se face prin filtrarea semnalului înainte de a-l eșantiona, eliminându-i toate frecvențele mai mari decât $f_{es} / 2$. Această operație se numește **filtrare anti-aliasing** și se face cu ajutorul unor filtre analogice trece jos (FTJ). Multe din convertoarele A/D moderne au incluse pe cip filtre analogice anti-aliasing, utilizatorul fixând, în funcție de aplicație, frecvența de tăiere dorită.

3.2 Formularea problemei discretizării sistemelor

Structura generală a unui sistem de reglare automată (S.R.A.) este prezentată în figura 3.5. Semnificația mărimilor care intervin este următoarea:

- y^* - mărimea de referință numită și mărime impusă;
- y - mărimea de ieșire;
- ε - eroarea între mărimea de referință și mărimea de ieșire din proces;
- u - mărimea de intrare în proces aici având și semnificația de comandă aplicată procesului fizic pe care dorim să-l reglăm:

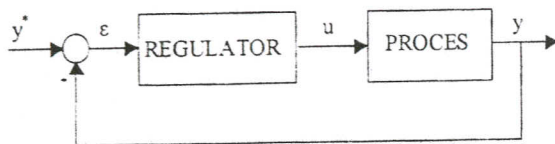


Fig.3.5. Structura generală a unui sistem de reglare automată (SRA)

În cadrul unui sistem de reglare automată se dorește ca o anumită mărime, caracteristică procesului fizic reglat, să varieze după un anumit profil impus de utilizator. Mărimea care se dorește a fi reglată se măsoară, sau în unele cazuri dacă acest lucru nu e posibil se estimează, și se compară cu mărimea de referință. Se obține astfel o eroare de reglare care este aplicată unui bloc special numit *regulator*. Acesta are rolul de a furniza o comandă către proces în sensul minimizării erorii astfel încât, în cazul ideal, aceasta să devină chiar egală cu zero. Acest lucru se poate exprima matematic:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (y^* - y) = 0$$

sau cu alte cuvinte mărimea de ieșire y urmărește mărimea de referință y^* .

Structura de reglare din figura 3.5 este în buclă închisă și cu reacție negativă. Vom reveni mult mai pe larg asupra acestor noțiuni în capitolul 10.

Să considerăm acum un *exemplu* de SRA și anume zborul unui avion. Mărimea y poate fi considerată în acest caz direcția de zbor (în plan orizontal), mărimea de referință y^* va fi atunci direcția impusă. Comanda u este dată de poziția manșei care se poate traduce într-o anumită tensiune electrică. Valoarea aceasta este apoi convertită în grade unghiulare după o anumită regulă. De

exemplu putem considera că $+1V$ reprezintă o comandă de 10° dreapta iar $-1V$ ar fi 10° stânga.

Pilotul citește aparatele de bord și 'calculează' abaterea de la direcția impusă (care constituie de fapt eroarea de reglare). Conform acestei informații el mișcă manșa astfel încât avionul să revină din nou la direcția de zbor dorită. După corectarea abaterii manșa este readusă în poziția de zero. În acest fel putem spune că pilotul are rolul regulatorului din cazul general.

Bineînțeles că procesul este mult mai complex și oricum pilotul nu gândește comenzile așa cum le-am prezentat noi. În esență însă se poate considera că avem de-a face cu un sistem de reglare automată a direcției de zbor, care se poate reprezenta schematic ca în figura 3.5. Sistemul se complică dacă vom dori să îndeplinim și alte cerințe, adică revenirea să se facă într-un anumit mod (lin fără șocuri dar cât mai rapid de exemplu). Într-un mod asemănător stau lucrurile și când zborul avionului este în 'grija' pilotului automat.

Observații:

- Deoarece este foarte ușor de lucrat cu mărimi electrice, în practică se urmărește ca majoritatea mărimilor neelectrice să fie convertite în mărimi electrice (de regulă tensiuni) utilizând traductoare corespunzătoare. În acest mod putem considera că atât y^* cât și y sunt tensiuni electrice. Deci și eroarea dintre ele va fi tot o tensiune, la fel și comanda dată de regulator.
- Există situații în care sistemul de reglare automată folosește un calculator care citește informațiile din sistem, le prelucrează, efectuează anumite calcule și apoi generează comanda (ex.: calculatorul de bord din exemplul de mai sus). În acest caz spunem că regulatorul este realizat numeric și că sistemul este comandat digital.

Vom prezenta în continuare elementele necesare unei mai bune înțelegeri a unor astfel de situații. Pentru sistemele cu comandă digitală (numerică) în schema prezentată în figura 3.5, care corespunde unor sisteme analogice, trebuie să mai adăugăm elemente noi conform figurii 3.6. Acestea sunt convertorul digital analogic (CDA sau se mai notează cu CAN sau cu CD/A) și convertorul analog digital (CAD, CAN sau CA/D).

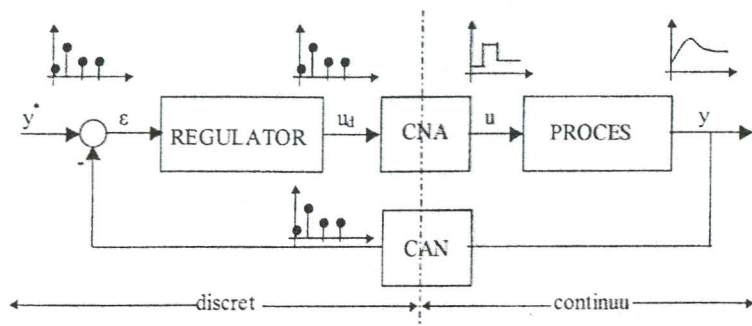


Fig.3.6. Structura generală a unui sistem discret de reglare automată

Problema care apare acum în mod firesc este cum găsim un echivalent discret al sistemului, care aplicându-i la intrare un semnal constant pe porțiuni, obținut din convertorul numeric-analogic, să aibă la ieșire exact discretizarea ieșirii sistemului continuu.

Aceasta este o problemă de discretizarea a unui sistem continuu și poate fi prezentată grafic conform figurii 3.7.

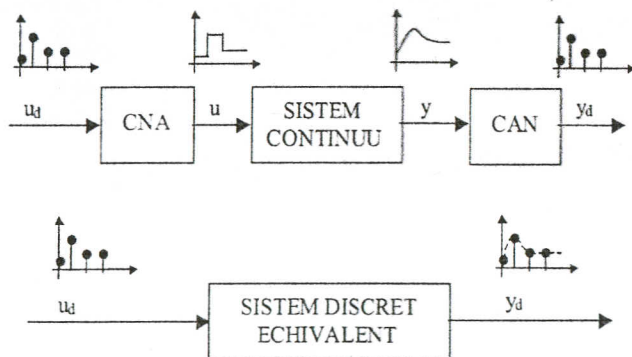


Fig.3.7. Discretizarea sistemelor continue considerând un convertor numeric analogic cu element de menținere de ordin zero (cu ieșirea în trepte).

3.2.1 Discretizarea sistemelor reprezentate în spațiul stărilor

Soluția problemei discretizării sistemelor continue reprezentate în spațiul stărilor se obține pornind de la relația (2.3), demonstrată în paragraful 2.1, și care

exprimă evoluția unui sistem, considerând însă acum, ca moment inițial, un moment de timp oarecare t_0 :

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (3.1)$$

În cele mai multe situații ieșirea convertorului numeric analogic este constantă pe porțiuni așa cum se prezintă în figura 3.8. Se spune că are un element de menținere de ordin zero (sunt și cazuri, mai rar întâlnite, în care semnalul de ieșire, între doi pași de eșantionare, este o funcție de ordinul unu sau chiar doi).

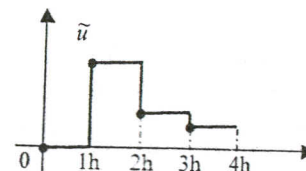


Fig.3.8. Ieșirea unui CAN cu element de menținere de ordin zero.

Pentru un pas de eșantionare oarecare observăm că:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) &= u_k \text{ constant pentru } (\forall) t \in [kh, (k+1)h] \\ t_0 &= kh; \\ t &= (k+1)h; \end{aligned}$$

Particularizând relația 3.1 pentru un pas de eșantionare vom obține:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}((k+1)h) &= e^{Ah} \tilde{\mathbf{x}}(kh) + \int_{kh}^{(k+1)h} e^{A((k+1)h-\tau)} \mathbf{B} u_k d\tau = \\ &= e^{Ah} \tilde{\mathbf{x}}(kh) + \int_0^h e^{A\tau} \mathbf{B} d\tau u_k \end{aligned} \quad (3.2)$$

Relația (3.2) dă valoarea stării continue $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ în momentul $t = (k+1)h$.

Un sistem discret considerat între aceleași momente are expresia:

$$\mathbf{x}_d(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_d(k) + \mathbf{B}_d u(k) \quad (3.3)$$

Vom dori ca cele două sisteme să fie echivalente, cu alte cuvinte:

$$\begin{aligned} u(k) &\equiv u_k; \\ x_d(k) &\equiv \tilde{x}(kh); \\ x_d(k+1) &\equiv \tilde{x}((k+1)h); \end{aligned}$$

Comparând relațiile (3.2) și (3.3) observăm că acest lucru e posibil dacă:

$$\begin{aligned} A_d &= e^{A\tau}; \\ B_d &= \int_0^h e^{A\tau} B d\tau; \end{aligned} \quad (3.4)$$

Pentru ieșire putem scrie următoarele relații:

$$\tilde{y}(kh) = C\tilde{x}(kh) + Du_k \quad \text{pentru sistem continuu, respectiv}$$

$$y_d(k) = C_d x(k) + D_d u(k) \quad \text{pentru sistemul discret.}$$

de aici rezultând imediat, prin identificare:

$$\begin{aligned} C_d &= C \\ D_d &= D \end{aligned} \quad (3.5)$$

Observație:

Reamintim că echivalentul discret al unui sistem continuu (A, B, C, D) a fost obținut pentru cazul în care intrarea în sistem este constantă pe porțiuni (este cazul uzual al convertoarelor N/A când nu știm unde va veni următoarea valoare a comenzii). Convertoarele de acest tip se numesc cu element de menținere de ordin unu sau prescurtat ZOH.

Dacă dorim să considerăm alte tipuri de convertoare formulele (3.4) vor fi evident altele pentru că atunci $\tilde{u}(t) \neq u_k$ pentru $t \in [kh, (k+1)h]$.

3.2.2 Discretizarea sistemelor reprezentate prin funcții de transfer

Să vedem în continuare cum se rezolvă problema discretizării sistemelor dacă acestea sunt reprezentate prin funcții de transfer. Avem de găsit o funcție de transfer $H_d(z)$ pentru sistemul discret echivalent sistemului continuu $H(s)$ așa cum se poate vedea în figura 3.9.

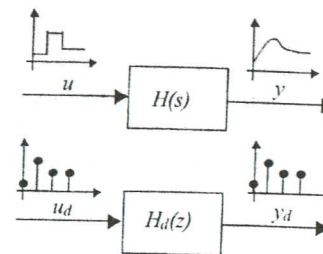


Fig.3.9. Discretizarea sistemelor reprezentate prin funcții de transfer

Sunt două posibilități de rezolvare a problemei:

- Se scrie o realizare pentru sistemul continuu. Apoi se găsesc matricele sistemului discret echivalent conform relațiilor (3.4) și (3.5) și în final din aceste matrice se deduce funcția de transfer a sistemului discret. Această modalitate poate fi reprezentată schematic astfel:

$$H(s) \xrightarrow{\text{realizare}} (A, B, C, D) \xrightarrow{\text{discretizare}} (A_d, B_d, C_d, D_d) \longrightarrow H_d(z)$$

- Există și o modalitate directă pentru a evita calculele destul de laborioase care ar fi necesare în cazul abordării anterioare. Vom prezenta în continuare modul de deducere a formulei de calcul.

Fie o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, transformata Laplace a sa $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, f_d discretizata ei și transformata Z: $F_d(z) = \mathcal{Z}\{f_d(k)\}$. Vom putea scrie:

$$F_d(z) = \mathcal{Z}\{f_d(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_d(k) z^{-k}$$

dar $f_d(k) \equiv f(kh)$ atunci:

$$F_d(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kh) z^{-k}$$

Funcția $f(t)$ poate fi calculată prin transformată Laplace inversă din $F(s)$ și:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

Cu această valoare obținem:

$$F_d(z) = \frac{1}{2\pi j} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\sigma_1-j\infty}^{\sigma_1+j\infty} F(s) e^{skh} ds \cdot z^{-h} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1-j\infty}^{\sigma_1+j\infty} F(s) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^{sh}}{z} \right)^k ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1-j\infty}^{\sigma_1+j\infty} F(s) \frac{z}{z - e^{sh}} ds$$

Ultima integrală poate fi calculată utilizând reziduurile:

$$F_d(z) = \sum \operatorname{Re} z \left\{ F(s) \frac{z}{z - e^{sh}}, s_k \right\}. \quad (3.6)$$

unde s_k sunt reziduurile funcției $F(s)$.

Relația (3.6) reprezintă formula de discretizare pentru semnale. Pentru sisteme se știe că funcția de transfer reprezintă răspunsul sistemului la intrare impuls Dirac. Deci putem scrie că $H_d(z) = \mathcal{Z}\{h_k(t)\}$ și reprezentarea grafică a acestei situații este prezentată în figura 3.10.

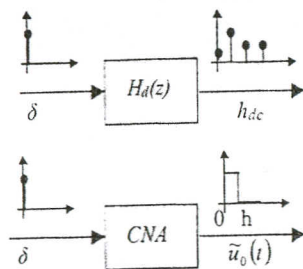
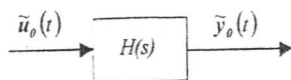


Fig. 3.10. Sistem discret cu intrare impuls Dirac și convertor de ordin unu.

Sistemul discret reprezentat în figura 3.10 trebuie să fie echivalent intrare-ieșire cu un sistem continuu $H(s)$ căruia i se aplică intrarea $\tilde{u}_0(t)$ și are ieșirea $\tilde{y}_0(t)$:



Intrarea în sistem este constantă pe porțiuni deci putem să scriem:

$$\tilde{u}_0(t) = 1(t) - 1(t - h)$$

în această situație vom obține pentru ieșire:

$$\tilde{y}_0(t) = \tilde{y}_1(t) - \tilde{y}_1(t - h)$$

Deoarece ieșirea sistemului discret trebuie să fie identică cu ieșirea sistemului continuu (cele două sisteme sunt echivalente):

$$\tilde{y}_0(t) \equiv h_{cd}(t)$$

$$h_{cd}(t) = \tilde{y}_{1d}(t) - \tilde{y}_{1d}(t - h)$$

Aplicând transformata Z pentru semnalul $h_{cd}(t)$ vom obține funcția de transfer caracteristică sistemului discret $H_d(z)$:

$$H_d(z) = \mathcal{Z}\{h_{cd}(t)\} = \mathcal{Z}\{\tilde{y}_{1d}(t) - \tilde{y}_{1d}(t - h)\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\{\tilde{y}_{1d}(t)\} =$$

$$= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{\frac{H(s)}{s}\right\} = \frac{z-1}{z} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1-j\infty}^{\sigma_1+j\infty} \frac{H(s)}{s} \frac{z}{z - e^{sh}} ds$$

sau utilizând reziduurile obținem:

$$H_d(z) = (z-1) \sum \operatorname{Re} z \left\{ \frac{H(s)}{s} \frac{1}{z - e^{sh}}, s_k \right\} \quad (3.7)$$

Relația (3.7) reprezintă modalitatea directă de discretizare a unui sistem continuu reprezentat prin funcție de transfer. Valorile s_k sunt reziduurile funcției $\frac{H(s)}{s}$.

Exemplu: Fie un sistem continuu descris de funcția de transfer $H(s) = \frac{1}{s}$ (cunoscut și sub numele de element integrator). Ne propunem să găsim un echivalent discret al său.

Abordând prima modalitate de calcul vom găsi mai întâi o realizare și anume:

$$A = [0] \quad B = [1] \quad C = [1] \quad D = [0]$$

adică sistemul poate fi scris sub forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = u; \\ y = x; \end{cases}$$

Aplicăm apoi formulele de discretizare a sistemelor reprezentate în spațiul stărilor (3.4) și (3.5) și determinăm un sistem discret echivalent, reprezentat tot în spațiul stărilor și caracterizat de matricele:

$$A_d = e^{Ah} = I, \quad B_d = [h]$$

$$B_d = \int_0^h e^{A\tau} B d\tau = [h]$$

$$C_d = C = [1] \quad D_d = D = [0]$$

sau sub forma standard:

$$\begin{cases} x(t+1) = x(t) + h \cdot u(t); \\ y(t) = x(t); \end{cases}$$

Sistemul discret astfel obținut are funcția de transfer:

$$H(z) = \frac{h}{z-1};$$

relație ce se poate determina ușor aplicând formula 2.32.

Dacă utilizăm calculul direct:

$$\begin{aligned} H(z) &= (z-1) \sum \operatorname{Re} z \left\{ \frac{H(s)}{s} \frac{1}{z - e^{sh}} \right\} = (z-1) \operatorname{Re} z \left\{ \frac{1}{s^2} \frac{1}{z - e^{sh}}, s_{1,2} = 0 \right\} = \\ &= (z-1) \frac{d}{ds} (z - e^{sh})^{-1} \Big|_{s=0} = (z-1) (-1)(-h) \frac{1}{(z - e^{sh})^2} \Big|_{s=0} = \frac{h}{z-1}; \end{aligned}$$

Observăm că s-a găsit, așa cum era de așteptat, același rezultat și metoda este mult mai rapidă.

4 STABILITATEA SISTEMELOR LINEARE

Stabilitatea este o proprietate calitativă a sistemelor și se referă la comportarea lor dinamică. Se poate vorbi despre *stabilitate internă* și despre *stabilitate externă*.

4.1 Stabilitate internă – definire, interpretare

4.1.1 Definirea stabilității interne

Definiție: Un sistem linear este *intern asimptotic stabil* dacă și numai dacă:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = 0 \quad (4.1)$$

sau explicitând:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{cases} e^{At} = 0, & t \in R \\ A^t = 0, & t \in Z \end{cases}$$

Teoremă: Un sistem este intern asimptotic stabil dacă și numai dacă orice regim liber tinde către zero pentru $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_t(t) = 0. \quad (4.2)$$

Acest lucru este evident dacă avem în vedere că regimul liber al unui sistem se poate exprima prin relația:

$$x_t = \Phi(t) \cdot x_0$$

înlocuind în (4.2):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_t(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) \cdot x_0 = 0$$

și considerând condiții inițiale oarecare, deci și diferite de cele nule, rezultă că singură posibilitate de îndeplinire a condiției (4.2) relația (4.1) adică definiția

stabilității interne asimptotice. Putem spune astfel că teorema de mai sus este o definiție echivalentă pentru stabilitatea internă asimptotică.

Observații:

- Se poate constata că stabilitatea internă este o proprietate caracteristică matricei A . Matricele B , C , D , care sunt legate direct de intrare/ieșire nu intervin (de aceea se spune că este o stabilitate internă sistemului).
- Interpretarea stabilității: dacă un sistem este într-o stare de echilibru oarecare, dată, și este scos din aceasta datorită unei acțiuni exterioare el va reveni în starea inițială de echilibru la încetarea acțiunii perturbatoare.

Teoremă: Un sistem linear este intern asimptotic stabil dacă și numai dacă:

- a) pentru sisteme continue ($t \in \mathbb{R}$): valorile proprii ale matricei A au partea reală strict negativă:

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0, \quad (\forall)\lambda_i \in \sigma(A)$$

- b) pentru sisteme discrete ($t \in \mathbb{Z}$): valorile proprii ale matricei A au modulul strict subunitar:

$$|\lambda_i| < 1, \quad (\forall)\lambda_i \in \sigma(A)$$

O demonstrație completă a acestei teoreme este prezentată în [28], noi vom prezenta aici doar câteva elemente sintetice necesare înțelegerii acesteia. Dacă valorile proprii λ_i sunt distincte atunci matricea A se poate aduce la o formă diagonală utilizând o transformare S adică:

$$\tilde{A} = S^{-1}AS, \quad \text{unde } S \text{ este matrice modală.}$$

Pentru sisteme continue calculăm exponențiala matriceală:

$$e^{At} = Se^{\tilde{A}t}S^{-1}$$

și ținând cont de relația (4.1):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$$

deducem că:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_i t} = 0, \quad (\forall)\lambda_i \in \sigma(A)$$

Această ultimă condiție este îndeplinită doar dacă toate valorile proprii ale matricei A sunt cu partea reală strict mai mică decât zero:

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0, \quad (\forall)\lambda_i \in \sigma(A)$$

Pentru sistemele discrete se calculează A' și se pune similar cazului continuu condiția (4.1):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A' = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{A}' = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_i' = 0, \quad (\forall)\lambda_i \in \sigma(A);$$

condiție îndeplinită în mod evident dacă toate valorile proprii ale matricei A au modulul strict mai mic decât unu:

$$|\lambda_i| < 1, \quad (\forall)\lambda_i \in \sigma(A).$$

Interpretarea grafică a stabilității este prezentată pentru sisteme continue în figura 4.1 iar pentru sisteme discrete în figura 4.2.

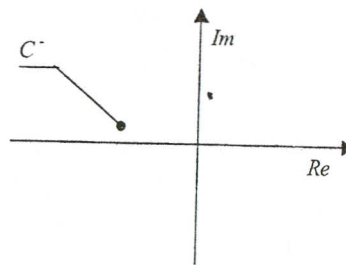


Fig. 4.1. Domeniul de stabilitate pentru sisteme lineare continue

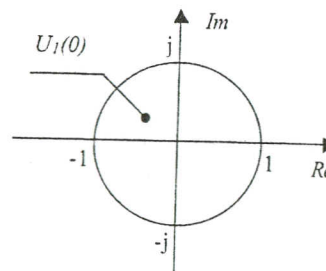


Fig. 4.2. Domeniul de stabilitate pentru sisteme lineare discrete

Astfel se spune că dacă valorile proprii ale matricei caracteristice sistemului sunt în **domeniul de stabilitate** (zona hașurată din cele două figuri de mai sus) atunci sistemul este intern asimptotic stabil. Domeniul de stabilitate este deci:

- semiplanul stâng notat și cu C^- pentru sisteme netede;
- discul de rază unu centrat în origine pentru sisteme discrete notat și cu $U_1(0)$.

Observații:

- Teorema de mai sus ne furnizează un criteriu practic foarte simplu de testare a stabilității interne. Astfel:

- se calculează mai întâi valorile proprii ale matricei A , mulțime numită și spectrul matricei, notată cu $\sigma(A)$. Reamintim aici că valorile proprii sunt soluțiile ecuației:

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \sigma(A)$$

- se testează apoi dacă această mulțime este inclusă în domeniu de stabilitate specific sistemului considerat (continuu sau discret):

$$\sigma(A) \subset C^- \quad \text{pentru sisteme continue;}$$

$$\sigma(A) \subset U_1(0) \quad \text{pentru sisteme discrete;}$$

Dacă această incluziune este îndeplinită atunci putem spune că sistemul este intern asimptotic stabil. Atragem atenția că relația de incluziune este strictă, adică pentru stabilitatea asimptotică nu se admit valori proprii pe frontiera domeniului de stabilitate (axa imaginară respectiv cercul unitate). Se poate vorbi și de o stabilitate simplă (corespunzătoare stabilității indifferente din mecanică) în care se admit și valori proprii pe frontieră dar doar de ordin unu de multiplicitate. Însă din punctul de vedere al teoriei sistemelor de reglare automată această stabilitate simplă nu prezintă un interes practic. Noi o vom considera în continuare ca instabilitate iar termenul de stabilitate asimptotică internă va putea fi înlocuit cu termenul de stabilitate internă.

- Să vedem acum ce se petrece cu stabilitatea în cazul unei operații de discretizare. Considerăm un sistem continuu stabil. Prin discretizare matricea caracteristică sistemului discret echivalent este $A_d = e^{Ah}$. Printr-o operație de diagonalizare această matrice poate fi adusă sub forma:

$$A_d = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 h} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 h} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n h} \end{bmatrix}$$

Valorile proprii sunt expresii de forma $e^{\lambda_i h}$ și deoarece $\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0$ atunci obținem evident că $|e^{\lambda_i h}| < 1$. Deci valorile proprii ale sistemului discret echivalent sunt în domeniul de stabilitate (cercul unitate). Putem să enunțăm deci o consecință a celor prezentate mai sus:

Consecință: Dacă sistemul continuu (A, B, C) este intern asimptotic stabil atunci și sistemul obținut prin discretizare (A_d, B_d, C_d) este intern asimptotic stabil (bineînțeles pentru pas de discretizare $h \neq 0$!). Se spune că proprietatea de stabilitate se păstrează prin discretizare.

4.1.2 Interpretarea stabilității interne

Dacă un sistem este intern stabil și se află în starea x_0 și nu i se aplică nici o intrare, sistemul va tinde asimptotic spre zero. Exemple:

- Dacă unui motor de curent continuu cu excitație independentă aflat în starea $\begin{bmatrix} i_0 \\ \Omega_0 \end{bmatrix}$ nu i se mai aplică nici o tensiune de alimentare atât viteza cât și curentul vor tinde treptat spre zero.
- La fel se prezintă lucrurile și cu un circuit RLC serie la care intrarea este scurtcircuitată, energia înmagazinată în condensator și în bobină este disipată pe rezistență și sistemul ajunge în starea zero.
- Același fenomen se petrece și cu un sistem aflat într-o stare x_0 și asupra căruia acționează o perturbație datorită căreia sistemul ajunge în starea x_1 . La dispariția perturbației sistemul revine în starea inițială x_0 , bineînțeles dacă este intern stabil.

Exemplu: Analiza stabilității circuitului RL serie.

Ecuația care descrie circuitul este:

$$u = Ri + L \frac{di}{dt}$$

care se rescrie:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i + \frac{1}{L}u$$

Matricea caracteristică este:

$$A = \left[-\frac{R}{L} \right]$$

și are ca valoare proprie: $\lambda = -\frac{R}{L} < 0$ deci sistemul este intern stabil dacă $R \neq 0$.

Dacă însă valoarea rezistenței este zero atunci sistemul devine instabil. Acest lucru este evident dacă ne reamintim că o bobină este practic un integrator. Astfel dacă la intrare tensiunea este constantă curentul crește linear putând ajunge la valori foarte mari, teoretic la infinit. Nu același lucru se petrece dacă îl alimentăm de la o sursă de tensiune sinusoidală de exemplu. Atunci valoarea curentului este mărginită.

Deci putem spune, pe baza acestui exemplu simplu, că ieșirea unui sistem care nu este intern stabil poate fi mărginită sau nemărginită. În practică ne deranjează cel mai mult această posibilitate ca o anumită mărime să devină foarte mare, pentru că putem deteriora sistemul.

Un circuit RL serie poate fi privit ca un sistem cu reacție negativă conform figurii 4.3:

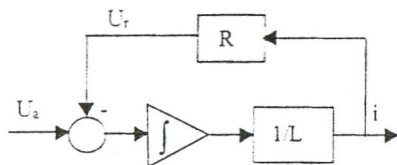


Fig. 4.3. Reprezentarea schematică a unui circuit RL serie în care tensiunea de pe rezistență este o reacție negativă.

Observăm că rezistența introduce o reacție negativă. Deci tensiune de pe bobină scade pe măsură ce crește curentul din circuit. Dacă tensiunea de alimentare este constantă valoarea stabilizată se obține când tensiune de pe bobină este zero.

Nu întotdeauna o reacție negativă implică obținerea stabilității. De exemplu pentru circuitul RLC serie matricea caracteristică este:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}, \text{ și valorile proprii sunt soluțiile ecuației: } \lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0.$$

Din figura 4.4 ne dăm seama că chiar dacă vom considera cazul în care rezistența R este zero, și atunci sistemul devine instabil, mai rămâne o reacție negativă.

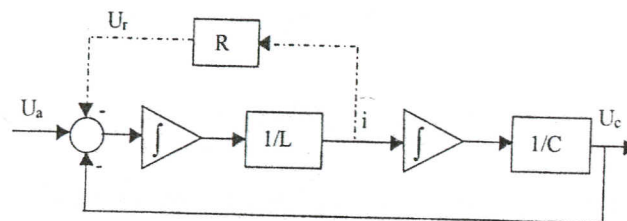


Fig. 4.4. Reprezentarea schematică a unui circuit RLC serie. Dacă $R=0$ conexiunea punctată dispare.

Putem să spunem însă că dacă sistemul are reacție negativă după toate stările atunci este intern stabil.

4.2 Stabilitatea externă – definire, interpretare

4.2.1 Definirea stabilității externe

Definiție: Un sistem (A, B, C, D) este strict stabil în sensul intrare mărginită/ieșire mărginită (BIBO) dacă:

$$\int_0^{\infty} |h_c(t)| dt < \infty, \quad t \in \mathbb{R} \quad (4.3)$$

$$\sum_0^{\infty} |h_c(t)| < \infty, \quad t \in \mathbb{Z}$$

Teoremă:

- a) Un sistem neted (A, B, C, D) este strict stabil (BIBO) dacă și numai dacă toți polii lui $H(s)$ au partea reală strict negativă.

- b) Un sistem discret (A_d, B_d, C_d, D_d) este strict stabil (BIBO) dacă și numai dacă toți polii lui $H(z)$ au *modulul subunitar*.

Nu vom prezenta nici în acest caz o demonstrație riguroasă. Ideea ei este însă faptul că dacă avem un pol a al unei funcții de transfer atunci ieșirea pe care o determină acesta este:

$$y_a(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-a} \right\} = e^{at}, \text{ pentru sisteme continue}$$

$$y_a(t) = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z-a} \right\} = a^t, \text{ pentru sisteme discrete}$$

Această ieșire este mărginită doar dacă este îndeplinită condiția din enunțul teoremei. Putem să generalizăm acest raționament pentru toți polii funcției de transfer.

Observații:

1. Stabilitatea în sensul intrare mărginită/ieșire mărginită se mai numește și *stabilitate externă* deoarece mărimile care intervin sunt doar cele ce se 'văd' din exterior, mărimile de stare nu apar în relații.
2. Teorema de mai sus este criteriul practic de testare a stabilității externe. Observăm similitudinea cu stabilitatea internă în ceea ce privește domeniile de stabilitate (atât pentru sisteme continue cât și pentru sisteme discrete). De fapt acestea sunt identice cu cele din figurile 4.1 și respectiv 4.2. Deosebirea este că acum nu mai vorbim de mulțimea valorilor proprii ci de mulțimea polilor (valorile în care se anulează numitorul funcției de transfer).
3. Și în acest caz remarcăm că prezența unor poli pe frontiera domeniului de stabilitate determină instabilitatea externă a sistemului. La fel putem vorbi de o stabilitate externă simplă, în care se admit și poli de ordin de multiplicitate unu pe frontieră, dar care nu prezintă un interes practic. Astfel în continuare prin termenul de 'stabilitate externă' vom înțelege strict stabilitatea în sens intrare mărginită/ieșire mărginită (BIBO).

4.2.2 Interpretarea stabilității externe

Teoremă: Un sistem (A, B, C, D) este strict stabil extern dacă și numai dacă pentru:

$$(\forall) \quad u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ |u(t)| < N & t \geq 0 \end{cases}$$

componenta forțată a ieșirii este mărginită, adică:

$$(\exists) M \in \mathbb{R} \text{ a.i. } |y_f(t)| < M \text{ pentru } (\forall) t \in \mathbb{R}$$

Demonstrație:

$$|y_f(t)| = \left| \int_0^t h_c(\tau) u(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t h_c(\tau) |u(t-\tau)| d\tau \leq N \int_0^t h_c(\tau) d\tau \leq N \cdot K$$

Deci dacă sistemului îi aplicăm o intrare mărginită atunci ieșirea sa forțată este mărginită. Despre cea liberă nu se poate spune nimic.

Corolar: Dacă un sistem este intern asimptotic stabil atunci este și strict stabil extern. Reciproca este valabilă numai dacă prin eventuala simplificare a funcției de transfer nu se pierd poli instabili:

$$\text{intern asimptotic stabil} \Rightarrow \text{strict stabil extern (BIBO)}$$

Exemplu: Fie un sistem descris de matricele:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad C = (1 \quad 0)$$

Verificăm stabilitatea internă:

$$\det[\lambda I - A] = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1.$$

deoarece nu are toate valorile proprii în semiplanul stâng nu este intern asimptotic stabil. Să vedem ce putem spune despre stabilitatea externă. Pentru aceasta avem nevoie de funcția de transfer:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = (1 \ 0) \frac{\begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}{s^2 - 1} =$$

$$= \frac{(1 \ 0) \begin{pmatrix} -2(s+1) \\ s-1 \end{pmatrix}}{s^2 - 1} = \frac{-2(s-1)}{s^2 - 1} = \frac{-2}{s+1} \Rightarrow s_1 = -1$$

Constatăm că sistemul este strict stabil extern pentru că are polul -1 (care este în semiplanul stâng).

Concluzii:

a) Dacă avem îndeplinită condiția:

$$\sigma(A) \subset \begin{cases} C^- & \text{pentru continuu} \\ U_1(0) & \text{pentru discret} \end{cases}$$

atunci sistemul este intern asimptotic stabil (sau mai scurt intern stabil). În acest caz putem spune că:

- Orice regim liber se stinge spre zero;
- Pentru orice intrare mărginită sistemul are toate stările și ieșirile mărginite.
- Sistemul este și strict stabil extern (mai scurt extern stabil).

b) Dacă (A, B, C) este intern stabil atunci și sistemul discret echivalent (A_d, B_d, C_d) este intern stabil, dacă $h \neq 0$.

Acest rezultat poate fi mai ușor de înțeles dacă ținem cont de faptul că $u(t - \tau) = u_d(t - 1)$ și că imaginile lor prin transformatele Laplace respectiv Z sunt:

$$\mathcal{L}\{u(t - \tau)\} = e^{-s\tau} u(s)$$

$$\mathcal{Z}\{u_d(t - 1)\} = z^{-1} u(z)$$

deci operatorul de întârziere are imaginile $e^{-s\tau}$ respectiv z^{-1} . Putem așadar să definim o transformare omografică $z^{-1} = e^{-s\tau}$ sau:

$$z = e^{s\tau} \quad s = \frac{1}{\tau} \ln(z)$$

și acum putem deduce foarte ușor că dacă $\operatorname{Re}\{s\} < 0$ atunci și $|z| < 1$, adică proprietatea de stabilitate se păstrează prin discretizare.

Reamintim aici modul de calcul direct al funcției de transfer pentru sistemul discret echivalent:

$$H_d(z) = (z - 1) \sum \operatorname{Re} z \left\{ \frac{H(s)}{s} \frac{1}{z - e^{s\tau}}, s_k \right\}$$

Polii sistemului discret sunt de forma $z_k = e^{s_k \tau}$ unde s_k sunt polii sistemului continuu.

c) Dacă (A, B, C) este strict stabil extern (BIBO) atunci:

- Dacă prin calculul lui $H(s)$ nu s-au simplificat poli cu partea reală pozitivă atunci sistemul este și intern stabil;
- Dacă însă s-au făcut astfel de simplificări sistemul nu mai este intern stabil. Oricum ar fi putem spune că ieșirea forțată $y_f(t)$ este mărginită, dacă intrarea aplicată este și ea mărginită. Nu se știe însă nimic despre răspunsul global al sistemului pentru că ieșirea liberă $y_l(t)$ poate fi fie mărginită fie nemărginită în funcție de sistemul considerat.

d) Stabilitatea internă depinde exclusiv de matricea A iar cea externă depinde de toate matricele sistemului A, B, C .

Testarea stabilității sistemelor poate fi făcută în două moduri și anume:

- Prin calculul mulțimii valorilor proprii sau a polilor și compararea cu domeniul de stabilitate. Această metodă a fost prezentată până în prezent.
- Criteriul Hurwitz pentru sisteme netede:

Un polinom:

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

are toate rădăcinile cu partea reală negativă dacă și numai dacă toți minorii principali ai matricei:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-5} & \cdots \\ 1 & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-4} & \cdots \\ 0 & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} & \cdots \\ 0 & 1 & \alpha_{n-2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

sunt strict pozitivi.

Acest test poate fi făcut analitic fără a cunoaște neapărat valorile numerice ale coeficienților ci doar unele condiții ale lor. Este cazul sistemelor adaptive unde vom găsi astfel un domeniu de variație a unor parametrii nu neapărat o valoare fixă.

Pentru sisteme discrete criteriul se aplică după ca se face mai întâi o transformare omografică:

$$z = \frac{s+1}{s-1}$$

care leagă discul unitate centrat în origine $U_1(0)$ de semiplanul stâng C^- .

5 RĂSPUNSUL SISTEMELOR LA INTRĂRI STANDARD

Vom analiza în continuare răspunsul sistemelor lineare la anumite tipuri de intrări numite *intrări standard*. Acestea fie au relevanță practică fie sunt utile pentru înțelegerea funcționării unor sisteme și pot fi:

- treaptă;
- rampă;
- sinusoidală.

5.1 Răspunsul sistemelor la intrare treaptă

În acest caz avem că $u(s) = \frac{1}{s}$ și deci:

$$y_f(s) = H(s) \cdot u(s) = H(s) \cdot \frac{1}{s}$$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ H(s) \cdot \frac{1}{s} \right\} = H(0) + \sum \operatorname{Re} z \left\{ \frac{H(s)}{s} e^{st}, s_k \right\} = y_p(t) + y_t(t)$$

Răspunsul sistemului are o componentă permanentă $y_p(t)$ de forma intrării și una tranzitorie $y_t(t)$. Dacă sistemul este extern stabil atunci:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_t(t) = 0.$$

La fel pentru orice tip de intrare și pentru orice sistem stabil extern răspunsul are două componente:

- permanentă, de forma intrării;
- temporară, care se anulează în timp;

Deci răspunsul ia forma intrării după un anumit regim tranzitoriu.

Exemplu:

Fie un sistem de scris de funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{a}{1+sT}$$

numit și element de întârziere de ordin unu.

Vom considera intrare treaptă adică $u(s) = \frac{1}{s}$, componenta forțată va fi:

$$y_f(s) = \frac{1}{s(1+sT)}$$

și în timp:

$$y_f(t) = a - ae^{-\frac{t}{T}} = a \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

Componenta permanentă este $y_p = a$ și cea tranzitorie $y_t = -ae^{-\frac{t}{T}}$ așa după cum se poate vedea și din figura 5.1.

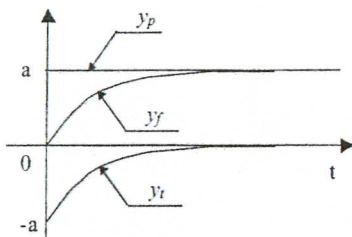


Fig. 5.1. Răspunsul unui element de întârziere de ordin unu la intrare treaptă cu evidențierea componentelor permanentă și tranzitorie.

Exemplu: Să studiem răspunsul unui element de întârziere de ordinul doi la intrare de tip treaptă unitară. Funcția de transfer a sistemului este:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

în care ζ este factorul de amortizare iar ω_n se numește pulsația naturală a sistemului. Vom considera doar cazul în care $\omega_n > 0$ și $0 \leq \zeta \leq 1$. Polii sistemului sunt soluțiile numitorului și depind de valorile lui ζ și ω_n :

$$\Delta = 4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2 = 2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Se vede că dacă $|\zeta| > 1$ rădăcinile sunt reale iar dacă $|\zeta| < 1$ sunt complex conjugate. În continuare analizăm această ultimă situație.

$$\begin{aligned} y_f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} \right\} = \sum \operatorname{Re} z \left\{ \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{e^{st}}{s}, s_k \right\} = \\ &= 1 + \sum \operatorname{Re} z \left\{ \frac{\omega_n^2}{s + \zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{e^{st}}{s}, s_k \right\} = \\ &= 1 + \frac{\omega_n^2}{-\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} + \zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{e^{(-\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t}}{(-\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})} + \\ &\quad + \frac{\omega_n^2}{-\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} + \zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{e^{(-\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t}}{(-\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})} = \\ &= 1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{2j\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{e^{j\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}}}{(-\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2})} + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{-2j\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{e^{-j\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}}}{(-\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2})} = \\ &= 1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[\frac{e^{j\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}}}{2j(-\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2})} + \frac{e^{-j\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}}}{2j(\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2})} \right] \end{aligned}$$

Pentru simplificare vom nota: $-\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2} = \cos\theta + j\sin\theta$. Răspunsul sistemului devine:

$$y_f(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[\frac{e^{j\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot e^{-j\theta}}{2j} + \frac{e^{-j\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot e^{j\theta}}{-2j} \right] = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2} + \alpha)$$

$$\text{unde: } \alpha = \arctg \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

Ne propunem acum să determinăm maximul răspunsului sistemului. Determinăm rădăcinile derivatei:

$$\frac{dy_f}{dt} = -\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[-\zeta\omega_n \sin(\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2} + \alpha) + \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \cos(\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2} + \alpha) \right]$$

$$\frac{dy_f}{dt} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n t \sqrt{1-\zeta^2})$$

soluțiile se obțin pentru:

$$t_k = \frac{k\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

Primul maxim, pentru t_f ($k=1$) este:

$$y_M = 1 - \frac{e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left(-\sqrt{1-\zeta^2} \right) = 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

și deci suprareglajul, adică cu cât depășește răspunsul valoarea intrării, este:

$$\sigma = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

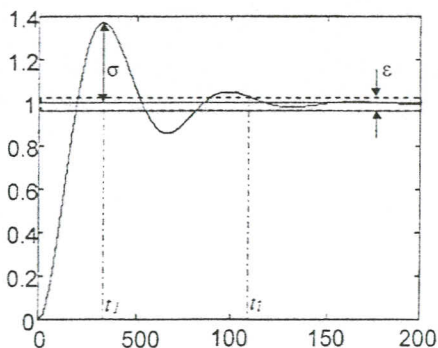


Fig. 5.2. Răspunsul unui element de întârziere de ordin doi la intrare treaptă unitară.

Dacă punem condiția ca răspunsul sistemului să se încadreze într-o anumită gamă de valori în jurul semnalului de intrare, considerând deci o anumită eroare, se obține o valoare de timp numit *timp de încadrare* (t_i). Alegând de exemplu o eroare de 2% se obține:

$$|y_f(t) - 1| = |y_i(t)| < 0.02 \Rightarrow t \geq \frac{4}{\zeta\omega_n} \Rightarrow t_i = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

5.2 Răspunsul sistemelor la intrare rampă unitară

Transformata Laplace a unui semnal rampă unitară este $u(s) = \frac{1}{s^2}$. Considerăm tot un element de întârziere de ordin unu. Componenta forțată a răspunsului este:

$$y_f(s) = \frac{a}{1+sT} \frac{1}{s^2}$$

sau aplicând transformata Laplace inversă:

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{a}{1+sT} \frac{1}{s^2} \right\} = \sum \text{Re} z \left\{ \frac{a}{1+sT} \frac{e^{st}}{s^2}; s_k \right\} = \sum \text{Re} z \left\{ \frac{\frac{a}{T}}{s + \frac{1}{T}} \frac{e^{st}}{s^2}; s_k \right\} =$$

$$= \frac{a}{T} \frac{e^{-\frac{t}{T}}}{(1/T)^2} + \frac{d}{ds} \left(\frac{a/T}{s+1/T} e^{st} \right) \Big|_{s=0} = aTe^{-\frac{t}{T}} + t \frac{(a/T)e^{st}}{s+1/T} \Big|_{s=0} - \frac{(a/T)e^{st}}{(s+1/T)^2} \Big|_{s=0} =$$

$$= aTe^{-\frac{t}{T}} + ta - aT;$$

și în final putem scrie:

$$y_f(t) = a(t-T) + aTe^{-\frac{t}{T}} = y_p + y_i;$$

Componenta permanentă este tot o rampă dar de altă pantă decât cea de la intrare și în plus este și întârziată, așa după cum se vede în figura 5.3.

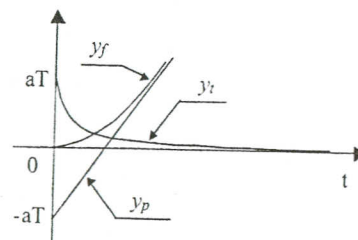


Fig. 5.3. Răspunsul unui element de întârziere de ordin unu la intrare rampă cu evidențierea componentelor permanentă și tranzitorie.

6 CONEXIUNEA SISTEMELOR

În schemele de reglare automată apar mai multe sisteme conectate între ele în diverse moduri. Apare ca firească necesitatea simplificării schemei utilizând conexiuni elementare standard. Acestea sunt:

- serie;
- paralel;
- reacție care poate fi: negativă sau pozitivă;

Problema care se pune în fiecare caz în parte este găsirea unui sistem echivalent conexiunii formate din două sisteme. Vom analiza în continuare, pe rând, fiecare conexiune în parte.

6.1 Conexiunea serie

În acest caz ieșirea primului sistem este conectată la intrarea celui de-al doilea așa cum se poate vedea în figura 6.1.

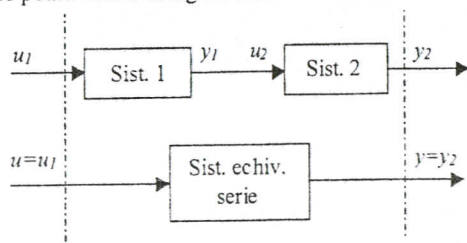


Fig. 6.1. Conexiunea serie a două sisteme și sistemul echivalent rezultat

Caracteristicile conexiunii serie sunt, conform figurii de mai sus, următoarele:

$$\begin{aligned} u_2 &= y_1 \\ u &= u_1 \\ y &= y_2 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Considerând că sistemele 1 și 2 sunt descrise în spațiul stărilor de matricele (A_1, B_1, C_1, D_1) și respectiv (A_2, B_2, C_2, D_2) vom putea scrie:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases} \quad (6.2)$$

sau ținând cont de relațiile (6.1) sistemul doi de ecuații de mai sus devine:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1 + B_2 D_1 u_1 \\ y = C_2 x_2 + D_2 C_1 x_1 + D_2 D_1 u \end{cases}$$

Sistemul echivalent conexiunii în serie va avea ca mărimi de stare reuniunea mărimilor de stare ale celor două sisteme inițiale astfel încât putem spune că:

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ și vom scrie sub formă generală:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} u \quad (6.3)$$

$$y = [D_2 C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + D_2 D_1 u$$

Relațiile (6.3) descriu în spațiul stărilor sistemul echivalent rezultat. Putem calcula deci foarte ușor matricele sale pornind de la cele ale sistemelor inițiale:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

$$C = [D_2 C_1 \quad C_2] \quad D = D_2 D_1$$

Dacă D_1 și D_2 sunt nule atunci matricele sistemului echivalent devin:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= [0 \quad C_2] \quad D = 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Proprietăți ale conexiunii serie:

- Spectrul sistemului echivalent este reuniunea spectrelor inițiale:

$$\sigma(A) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$$

O consecință directă a acestei proprietăți este că dacă sistemele componente sunt intern asimptotic stabile atunci și sistemul serie rezultat este. Similar dacă

sistemul rezultat este asimptotic stabil atunci putem afirma că cele două sisteme componente sunt asimptotic stabile.

- Dacă utilizăm reprezentarea cu funcții de transfer se poate arăta foarte ușor că

$$H(\lambda) = H_1(\lambda) \cdot H_2(\lambda) \quad (6.6)$$

unde H_1 și H_2 sunt funcțiile de transfer pentru sistemele inițiale iar H este funcția de transfer rezultantă.

În acest caz există posibilitatea ca sistemul rezultat să fie extern stabil și totuși sistemele componente să fie instabile. Acest lucru se poate deduce ușor analizând exemplul următor.

Exemplu: Considerăm două sisteme descrise de:

$$H_1(s) = \frac{1}{s-1} \quad H_2(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

Sistemul echivalent serie este descris de funcția:

$H(s) = \frac{1}{s+1}$ și este stabil extern. Observăm însă că primul sistem nu este stabil ceea ce demonstrează cele afirmate mai sus.

6.2 Conexiunea paralel

În cazul acestei conexiuni, prezentată în figura 6.2, cele două sisteme au aceeași intrare iar ieșirile lor sunt adunate între ele.

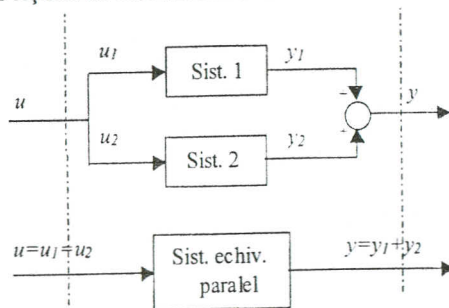


Fig. 6.2. Conexiunea în paralel a două sisteme lineare

Ecuatiile caracteristice conexiunii paralel sunt:

$$u_1 = u_2 = u$$

$$y = y_1 + y_2$$

Urmând aceleași etape ca la conexiunea serie găsim matricele sistemului echivalent:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

$$C = [C_1 \quad C_2] \quad D = D_1 + D_2$$

Dacă D_1 și D_2 sunt nule atunci și matricea D a sistemului echivalent va fi nulă.

Proprietăți ale conexiunii paralel:

- Spectrul sistemului echivalent este reuniunea spectrelor inițiale:

$$\sigma(A) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$$

Deci dacă sistemele componente sunt intern stabile atunci și sistemul rezultat este stabil. Similar dacă sistemul rezultat este asimptotic stabil atunci putem afirma că cele două sisteme componente sunt asimptotic stabile.

- Utilizând reprezentarea cu funcții de transfer obținem că:

$$H(\lambda) = H_1(\lambda) + H_2(\lambda) \quad (6.8)$$

unde H_1 și H_2 sunt funcțiile de transfer pentru sistemele inițiale iar H este funcția de transfer rezultantă.

Și aici există posibilitatea ca sistemul rezultat să fie extern stabil și sistemele componente să fie instabile așa cum se poate vedea analizând exemplul următor.

Exemplu: Considerăm două sisteme descrise de:

$$H_1(s) = \frac{1}{s-1} \quad H_2(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1} = \frac{-2}{(s+1)(s-1)}$$

Sistemul echivalent paralel este descris de funcția $H(s) = \frac{1}{s+1}$ și este stabil extern deși primul sistem nu este.

6.3 Conexiunea în reacție

În cazul acestei conexiuni (vezi figura 6.3) ieșirea primului sistem este aplicată la intrarea celui de-al doilea și ieșirea sistemului doi este adusă la intrarea sistemului unu, justificând astfel denumirea de 'conexiune în reacție'. Dacă semnul este '+' atunci se spune că *reacția e pozitivă* iar dacă este '-' atunci *reacția este negativă*.

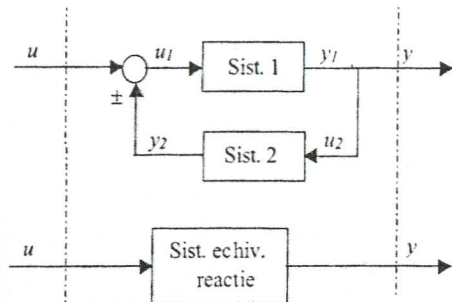


Fig. 6.3. Conexiunea în reacție a sistemelor lineare

Relațiile caracteristice conexiunii reacție sunt:

$$u_1 = u \pm y_2$$

$$u_2 = y_1$$

$$y = y_1$$

Vom considera aici doar cazul în care matricele D_1 și D_2 sunt nule, astfel că cele două sisteme vor fi descrise de ecuațiile:

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1$$

$$y_1 = C_1 x_1$$

$$\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2$$

$$y_2 = C_2 x_2$$

și folosind relațiile caracteristice conexiunii obținem:

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \pm B_1 C_2 x_2$$

$$\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1$$

$$y = C_1 x_1$$

Putem acum să scriem matricele sistemului rezultat în cazul conexiunii în reacție:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \pm B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [C_1 \quad 0]$$

Proprietăți ale conexiunii în reacție:

- Utilizând reprezentarea I/O obținem funcția de transfer echivalentă:

$$H(\lambda) = \frac{H_1 H_2}{1 \mp H_1 H_2} \quad (6.10)$$

- Valorile proprii ale matricei sistemului echivalent sunt soluțiile polinomului de la numitorul funcției de transfer dată de relația (6.10), cu observația că nu trebuie să facem nici o simplificare. Considerând cele două funcții de transfer ca un raport de polinoame:

$$H_1(\lambda) = \frac{v_1(\lambda)}{\chi_{A_1}(\lambda)} \quad H_2(\lambda) = \frac{v_2(\lambda)}{\chi_{A_2}(\lambda)}$$

atunci polinomul caracteristic sistemului echivalent este:

$$\chi_A(\lambda) = \chi_{A_1}(\lambda) \chi_{A_2}(\lambda) \mp v_1(\lambda) v_2(\lambda)$$

și deci spectrul matricei caracteristice sunt zerourile acestuia:

$$\sigma(A) = \zeta(\chi_{A_1}(\lambda) \chi_{A_2}(\lambda) \mp v_1(\lambda) v_2(\lambda))$$

Observăm că prin această conexiune putem să stabilizăm sistemele intern instabile deoarece putem să modificăm spectrul matricei echivalente. Acest rezultat este foarte important și în teoria sistemelor de reglare automată se utilizează mult această conexiune.

Teoremă: Fiind dat un sistem $(A_1, B_1, C_1)_n$ cu $H_1(\lambda) = \frac{v_1(\lambda)}{\chi_{A_1}(\lambda)}$ ireductibilă (în

acest caz se spune că *sistemul este minimal*) și un polinom arbitrar $\chi(\lambda)$ de grad $2n$, atunci există un sistem $(A_2, B_2, C_2)_n$ care conectat în

reacție pozitivă (eventual negativă) cu primul va rezulta un sistem echivalent cu polinomul caracteristic:

$$\chi_A(\lambda) \equiv \chi(\lambda)$$

Cu alte cuvinte spectrul sistemului rezultat este identic cu rădăcinile unui polinom dorit de noi (putem deci să impunem spectrul). Sistemul pus în reacție depinde de tipul acesteia, pozitivă sau negativă, și are **ordinul** n adică egal cu al sistemului inițial. Determinarea acestui sistem va fi prezentată în detaliu în capitolul 9.

7 PROPRIETĂȚILE STRUCTURALE ALE SISTEMELOR

În cadrul acestui capitol se vor prezenta câteva proprietăți caracteristice sistemelor precum și modalități de testare a lor.

7.1 Controlabilitate

Definiție: Un sistem este **controlabil** dacă pentru orice stare dată X , există o comandă u care face ca $x(t) = X$, pornind din starea inițială $X_0 = 0$.

(*) stare posibilă ($\exists t, u \rightarrow x_0 = 0; x(t) = X$)
Cu alte cuvinte sistemul poate fi adus, printr-o comandă adecvată, din starea inițială nulă într-o stare oarecare dorită de noi. Acest lucru este foarte important de știut mai ales pentru schemele de reglare automată unde se dorește obținerea unui anumit răspuns din partea unui sistem fizic dat. Să vedem în continuare cum se poate testa această proprietate. Pentru aceasta mai trebuie să definim termenii:

- Matrice de controlabilitate R : se obține din matricele sistemului astfel:

$$R = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad \text{unde } n \text{ este ordinul sistemului.}$$

- Indicele de controlabilitate v : este definit ca rangul matricei de controlabilitate:

$$v = \text{rang}[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

Teoremă: Un sistem este controlabil dacă și numai dacă indicele de controlabilitate este egal cu ordinul sistemului:

$$v = n \Leftrightarrow \text{rang}[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] = n \quad (7.1)$$

Demonstrația acestei teoreme o vom prezenta doar pentru cazul discret. Evoluția în timp a unui astfel de sistem este dată de relația:

$$\begin{aligned} x(k) &= A^k x_0 + \sum_{\tau=0}^{k-1} A^{k-\tau-1} Bu(\tau) = A^k x_0 + A^{k-1} Bu(0) + \dots + ABu(k-2) + Bu(k-1) = \\ &= A^k x_0 + R_k u = \begin{bmatrix} 0 & AB & \dots & A^{k-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ceterum} \end{aligned}$$

în care: $u = \begin{bmatrix} u(0) \\ \vdots \\ u(k-1) \end{bmatrix}$ iar R_k este matricea de controlabilitate la pasul k .

Sistemul este controlabil dacă pornind de la o stare inițială nulă $x_0 = 0$ există o comandă u care să ducă sistemul în starea $x(k)$.

$$x(k) = R_k \cdot u \quad (7.2)$$

În sistemul de mai sus cunoaștem starea la care vrem să ajungem și dorim să aflăm comanda u pe care trebuie să o aplicăm sistemului pentru a ajunge aici. Deoarece dimensiunea vectorului de stare $x(k)$ este n și este format din elemente linear independente, rezultă că dimensiunea vectorului u de comandă trebuie să fie și ea cel puțin egală cu n , adică trebuie îndeplinită condiția $k \geq n$. Acest lucru este echivalent cu a spune că un sistem nu poate fi controlat printr-o comandă cu un număr de pași mai mic decât ordinul său. Să vedem însă cât trebuie să fie de mare numărul de pași din comanda aplicată sistemului. Pentru aceasta vom folosi teorema Cayley-Hamilton [70]: "o matrice pătratică A , de ordin n , satisface ecuația $\sigma(A) = 0$, unde $\sigma(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$ reprezintă polinomul caracteristic al matricei A " sau mai explicit:

$$A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \dots + \alpha_n I_n = 0 \quad (7.3)$$

Din relația 7.3 deducem că A^n este o combinație lineară a unor matrici de forma $A^{n-1}, A^{n-2}, \dots, I_n$. Similar $A^{n+1} = A^n A$ este și ea tot o combinație lineară a aceluiași matrici și prin inducție matematică putem afirma că orice putere a lui A mai mare sau egală cu n poate fi exprimată ca o combinație lineară cu elemente matricele $A^{n-1}, A^{n-2}, \dots, I_n$.

Revenim acum la relația 7.2. Dacă alegem un număr de pași $k > n$, în matricea de controlabilitate se obțin coloane de forma $A^n B, A^{n+1} B, \dots$. Acestea nu sunt însă linear independente deoarece pot fi exprimate în funcție de primele coloane $B, AB, \dots, A^{n-1} B$. Deci nu are sens să încercăm controlarea unui sistem printr-o comandă cu un număr mai mare de pași decât este ordinul său.

Deducem că singura posibilitate este ca numărul de pași în care vom încerca să controlăm un sistem este $k=n$. În acest caz relația 7.2 devine:

$$x(n) = R_n \cdot u = R \cdot u \Rightarrow u = R^{-1} x(n) \quad (7.4)$$

dar pentru ca soluția 7.4 să existe trebuie ca matricea de controlabilitate R să admită inversă adică e necesar ca $\text{rang}(R) = n$.

Pentru demonstrația în cazul continuu se poate consulta [28].

Observații:

- Controlabilitatea este o proprietate ce depinde exclusiv de matricele A și B ale sistemului, deci nu depinde de matricea C .
- Dacă $B = I$ atunci sistemul este controlabil indiferent de valoarea lui A .

Teoremă: Un sistem este controlabil dacă și numai dacă:

$$\text{rang}[\lambda I_n - A \quad B] = n \quad (\forall) \lambda \in \sigma(A) \quad (7.4)$$

Acesta este cunoscut sub numele de criteriul lui Hautus-Popov și reprezintă o altă modalitate de a testa controlabilitatea [28].

Exemplu: Fie un sistem descris de matricele:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = I_2$$

Matricea de controlabilitate este: $R = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, indicele de controlabilitate $v = 1$

deci sistemul nu este controlabil deoarece ordinul sistemului este $n=2$. Acest lucru este evident dacă observăm că la starea x_2 nu se poate ajunge cu nici o comandă, nici direct (căci $B(2,1)=0$), nici indirect prin x_1 (căci $A(2,1)=0$). Așadar evoluția acestei stări este dată de ecuația:

$$\dot{x}_2 = 2x_2 \quad \text{sau} \quad x = e^{2t} + c$$

Să calculăm și funcția de transfer a sistemului:

$$H(\lambda) = C(sI - A)^{-1} B = \frac{\begin{bmatrix} s-2 & 0 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}}{(s-1)(s-2)} = \frac{3}{s-1}$$

Teoremă: (De descompunere controlabilă) Orice sistem (A, B, C) este echivalent pe stare cu un sistem având structura:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_c & A_x \\ 0 & A_{nc} \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B_c \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{C} = [C_c \quad C_{nc}] \quad (7.5)$$

în care (A_c, B_c, C_c) este un sistem controlabil echivalent intrare/ieșire cu sistemul inițial.

O demonstrație completă a acestor teoreme poate fi găsită în [28].

Observații:

- Dimensiunea sistemului controlabil, deci a matricei A_c , este egală cu indicele de controlabilitate al sistemului (A, B, C, D) .

7.2 Observabilitate

Definiție: Un sistem (A, B, C, D) este observabil dacă există t astfel încât starea inițială $x(0)$ să poată fi determinată din cunoașterea intrării $u(t)$ și a ieșirii $y(t)$ pentru tot intervalul $(0, t)$.

Similar controlabilității vom introduce următoarele noțiuni:

- Matrice de observabilitate este matricea:

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

- Indicele de observabilitate este egal cu rangul matricei de observabilitate:

$$v = \text{rang}(Q)$$

Teoremă: Un sistem $(A, B, C, D)_n$ este observabil dacă și numai dacă indicele de observabilitate este egal cu ordinul sistemului adică: $\text{rang}(Q) = n$.

Acest rezultat reprezintă un criteriu practic, foarte simplu, de testare a observabilității unui sistem.

Observație: O definiție echivalentă a observabilității este următoarea:

Un sistem este observabil dacă există un moment de timp t astfel încât starea inițială $x(0)$ să poată fi determinată cunoscând ieșirea liberă pe care o provoacă pe intervalul $(0, t)$.

Prezentăm în continuare o demonstrație a teoremei de mai sus pentru cazul sistemelor discrete. Considerăm un interval de timp $(0, t)$ pentru care cunoaștem $y(\tau)$ și eventual $u(\tau)$ oricare $\tau \in (0, t)$. Ecuațiile caracteristice sistemului sunt:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

și putem scrie succesiv:

$$\begin{aligned} y(0) &= Cx_0 \\ y(1) &= Cx_1 = CAx_0 + Bu(0) \\ &\vdots \\ y(k-1) &= CA^{k-1}x_0 + \sum_{\tau=0}^{k-1} A^{k-1-\tau} Bu(\tau) \end{aligned}$$

vom nota:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ \vdots \\ y(k-1) \end{bmatrix} = y_k = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \end{bmatrix}$$

Necunoscuta din această ecuație este starea inițială x_0 și poate fi găsită doar dacă rangul matricei de observabilitate este egal cu dimensiunea acestui vector adică chiar cu dimensiunea n a sistemului.

Și aici dacă sistemul nu este observabil există o descompunere într-un sistem observabil și unul neobservabil conform teoremei următoare:

Teoremă: (De descompunere observabilă) Orice sistem (A, B, C) este echivalent pe stare cu un sistem având structura [28]:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_o & 0 \\ A_s & A_{no} \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B_o \\ B_{no} \end{bmatrix} \quad \hat{C} = [C_o \quad 0] \quad (7.6)$$

în care (A_0, B_0, C_0) este un sistem observabil echivalent intrare/ieșire cu sistemul inițial (A, B, C) .

Și în acest caz dimensiunea sistemului observabil (A_0, B_0, C_0) este dată de indicele de observabilitate adică de $\text{rang}(Q)$.

Se poate observa o similitudine între cele două proprietăți, controlabilitate și observabilitate, care va fi mult mai clar definită de principiul dualității.

Teoremă: (Principiul dualității [28])

- Perechea (A, B) este controlabilă dacă și numai dacă (B^T, A^T) este observabilă.
- Sistemul (A, B, C, D) este controlabil (observabil) dacă și numai dacă (A^T, B^T, C^T, D^T) este observabil (controlabil).

→ până aici pt. partial

7.3 Descompunere structurală. Minimalitate

Am văzut că un sistem reprezentat intrare/ieșire are o multitudine de realizări posibile. Se pune problema găsirii uneia de dimensiune cât mai mică numită și *realizare minimală*.

Teoremă: O realizare a unei funcții de transfer este minimală (de dimensiune minimă) dacă și numai dacă este atât controlabilă cât și observabilă.

Exemplu: Fie un sistem continuu descris de funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{1}{s-1}$$

Prezentăm în continuare câteva realizări posibile:

$$- \quad A = -1 \quad B = 1 \quad C = 1$$

$$- \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = I_2$$

$$- \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = I_2 \quad C = [1 \quad 0]$$

Toate aceste realizări au aceeași funcție de transfer dar doar prima este minimală pentru că este și controlabilă și observabilă (realizarea a doua nu este controlabilă iar a treia nu este observabilă). Se pune astfel problema găsirii unei realizări minimale.

Teoremă: (De descompunere structurală) Pentru orice sistem (A, B, C) există un sistem echivalent pe stare cu el de forma [28]:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{cno} & A_x & A_y & A_z \\ & A_{co} & 0 & A_v \\ & & A_{ncno} & A_w \\ 0 & & & A_{nco} \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B_{cno} \\ B_{co} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{C} = [0 \quad C_{co} \quad 0 \quad C_{nco}] \quad (7.7)$$

în care putem să identificăm:

- un sistem controlabil dar neobservabil $(A_{cno}, B_{cno}, 0)$;
- un sistem controlabil și observabil (A_{co}, B_{co}, C_{co}) ;
- un sistem necontrolabil și neobservabil $(A_{ncno}, 0, 0)$;
- un sistem necontrolabil dar observabil $(A_{nco}, 0, C_{nco})$;

7.4 Lege de comandă după stare*

Definiție: Se numește lege de comandă după stare o dependență de tipul:

$$u = F \cdot x \quad (7.8)$$

în care $F \in R^{m \times n}$ este numită *matrice de reacție după stare*, u este comanda (intrarea) aplicată sistemului iar x este vectorul de stare.

Observație: O dependență de tipul $u = F \cdot x + G \cdot v$, în care v este perturbația ce acționează asupra sistemului, se numește lege de comandă după stare și perturbație. În general însă perturbația nu este cunoscută și o astfel de lege nu prezintă interes practic.

Pentru început vom considera că asupra sistemului se aplică doar comanda dată de relația (7.8). O astfel de structură este prezentată în figura 7.1.

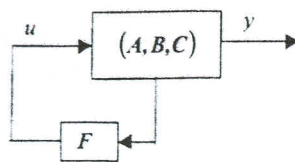


Fig. 7.1. Lege de comandă după stare

Vom scrie succesiv relațiile:

$$\begin{cases} \dot{x}' = Ax + Bu \\ y = Cx \\ u = Fx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}' = (A + BF)x \\ y = Cx \end{cases}$$

Observăm deci că sistemul din figura 7.1, cu lege de comandă după stare, este echivalent cu un sistem care are matricele $(A+BF, B, C)$. Evoluția stării libere a sistemului este:

$$x(t) = \Phi_{A-BF}(t)x_0$$

în care:

$$\Phi_{A-BF}(t) = \begin{cases} e^{(A-BF)t} & t \in \mathbb{R} \\ (A+BF)^t & t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Observație: O schimbare de coordonate de forma $\hat{x} = Tx$ implică și modificarea matricei de reacție astfel:

$$u = Fx = FT^{-1}\hat{x} \Rightarrow \hat{F} = FT^{-1}$$

Teoremă: Dacă perechea (A, B) este controlabilă atunci și perechea $(A+BF, B)$ este controlabilă pentru orice $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Demonstrația acestei teoreme se face aplicând criteriul Hautus-Popov:

$$[\lambda I - A - BF \quad B] = [\lambda I - A \quad B] \begin{bmatrix} I & 0 \\ -F & I \end{bmatrix}$$

deci dacă perechea (A, B) este controlabilă atunci și perechea $(A+BF, B)$ este.

7.5 Alocabilitate

Definiție: O pereche (A, B) se numește *alocabilă* dacă pentru orice mulțime simetrică Λ de numere complexe există o matrice de reacție după stare $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ astfel încât :

$$\sigma(A + BF) = \Lambda$$

Sau altfel spus: un sistem este alocabil dacă există o lege de comandă după stare astfel încât mulțimea valorilor proprii pentru sistemul echivalent obținut să fie identică cu o mulțime dată, dorită de noi.

Se spune că o mulțime e simetrică dacă pentru orice număr complex al sau mulțimea conține și valoarea conjugată a acestuia. Acest lucru e necesar dacă avem în vedere că valorile proprii se obțin ca soluțiile polinomului caracteristic al sistemului și deci ele formează mereu o mulțime simetrică de valori.

Teoremă: Un sistem este alocabil dacă și numai dacă este controlabil.

Vom prezenta, pentru sistemele cu o intrare, deci $m=1$ și $B \equiv b$, demonstrația acestei teoreme din care va rezulta și un algoritm de determinare a matricei de reacție după stare F (care în acest caz va fi de fapt f^T). Folosind valorile mulțimii Λ construim polinomul:

$$\chi(\lambda) = \prod (\lambda - \lambda_i) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 \quad (7.9)$$

Deoarece perechea (A, B) este controlabilă atunci matrice R este nesingulară și deci există $q \in \mathbb{R}^n$ astfel încât:

$$q^T R = e_n^T = [0 \dots 0 \ 1]$$

sau:

$$q^T [b \quad Ab \quad \dots \quad A^{n-1}b] = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]$$

deci pentru $(\forall) \ i \in [0 \ n-2]$ putem afirma că $q^T A^i b = 0$ iar $q^T A^{n-1} b = 1$ și vom scrie succesiv:

$$q^T = q^T$$

$$q^T (A + bf^T) = q^T A$$

$$q^T (A + bf^T)^2 = q^T A^2$$

$$\vdots$$

$$q^T (A + bf^T)^{n-1} = q^T A^{n-1}$$

$$q^T (A + bf^T)^n = q^T A^n + f^T$$

Înmulțind relațiile de mai sus cu coeficienții α_i dați de relația (7.9) și apoi adunându-le obținem:

$$q^T \chi(A + Bf^T) = q^T \chi(A) + f^T \quad (\forall) f \in R^r$$

Aplicând teorema Cayley-Hamilton, relația 7.3, pentru $A_F = A - Bf^T$ rezultă că $\chi(A + Bf^T) = 0$ deci:

$$f^T = -q^T \chi(A) \quad (7.10)$$

Acest algoritm de determinare a matricei de reacție după stare este cunoscut sub numele de *algoritmul Ackermann* și are foarte multe aplicații în sistemele de reglare automată. Se poate arăta că f^T calculată cu relația (7.10) este unică.

Pentru cazul în care avem mai multe intrări, deci $m > 1$ vom face în continuare câteva considerații. Fie $F_0 \in R^{n \times m}$ și $g \in R^m$ arbitrar alese. Se arată în continuare că deoarece (A, B) este controlabilă atunci și $(A + BF_0, Bg)$ este controlabilă. Similar cazului anterior se poate demonstra că există f^T astfel încât:

$$\sigma(A_{F_0} + bf^T) = A$$

$$\sigma(A_{F_0} + bf^T) = \sigma(A + BF_0 + Bgf^T) = \sigma(A + B(F_0 + gf^T))$$

și deci matricea de reacție căutată este:

$$F = F_0 + gf^T$$

7.6 Stabilizabilitate

Definiție: O pereche (A, B) este stabilizabilă dacă există o matrice $F \in R^{m \times n}$ astfel încât:

$$\sigma(A_F) \subset \begin{cases} C^- & t \in R \\ U_1(0) & t \in Z \end{cases}$$

în funcție de tipul sistemului continuu sau discret.

Spunem că un sistem este stabilizabil dacă putem găsi o lege de comandă după stare care să aducă valorile proprii ale sistemului echivalent în domeniul de stabilitate. Dacă sistemul este controlabil atunci este și alocabil și deci, alegând convenabil mulțimea Λ , este și stabilizabil. Dacă sistemul nu este controlabil atunci se enunță teorema:

Teoremă: Un sistem (A, B, C) este stabilizabil dacă și numai dacă

$$\sigma(A_{nc}) \subset \begin{cases} C^- & t \in R \\ U_1(0) & t \in Z \end{cases}$$

unde A_{nc} este partea necontrolabilă din teorema de descompunere controlabilă. Acest lucru este echivalent cu a spune că:

$$\text{rang}[\lambda I - A \ B] = n \text{ pentru oricare } \lambda \in \begin{cases} \sigma(A) \cap C^- & t \in R \\ \sigma(A) \cap U_1(0) & t \in Z \end{cases}$$

7.7 Detectabilitate

Definiție: Perechea (A, C) este detectabilă dacă și numai dacă perechea (A^T, C^T) este stabilizabilă.

adică există L^T astfel încât $\sigma(A^T + C^T L^T) = \sigma(A + LC) \subset \begin{cases} C^- \\ U_1(0) \end{cases}$ după cum sistemul este continuu sau discret.

Observații:

- Ne propunem ca pornind de la un sistem (A, B, C) dat să obținem un altul cu valorile proprii impuse de noi (sau putem impune polii sistemului). Acest lucru este dorit din două motive:
 - Stabilizarea sistemului inițial dacă era cumva instabil;
 - Obținerea unor performanțe dinamice mai bune decât cele ale inițiale;
- Scopul de mai sus poate fi atins prin două metode:
 - Utilizarea unei conexiuni în reacție, de obicei negativă, așa cum a fost prezentat și în capitolul 7. De remarcat aici că putem găsi un sistem de reacție doar dacă sistemul inițial este minimal (atunci el este și observabil și controlabil);
 - Prin lege de comandă după stare. În acest caz sistemul trebuie să fie controlabil;
- Impunerea valorilor proprii (sau a polilor) este echivalentă cu impunerea unui polinom $\chi(\lambda)$ dorit de noi deoarece: $\chi(\lambda) = \prod (\lambda - \lambda_i)$;
- Dacă sistemul nu este controlabil vom putea să-l stabilizăm totuși doar dacă partea necontrolabilă a sa este stabilă (stabilizând deci doar partea controlabilă printr-o procedură de alocare);
- Dacă partea necontrolabilă este instabilă asupra acestui sistem nu putem acționa în sensul stabilizării lui decât dacă îi mărim numărul de intrări astfel ca el să poată fi controlabil.

Exemplu: Vom prezenta în continuare un exemplu de determinarea a unei matrice de reacție după stare utilizând algoritmul Ackermann. Considerăm un sistem descris de matricele:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c^T = [0 \quad 1 \quad 0]$$

și dorim ca valorile proprii ale sistemului echivalent să fie:

$$\Lambda = \{-1 \quad -1 \quad -1\}$$

1. Pentru început testăm controlabilitatea sistemului. Matricea de controlabilitate este:

$$R = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

și deoarece $\det(R) = -1$ rezultă că $\text{rang}(R) = 3$. Deci sistemul este controlabil (ordinul sistemului este $n=3$). În consecință sistemul este și alocabil. Acest rezultat ne asigură de existența unei matrice de reacție după stare.

2. Determinăm acum polinomul dorit utilizând elementele mulțimii Λ :

$$\chi(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 1)(\lambda + 1) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$$

3. Rezolvăm ecuația matriceală $q^T R = [0 \quad 0 \quad 1]$ sau după o operație de

$$\text{transpunere: } R^T q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ cu necunoscuta: } q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} :$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ sau } q^T = [1 \quad 0 \quad 0]$$

4. Calculăm expresia matricei de reacție după stare:

$$f^T = -q^T \chi(A) = -q^T (A^3 + 3A^2 + 3A + I_3) = [-3 \quad 4 \quad 1] = [-3 \quad -4 \quad -1]$$

deci rezultatul căutat este:

$$f^T = [-3 \quad -4 \quad -1]$$

5. Putem să verificăm acum calculele făcute:

$$A_f = A + b f^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I_3 - A_f) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 3 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$$

deci $\sigma(A_f) = \Lambda$.

8 ESTIMAREA STĂRII SISTEMELOR

Am văzut că o lege de reglare după stare implică cunoașterea tuturor mărimilor de stare. În multe situații practice însă nu le putem măsura pe toate sau putem măsura doar o parte din ele. Altfel o astfel de operație ar fi foarte scumpă, mai ales dacă sistemul are multe stări. În consecință nu putem să construim o lege de reglare după starea reală a sistemului. Rezolvarea problemei se face estimând fie toate stările, cazul estimatoarelor complete, fie o parte din ele cazul estimatoarelor de ordin redus.

Un estimator de stare va fi un sistem care va folosi ca intrări ieșirea și intrarea din sistemul inițial așa cum se poate remarca în figura 8.1.

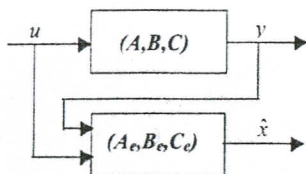


Fig. 8.1. Estimarea stării sistemelor folosind mărimile de intrare și de ieșire

Definiție: Se numește estimator de stare al sistemului (A, B, C) un sistem (A_e, B_e, C_e) a cărui ieșire, notată cu $\hat{x}$ satisface relația:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - \hat{x}(t)) = 0 \quad (8.1)$$

Acest lucru este arătat sugestiv în figura 8.2. Desigur că dorim ca relația de mai sus să fie îndeplinită după un timp cât mai scurt.

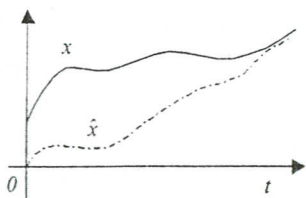


Fig. 8.2. Estimarea stării sistemelor folosind un estimator lent

De asemenea o altă cerință impusă estimatoarelor este ca starea estimată să urmărească tot timpul, foarte aproape, starea reală a sistemului așa după cum se poate remarca în figura 8.3.

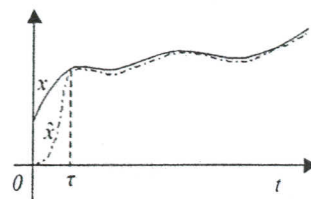


Fig. 8.3. Estimarea stării sistemelor folosind un estimator performant

Condiția matematică, pentru un estimator, poate fi rescrisă:

$$|x(t) - \hat{x}(t)| < \varepsilon \quad \text{pentru } (\forall) t > \tau$$

În caz multidimensional se va defini câte o eroare pentru fiecare componentă sau în locul modulului se poate folosi norma vectorului.

Despre estimatorul din figura 8.1 se spune că este în buclă închisă. O altă posibilitate, mult mai simplă, de construcție a unui estimator de stare este prezentată în figura 8.4 în care nu se mai folosește mărimea de ieșire. Acesta se mai numește și estimator în buclă deschisă.

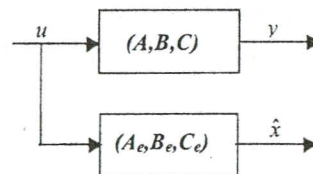


Fig. 8.4. Estimarea în buclă deschisă a mărimilor de stare

Ecuatiile pe care le putem scrie, pentru estimatorul în buclă deschisă, sunt:

$$\begin{cases} \dot{x}' = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}}' = A\hat{x} + Bu \\ \hat{y} = \hat{x} \end{cases}$$

Eroarea de estimare este $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ și folosind relațiile de mai sus obținem:

$$\varepsilon'(t) = A\varepsilon(t) \Rightarrow \varepsilon(t) = e^{At} \varepsilon_0 \quad (8.2)$$

Analizând ecuația 8.2 constatăm că pot apărea două situații:

1. Sistemul (A, B, C) este instabil și atunci, dacă și $\varepsilon_0 \neq 0$ (situația cea mai generală) eroarea de estimare va tinde către infinit.
2. Dacă sistemul este stabil atunci eroarea de estimare se va micșora în timp astfel încât putem spune că:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$$

În practică primul caz nu este acceptabil iar în a doua situație răspunsul estimatorului poate să fie prea lent. Deci dacă folosim doar un estimator în buclă deschisă nu putem rezolva în mod convenabil problema estimării stărilor.

Soluția este de a utiliza un estimator în buclă închisă, deci cu reacție după mărimea de ieșire din sistem, situație prezentată de altfel și în figura 8.1. În acest caz ecuația estimatorului se schimbă:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}' = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y) \\ \hat{y} = \hat{x} \end{cases} \quad (8.3)$$

L este matricea de câștig a estimatorului și va fi determinată pe baza unui algoritm de impunere a polilor estimatorului, asemănător abordării făcute la determinarea legii de comandă după stare. De exemplu, se poate recurge la algoritmul Ackermann știindu-se mulțimea valorilor proprii (din dinamica dorită pentru estimator și din condiția ca acesta să fie stabil).

Vom aduce relațiile 8.3 la scrierea standard a sistemelor:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}' = (A + LC)\hat{x} + [B \quad -L] \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \\ \hat{y} = \hat{x} \end{cases} \quad (8.4)$$

din care putem identifica matricele caracteristice estimatorului în buclă închisă:

$$\begin{aligned} A_e &= A + LC \\ B_e &= [B \quad -L] \\ C_e &= I_n \end{aligned} \quad (8.5)$$

Ideea este de a construi un sistem care să se autocorecteze în funcție de eroarea dintre mărimea de ieșire reală (aceasta fiind accesibilă) și mărimea de ieșire estimată. Schema structurală a estimatorului este prezentată în figura 8.5.

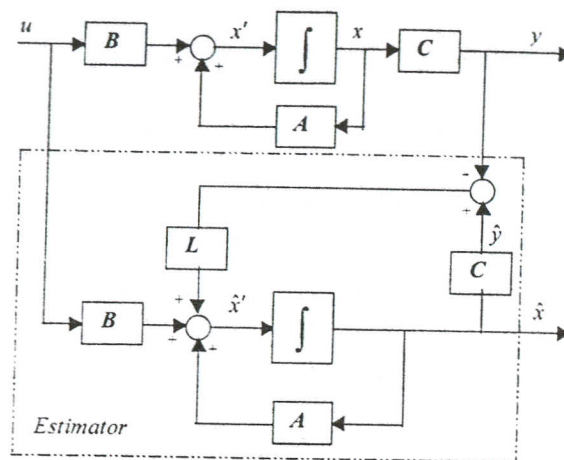


Fig. 8.5. Schema structurală a unui estimator de stare în buclă închisă

Deoarece $\sigma(A_e) = \sigma(A + LC) = \sigma(A^T + C^T L^T)$ matricea L se determină prin algoritmul Ackermann de plasare a polilor aplicat de data aceasta perechii (A^T, C^T) și pentru mulțimea A de valori proprii dorite. De remarcă că din algoritm va rezulta matricea L^T .

Să calculăm eroarea de estimare în cazul estimatorului în buclă închisă:

$$\begin{aligned} \varepsilon'(t) &= x'(t) - \hat{x}'(t) = \\ &= A\varepsilon(t) + Ly - LC\hat{x} = A\varepsilon(t) + LCx - LC\hat{x} = (A + LC)\varepsilon(t) \end{aligned}$$

și rezolvând ecuația diferențială obținem:

$$\varepsilon(t) = e^{(A+LC)t} \varepsilon_0 = e^{A_e t} \varepsilon_0 \quad (8.6)$$

Relația de mai sus arată că dacă alegem în mod corespunzător spectrul matricei A_e atunci dinamica estimatorului este controlată, impusă de noi și în nici un caz nu va tinde spre infinit ca în cazul structurii în buclă deschisă.

Pentru ca să existe matricea L e necesar ca perechea (A^T, C^T) să fie controlabilă. Conform teoremei de dualitate acest lucru este îndeplinit dacă perechea (A, C) este observabilă. Deci pentru a putea avea o estimare corectă a stării, sistemul trebuie să fie observabil.

9 COMPENSAREA SISTEMELOR

În realitate multe sisteme sunt instabile. Însă o condiție esențială pentru proiectarea sistemelor de reglare automată, așa după cum se va vedea în capitolele următoare, este ca acestea să fie stabile. De aceea apare necesitatea stabilizării sistemelor instabile. Operația se numește *compensarea sistemelor* și poate fi făcută în principal prin două metode: prin reacție după stare și prin reacție după ieșire.

9.1 Compensarea sistemelor prin lege de reacție după stare

În acest caz sistemul este reprezentat în spațiul stărilor și implicit vom vorbi de stabilitate internă. Stabilizarea implică modificarea mulțimii valorilor proprii, astfel încât aceasta să fie inclusă în domeniul de stabilitate (semiplanul stâng sau cercul unitate în funcție de tipul sistemului continuu sau discret). Se spune că trebuie să facem o realocare a valorilor proprii și am văzut în capitolul 8 că un sistem este alocabil dacă și numai dacă este controlabil.

Așadar pentru un sistem controlabil, oricare ar fi mulțimea λ de valori proprii dorite va exista o matrice $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ astfel încât spectrul matricei $A+BF$ să fie λ ($\sigma(A+BF) = \lambda$), adică vom putea construi o lege de comandă după starea sistemului. Prin alegerea corespunzătoare a mulțimii de valori proprii impuse se poate nu numai stabiliza sistemul dar se poate obține și o altă dinamică a sa. Schema bloc a unei astfel de compensator este prezentată în figura 9.1.

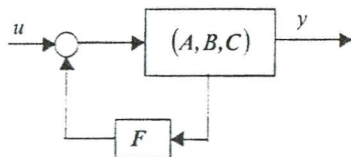


Fig. 9.1. Compensarea sistemelor cu lege de comandă după stare

Deci peste comanda (intrarea) sistemului se suprapune și legea de comandă după stare. Principalele dezavantaje ale acestei scheme sunt:

- Sensibilitate mare la zgomote exterioare;
- Necesitatea măsurării tuturor stărilor sistemului;

9.2 Compensarea prin reacție după ieșire

Dacă stările nu sunt toate accesibile, sau măsurarea lor e scumpă, atunci se poate construi un estimator de stare, evident dacă sistemul este observabil. Apoi se poate construi o lege de comandă dar după starea estimată așa cum reiese și din figura 9.2.

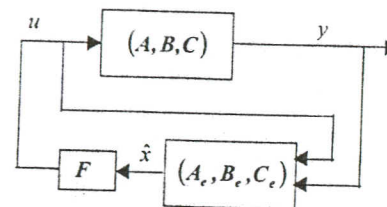


Fig. 9.2. Compensarea sistemelor utilizând și estimator de stare

Evident că legea de comandă este acum $u = F\hat{x}$ și ecuația estimatorului:

$$\dot{\hat{x}}' = (A + LC)\hat{x} + Bu - Ly$$

se va rescrie:

$$\dot{\hat{x}}' = (A + LC + BF)\hat{x} - Ly$$

de unde vom deduce că matricele caracteristice compensatorului astfel construit sunt:

$$\begin{aligned} A_c &= A + LC + BF \\ B_c &= -L \\ C_c &= F \end{aligned} \quad (9.1)$$

Structura rezultantă obținută este prezentată în figura 9.3

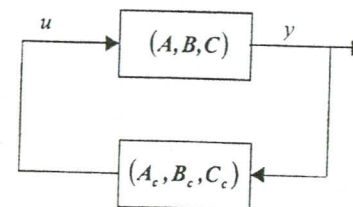


Fig. 9.3. Compensarea sistemelor cu reacție după ieșire

Ecuatiile caracteristice celor două sisteme din schemă sunt:

$$\begin{cases} \dot{x}' = Ax + Bu \\ y' = Cx \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} \dot{x}'_e = (A + BF + LC)x_e - Ly' \\ y'_e = Fx_e \end{cases}$$

dar așa după cum reiese din figură $u = y_e$. Vom grupa ecuațiile principale din cele două sisteme:

$$\begin{cases} \dot{x}' = Ax + BFx_e \\ \dot{x}'_e = (A + BF + LC)x_e - LCx' \end{cases}$$

Matricea rezultantă a întregii structuri, considerând reuniunea stărilor, va fi :

$$A_R = \begin{bmatrix} A & BF \\ -LC & A + BF + LC \end{bmatrix}$$

Valorile proprii ale acestei matrice sunt rădăcinile polinomului:

$$\begin{aligned} |\lambda I - A_R| &= \begin{vmatrix} \lambda I - A & -BF \\ LC & \lambda I - A - BF - LC \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda I - A - BF & -BF \\ \lambda I - A - BF & \lambda I - A - BF - LC \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \lambda I - A - BF & -BF \\ 0 & \lambda I - A - LC \end{vmatrix} = |\lambda I - A - BF| |\lambda I - A - LC| \end{aligned}$$

Se observă că mulțimea valorilor proprii este reuniunea mulțimilor valorilor proprii pentru lege de reglare după stare și pentru estimator:

$$\sigma(A_R) = \sigma(A_F) \cup \sigma(A_e) = \sigma(A + BF) \cup \sigma(A + LC)$$

Pentru a putea construi un astfel de compensator sistemul trebuie să fie:

- *Controlabil* astfel încât să putem găsi o lege de comandă după stare caracterizată de matricea F ;
- *Observabil* astfel încât să putem determina un estimator de stare caracterizat de matricea L ;

Dar un sistem controlabil și observabil este minimal. Așadar putem construi un compensator cu reacție după ieșire dacă sistemul este minimal. Etapele pe care le avem de parcurs în rezolvarea acestei probleme sunt:

- Se impune mulțimea A de dimensiune $2n$ formată din două submulțimi (A_F, A_e) fiecare de dimensiune n ;
- Se determină F astfel încât $\sigma(A + BF) = A_F$ prin algoritmul Ackermann;
- Se determină L astfel încât $\sigma(A^T + C^T L^T) = A_e$ tot prin algoritmul Ackermann;
- Construim matricele sistemul rezultat cu relațiile:

$$A_e = A + LC + BF$$

$$B_e = -L$$

$$C_e = F$$

Se constată că am construit astfel sistemul dat de teorema de la conexiunea în reacție (6.3). Aceasta afirmă că:

“pentru orice sistem minimal (A, B, C) de ordin n și pentru orice mulțime de valori proprii A de dimensiune $2n$ există un sistem (A_e, B_e, C_e) care conectat în reacție cu primul va permite obținerea unei structuri echivalente cu $\sigma(A_R) = A$ ”.

Dacă din exterior se mai aplică și o altă comandă, schema de compensare se modifică conform figurii 9.4.

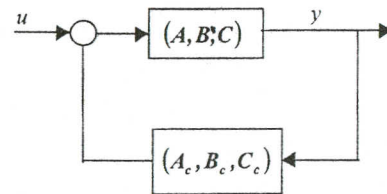


Fig. 9.4. Compensarea sistemelor cu reacție după mărime de ieșire

Observăm că în acest capitol au fost abordate deja primele structuri de reglare automată. Scopul lor este în principal de a stabili sistemele (de a le compensa) dar nu trebuie să omitem și posibilitatea de a îmbunătăți, încă din această fază, performanțele sistemului rezultat obținut.

10 PROBLEMA REGLĂRII

Așa după cum am văzut încă din *Introducere* în aplicațiile practice apare frecvent necesitatea controlării unei mărimi din sistem (sau, uneori, chiar mai multe). Spunem că respectiva mărime trebuie 'reglată'. Această reglare trebuie să se facă însă respectând anumite cerințe. Problematika care apare în acest caz este subiectul *teoriei reglajului automat*. Vor fi prezentate în continuare elementele de bază ale acestei teorii.

10.1 Formularea problemei reglării

Fiind dat un sistem linear (A, B, C) se cere să se determine un sistem (A_c, B_c, C_c) numit *compensator* (sau *regulator*), comandat de eroarea $\varepsilon(t) = y_r(t) - y(t)$, astfel încât sistemul rezultat în circuit închis să aibă următoarele proprietăți:

- Să fie intern asimptotic stabil;
- Să îndeplinească *condiția de reglare* adică:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (y_r(t) - y(t)) = 0 \quad (10.1)$$

Și în plus mai dorim:

- Un anumit regim dinamic;
- Condiția de reglare b) să fie îndeplinită și în cazul apariției unor perturbații exterioare.

Schema sistemului obținut este prezentată în figura 10.1 și poartă numele de *sistem de reglare automată*, prescurtat *SRA*.

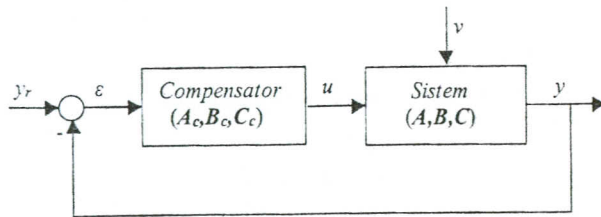


Fig.10.1. Sistem de reglare automată (SRA)

Aceasta este formularea problemei reglării. Să facem câteva observații:

- În primul rând trebuie să remarcăm că sistemul rezultat trebuie să fie intern stabil indiferent cum este sistemul inițial din acest punct de vedere și indiferent de stabilitatea externă a sa;
- Condiția de reglare ne asigură că ieșirea y a sistemului rezultat, în buclă închisă, va tinde să urmărească mărimea de intrare y_r , numită și *mărime de referință*. Această condiție este esențială pentru un sistem de reglare automată.
- Condiția c) stabilește și modul cum ieșirea va urmări referința, adică stabilim regimul dinamic al sistemului de reglare automată. În esență dorim un răspuns rapid, fără oscilații deranjante și fără un suprareglaj prea mare. Aceste cerințe sunt însă dependente de aplicația concretă pe care o avem de rezolvat;
- Apariția unei perturbații exterioare determină, în general, modificarea valorii ieșiri și astfel condiția de reglare nu mai este îndeplinită. Acest lucru nu este de dorit și SRA trebuie să refacă echilibrul, evident după un anumit regim dinamic. Această cerință mai poartă și numele de *rejecția perturbațiilor*;
- Conexiunea utilizată este în reacție negativă unitară (pe reacție nu avem conectat un sistem sau putem spune că există un sistem cu funcția de transfer egală cu unu);
- Mărimile y_r (referința) și v (perturbația) sunt mărimi externe sistemului și se numesc *mărimi exogene*;

Elementul central al SRA este regulatorul (compensatorul). El primește la intrare eroarea dintre mărimea de referință și mărimea reală din sistem și furnizează o comandă către sistem în sensul minimizării erorii (în plus trebuie să îndeplinim și cerințele menționate anterior (a-d)). În consecință etapa esențială în proiectarea SRA este proiectarea regulatorului astfel încât sistemul în ansamblu să îndeplinească cerințele impuse de utilizator.

10.2 Soluția generală a problemei reglării

Pentru a putea îndeplini cerințele impuse SRA trebuie să cunoască aprioric felul mărimilor externe. Astfel sistemul va îngloba o copie a modelul lor. Această metodă de rezolvare a problemei reglării poartă numele de *principiul modelului intern*. Mărimile exogene sunt referința și perturbația. Aceasta din urmă poate

acționa în orice punct al sistemului de reglare. Pentru simplitate vom analiza doar cazul în care ea acționează asupra mărimii de ieșire, ca în figura 10.2, considerând și o funcție de transfer a perturbației $H_v(s)$ și considerând sisteme SISO.

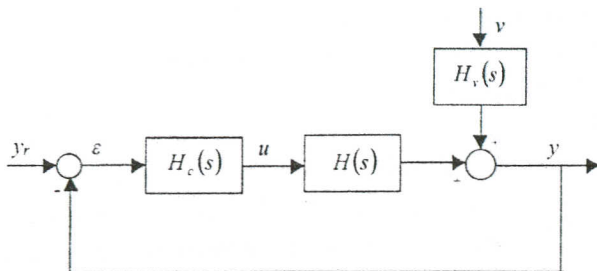


Fig.10.2. Sistem de reglare automată (SRA) cu specificarea funcțiilor de transfer pentru fiecare element în parte

În acest caz răspunsul y al sistemului este o sumă între efectele date de referință și perturbăție:

$$y = y_{\text{referință}} + y_{\text{perturbatie}}$$

Cele două componente se determină utilizând principiul superpoziției efectelor. Aceasta înseamnă că efectul referinței se calculează în absența perturbației și vom obține, utilizând proprietățile conexiunii în reacție negativă, că:

$$y_{\text{referință}} = \frac{H_c(s) \cdot H(s)}{1 + H_c(s) \cdot H(s)} y_r$$

iar efectul perturbației este determinat considerând referință nulă (Schema sistemului pentru acest caz particular este prezentată în figura 10.3):

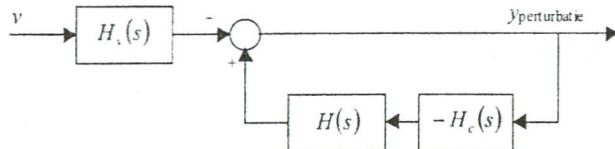


Fig.10.3. Sistem de reglare automată (SRA) considerând doar efectul perturbației (referința este nulă)

deducem deci că efectul perturbației este:

$$y_{\text{perturbatie}} = \frac{H_v(s)}{1 + H_c(s) \cdot H(s)} v$$

Răspunsul global al sistemului este suma celor două componente adică:

$$y = \frac{H_c \cdot H}{1 + H_c \cdot H} y_r + \frac{H_v}{1 + H_c \cdot H} v \quad (10.2)$$

(În relații, pentru simplitate, vom renunța la scrierea argumentului s)

Suntem în măsură acum să calculăm eroarea de reglare:

$$\begin{aligned} \varepsilon = y_r - y &= y_r \left(1 - \frac{H_c \cdot H}{1 + H_c \cdot H} \right) - \frac{H_v}{1 + H_c \cdot H} v = \\ &= \frac{1}{1 + H_c \cdot H} (y_r - H_v \cdot v) \end{aligned} \quad (10.3)$$

Considerăm toate funcțiile de transfer ce intervin în relația 10.3 ca raport de polinoame adică:

$$H = \frac{r}{p} \quad H_c = \frac{r_c}{p_c} \quad H_v = \frac{r_v}{p_v}$$

și ținând cont de faptul că $p_v = p$ (deoarece ambele polinoame de la numitor provin din expresia $\frac{1}{\det(sI - A)}$), relația 10.3 se mai scrie:

$$\varepsilon = \frac{p \cdot p_c}{\chi} \left(y_r - \frac{r_v}{p} v \right) = \frac{p \cdot p_c}{\chi} y_r - \frac{p_c \cdot r_v}{\chi} v \quad (10.4)$$

în care: $\chi = p \cdot p_c + r \cdot r_c$.

Exprimăm și mărimile exogene ca un raport de polinoame:

$$y_r = \frac{a_r}{\mu_r} \quad \text{și} \quad v = \frac{a_v}{\mu_v}$$

Se poate acum formula o teoremă importantă în proiectarea regulatorului.

Teoremă: Dacă sistemul rezultat este intern asimptotic stabil condiția de reglare (relația 10.1) este îndeplinită dacă și numai dacă:

μ_r divide produsul $p \cdot p_c$ și

μ_v divide produsul $r_v \cdot p_c$

Demonstrație:

Mai întâi să vedem că aceste condiții sunt suficiente. Expresia erorii este:

$$\varepsilon = \frac{p \cdot p_c}{\chi} y_r - \frac{p_c \cdot r_v}{\chi} v = \frac{p \cdot p_c}{\chi} \frac{a_r}{\mu_r} - \frac{p_c \cdot r_v}{\chi} \frac{a_v}{\mu_v} \quad (10.5)$$

și având în vedere relațiile de diviziune din teoremă:

$$\varepsilon = \frac{\pi_r}{\chi} a_r - \frac{\pi_v}{\chi} a_v$$

Calculăm limita erorii de reglare, utilizând teorema valorii finale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \varepsilon(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{\pi_r}{\chi} a_r - \frac{\pi_v}{\chi} a_v \right) = 0$$

deoarece polinomul $\chi(s)$ nu are soluția $s = 0$ (sistemul fiind intern asimptotic stabil).

Dacă vom considera acum că avem îndeplinită condiția de reglare rezultă că:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \varepsilon(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{p \cdot p_c}{\chi} \frac{a_r}{\mu_r} - \frac{p_c \cdot r_v}{\chi} \frac{a_v}{\mu_v} \right) = 0$$

Condiția de mai sus trebuie să fie îndeplinită pentru orice semnale exogene, deci pentru orice polinoame μ_r și μ_v . Acest lucru este posibil doar dacă μ_r divide produsul $p \cdot p_c$ și μ_v divide produsul $r_v \cdot p_c$.

Ca și proiectanți noi nu putem să modificăm decât structura compensatorului și atunci, pentru ca teorema de mai sus să poată fi respectată, trebuie ca μ_r să dividă pe p_c și simultan μ_v să dividă tot pe p_c . În acest fel teorema de mai sus este îndeplinită indiferent de tipul procesului de reglat. Acesta este principiul modelului intern.

Considerând acum cazul particular în care cele două mărimi exogene sunt de același tip, adică $\mu_r \equiv \mu_v = \mu$, atunci principiul intern se poate exprima matematic astfel:

$$p_c = \mu \cdot \tilde{p}_c \quad (10.6)$$

Observație: Rezultate similare se obțin și pentru cazul discret.

10.3 Soluția problemei reglării pentru mărimi exogene de tip treaptă

Din cele expuse până aici rezultă că proiectarea SRA depinde de tipul mărimilor exogene care acționează asupra sistemului. Acest lucru este un dezavantaj pentru că dacă dintr-un motiv sau altul se schimbă tipul mărimilor externe trebuie să reproiectăm compensatorul.

Totuși o clasă largă de sisteme de reglare automată se proiectează considerând că mărimile exogene sunt de tip treaptă. Motivele acestei abordări sunt următoarele:

- De obicei referința se modifică brusc, adică în trepte (de exemplu schimbăm brusc cursul de zbor dorit pentru un avion);
- Cele mai multe perturbații sunt mărimi treaptă;
- Semnale mai complicate, atât pentru referință cât și pentru perturbație, pot fi approximate printr-o succesiune de trepte foarte fine. Astfel că un sistem proiectat pentru trepte va răspunde suficient de bine și pentru alte mărimi exogene;
- Proiectarea compensatorului este mult mai simplă în acest caz.

10.3.1 Soluția generală utilizând regulatoare analogice

Modelul intern este în acest caz $1/s$ și schema de reglare automată se modifică conform figurii 10.4.

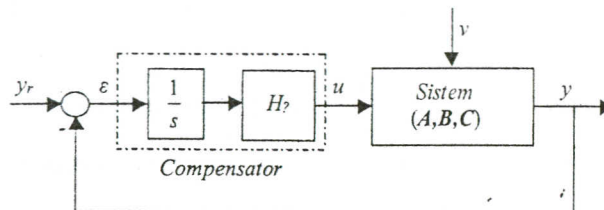


Fig.10.4. Sistem de reglare automată pentru mărimi exogene treaptă

Trebuie să determinăm sistemul H , astfel încât SRA:

- Să fie intern stabil;
- Să aibă performanțele dinamice dorite.

Adică trebuie să îndeplinească condițiile a) și c) din formularea generală a problemei reglării (condițiile b) și d) sunt implicit îndeplinite prin prezența modelului intern în structura compensatorului). Dacă sistemul inițial este intern stabil și dacă performanțele dinamice sunt suficient de bune atunci sistemul H_2 poate să si lipsească însă nu este cazul general.

Configurația sistemului, fără considerarea mărimilor exogene, este prezentată în figura 10.5.

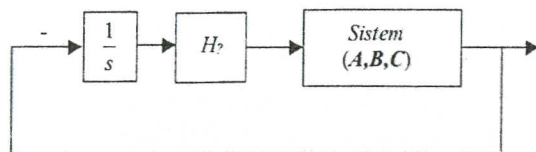


Fig.10.5. Sistem de reglare automată cu model intern $1/s$ și fără considerarea mărimilor exogene

Putem regrupa blocurile componente cunoscute conform figurii 10.6.

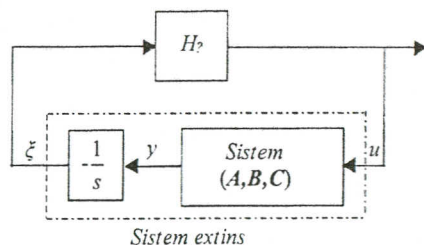


Fig.10.6. Sistem de reglare automată cu model intern 1/s și evidențierea sistemului extins

Sistemul necunoscut H , în reacție pozitivă cu ansamblul serie de sisteme:

$-\frac{1}{s}$ și (A, B, C) . Această ultimă structură, cunoscută în totalitate, poartă numele de *sistem extins*.

Vom scrie în continuare ecuațiile caracteristice sistemului extins. Pentru aceasta mai avem nevoie de o nouă mărime de stare ξ corespunzătoare modelului intern:

$$\begin{aligned} x' &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad \text{pentru sistem și}$$

$$\begin{aligned} \xi' &= -\gamma \\ \xi &= \xi \end{aligned} \quad \text{pentru modelul intern}$$

Starea sistemului extins este $x_e = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}$, intrarea este u iar ieșirea este ξ . Cu aceste considerații scrierea generală a sistemului extins devine:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u \quad (10.7)$$

$$\xi = [0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}$$

de unde putem deduce cu ușurință matricele caracteristice sistemului extins:

$$A_e = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad B_e = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_e = [0 \quad I] \quad (10.8)$$

Mai rămâne să determinăm sistemul H_7 . Acesta trebuie să stabilizeze sistemul extins. Deci vom aplica metodele de compensare a sistemelor prezentate în *capitolul 9*. Prin poziția polilor alocăți vom impune practic și regimul dinamic dorit. Astfel, o lege de comandă după stare pentru sistemul extins descris de relația 10.8 poate fi scrisă:

$$u = F_e \cdot x_e = [F \quad \varphi] \cdot \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} = F \cdot x + \varphi \cdot \xi \quad (10.9)$$

Pe baza relației de mai sus considerând $F = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n]$ și $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ vom obține schema de reglare prezentată în figura 10.7.

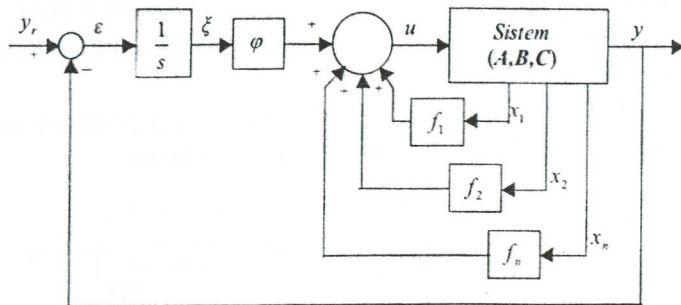


Fig. 10.7. Sistem de reglare automată cu model intern și lege de comandă după starea sistemului.

Dacă mărimile de stare ale sistemului nu pot fi măsurate atunci vom construi un estimator de stare. Legea de comandă va utiliza de data aceasta starea estimată. Schema de reglare obținută este prezentată în figura 10.8.

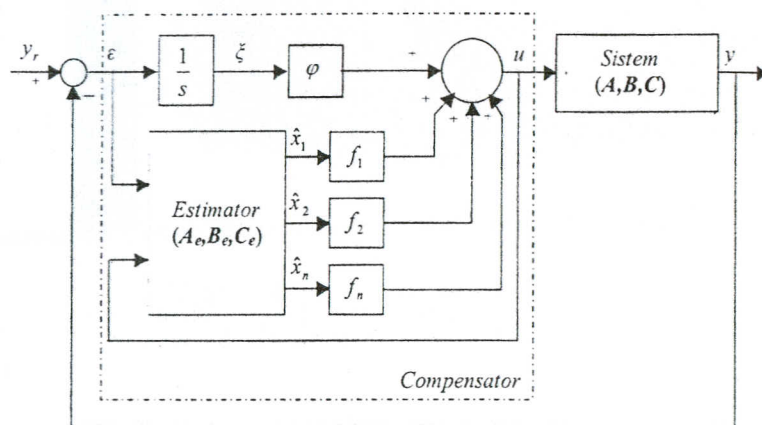


Fig. 10.8. Sistem de reglare automată cu model intern și lege de comandă după starea estimată a sistemului.

În acest caz mărimile de intrare în estimator sunt intrarea u a sistemului și eroarea ε dintre mărimea de referință și mărimea de ieșire (deci nu se mai folosește direct ieșirea sistemului așa cum am prezentat în capitolul 8; oricum eroarea ε este proporțională cu ieșirea y deoarece referința y_r este constantă). Ansamblul constituit din estimator și lege de reglare după stare formează

compensatorul căutat. Pentru determinarea modelului matematic al acestuia se va considera o referință nulă adică $y_r = 0$ (se consideră că referința este o perturbăție și nu se ia în calcul la sinteza compensatorului). Obținem deci că $\varepsilon = y_r - y = -y$. Ecuația 8.4, ce descrie funcționarea unui estimator de stare, devine în acest caz particular:

$$\dot{\hat{x}} = (A + LC) \cdot \hat{x} + B \cdot u + L \cdot \varepsilon \quad (10.10)$$

și folosind 10.9 relația de mai sus se poate rescrie:

$$\dot{\hat{x}} = (A + BF + LC) \cdot \hat{x} + B\varphi \cdot \zeta + L \cdot \varepsilon \quad (10.11)$$

Ecuația 10.11 împreună cu relația $\dot{\zeta} = \varepsilon$ formează sistemul de ecuații ce caracterizează funcționarea compensatorului. Acest sistem poate fi pus și sub formă matriceală:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BF + LC & B\varphi \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \zeta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \varepsilon \quad (10.12)$$

Deci putem acum identifica matricele compensatorului:

$$A_c = \begin{bmatrix} A + BF + LC & B\varphi \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} L \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad (10.13)$$

$$C_c = F_c$$

deoarece ieșirea compensatorului este chiar comanda u .

Observații:

- Matricele sistemului extins date de relația 10.8 sunt valabile doar pentru mărimi exogene de tip treaptă;
- În practică un regulator nu va lucra, decât foarte rar, direct cu mărimea y de ieșire din sistem ci cu o mărime proporțională cu ea exprimată de obicei în volți. Corespunzător și ieșirea u către sistem va trebui rescalată, uzual amplificată. În acest fel se evită funcționarea regulatorului în domeniul puterilor mari, fiind de fapt un element de comandă. Gama semnalelor cu care operează compensatorul este cuprinsă între $-10V$ și $+10V$.

În situația sistemelor continue regulatorul se realizează cu ajutorul unor componente analogice: rezistoare, condensatoare, bobine, circuite integrate analogice (amplificatoare operaționale).

De exemplu schema de principiu a unui integrator analogic este prezentată în figura 10.9.

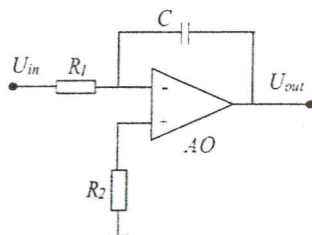


Fig.10.9. Schema electrică de principiu a unui integrator analogic

Sistemele analogice au câteva dezavantaje evidente: variația parametrilor în funcție de condițiile de lucru, modificarea lor în timp și o flexibilitate redusă (dacă de exemplu dorim modificarea unui parametru al regulatorului trebuie să modificăm componentele electronice sau să le reajustăm pe cele existente). Aceste dezavantaje sunt înlăturate dacă vom utiliza sisteme de comandă cu regulatoare numerice (digitale).

10.3.2 Soluția generală folosind regulatoare discrete

Schema unui SRA discret, figura 10.10, conține un convertor digital-analogic (CDA) și unul analog-digital (CAD).

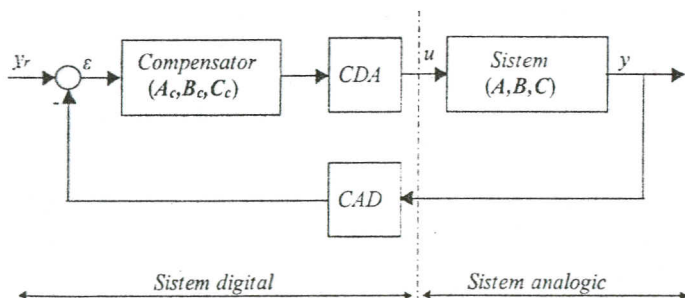


Fig.10.10. Sistem digital de reglare automată

Dacă obținem un sistem discret (A_d, B_d, C_d) echivalent sistemul (A, B, C) , printr-o operație de discretizare, atunci schema de reglare automată va conține doar sisteme discrete (figura 10.11).

Conform celor spuse anterior, soluția generală a problemei reglării se bazează și în cazul discret tot pe principiul modelului intern.

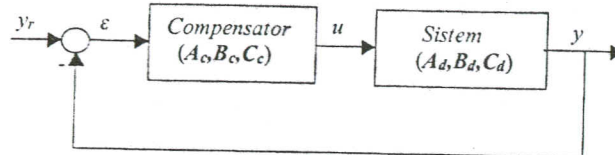


Fig.10.11. Sistem de reglare automată cu compensator discret

Evident însă că acum modelul semnalelor de tip treaptă este $\frac{z}{z-1}$ iar în timp:

$$\xi(t+1) = \xi(t) - y(t) \quad (10.14)$$

Ecuatiile sistemului discret sunt:

$$\begin{cases} x(t+1) = A_d x(t) + B_d u(t) \\ y(t) = C_d x(t) \end{cases}$$

Sistemul extins, format din modelul intern și sistemul discret, va avea ecuațiile:

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ \xi(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ -C_d & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_d \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u \quad (10.15)$$

$$\xi = \xi$$

de unde deducem că matricele sistemului extins discret sunt:

$$A_{ed} = \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ -C_d & 1 \end{bmatrix} \quad B_{ed} = \begin{bmatrix} B_d \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_{ed} = [0 \quad 1] \quad (10.16)$$

Observăm că relațiile 10.16 sunt asemănătoare cu cele obținute pentru sistemul extins continuu (relațiile 10.8). Matricele compensatorului discret se obțin similar cazului continuu și sunt asemănătoare celor date de relația 10.13 cu deosebirea că A_{ed} are ultimul element '1'.

10.4 Impunerea performanțelor dinamice pentru SRA

După cum am văzut respectarea principiului modelului intern implică eroare staționară nulă și rejecția perturbațiilor (pentru mărimi exogene corespunzătoare), deci respectarea cerințelor b) și d). Stabilitatea SRA se asigură impunându-i polii în C^- (și construind corespunzător regulatorul). Rămâne de rezolvat problema regimului dinamic, adică cum facem ca SRA să aibă anumite **performanțe dinamice**. Cele mai importante mărimi ce caracterizează regimul dinamic al unui SRA pentru referință treaptă sunt:

- **suprareglajul**, adică valoarea maximă cu care ieșirea depășește valoarea referinței. El se exprimă uzual în procente.
- **timpul de stabilizare**, adică timpul după care eroarea este mai mică decât un anumit prag impus (se mai numește și **timp de încadrare** în banda de eroare dorită)

Pentru cazul în care mărimile exogene sunt de tip treaptă răspunsul tipic al sistemului este prezentat în figura 10.12 (au fost puse în evidență și cele două caracteristici dinamice definite mai sus).

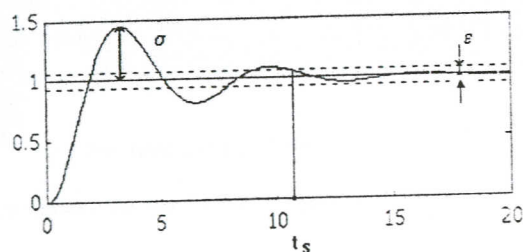


Fig. 10.12. Impunerea performanțelor dinamice pentru intrare treaptă unitară

Suprareglajul se poate defini:

$$\sigma = \frac{y_{\max} - y_r}{y_r} \times 100[\%] \quad (10.17)$$

unde $y_{\max}$ este valoarea maximă a răspunsului sistemului iar y_r este mărimea de referință (care în acest caz este egală cu unu).

Timpul de stabilizare t_s are proprietatea că:

$$|y(t) - y_r| < \varepsilon \quad (\forall) t > t_s \quad (10.18)$$

Răspunsul din fig. 10.12 este caracteristic unui element de întârziere de ordin 2:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Pentru un astfel de sistem valorile suprareglajului și timpului de stabilizare se pot exprima în funcție de factorul de amortizare ζ și de pulsația proprie ω_n . Astfel, de exemplu, pentru $\varepsilon = 0.02$ am obținut anterior (vezi 5.1) că:

$$\sigma = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad \text{și} \quad t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (10.19)$$

Rezultă că în acest caz se pot găsi ζ și ω_n , în funcție de performanțele impuse (adică în funcție de suprareglajul σ și de timpul de stabilizare t_s). Polii pe care trebuie să-i aibă sistemul pentru a respecta aceste performanțe vor fi:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (10.20)$$

Așadar dacă SRA ar fi un sistem de ordinul 2, performanțele sale ar putea fi fixate prin impunerea polilor conform relației 10.20. Acest lucru este echivalent cu impunerea polinomului de la numitorul funcției de transfer echivalente SRA:

$$\chi_d(s) = (s - s_1) \cdot (s - s_2) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad (10.21)$$

Deci sintetizând, pentru un sistem de ordinul doi impunerea performanțelor dinamice implică:

- impunerea unui suprareglaj și a unui timp de stabilizare în funcție de cerințele aplicației concrete avute în vedere;
- calculul factorului de amortizare și a pulsației proprii dorite conform relațiilor 10.19;
- determinarea polinomului caracteristic dorit (relația 10.21).

În caz general însă dimensiunea n a SRA este mai mare de doi. Atunci și ordinul polinomului caracteristic dorit $\chi_d(s)$ trebuie să fie mai mare și anume egal chiar cu n . Acest lucru este echivalent cu a mai impune și alți poli în afară de cei doi pe care știm deja cum să îi calculăm. Alegerea polilor suplimentari se face

astfel încât răspunsul sistemului să nu fie mult diferit de răspunsul standard al unui sistem de ordin 2 (se spune astfel că SRA are doar doi *poli dominanți* deși ordinul său este totuși în realitate n). Sunt multe posibilități de alegere a polilor suplimentari. Pentru simplificarea calculului se adoptă următoarea metodă: toți polii suplimentari vor fi egali între ei, vor avea doar parte reală (bineînțeles negativă pentru a respecta stabilitatea SRA) și vor fi plasați cât mai departe, spre $-\infty$, față de polii dominanți. Acest lucru este ilustrat și grafic în figura 10.13.

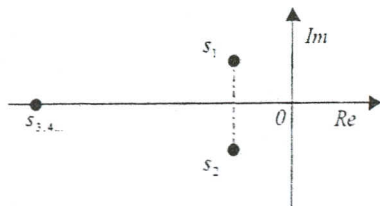


Fig.10.13. Plasarea polilor: dominanți (s_1, s_2) și suplimentari ($s_3, s_4, \dots$)

Prin această alegere, regimurile tranzitorii date de respectivii $n-2$ poli suplimentari se anulează mult mai repede decât cele ale polilor dominanți, neinfluențând practic comportarea sistemului, care va răspunde similar unui sistem de ordinul 2.

Practic, partea reală a polilor suplimentari se consideră aproximativ de 10 – 15 ori mai mică decât partea reală a polilor dominanți:

$$\operatorname{Re}\{s_{3,4,\dots}\} \cong 10 \cdot \operatorname{Re}\{s_{1,2}\} = -10 \cdot \zeta \cdot \omega_n \quad (10.22)$$

În acest fel putem deci să impunem și polinoame caracteristice dorite de ordin mai mare decât 2. De exemplu pentru un sistem de ordin 3 polinomul $\chi_d(s)$ este:

$$\chi_d(s) = (s - s_1) \cdot (s - s_2) \cdot (s - s_3) = (s - s_2) \cdot [s^2 - (s_1 + s_2) \cdot s + s_1 \cdot s_2] \quad (10.23)$$

11 REGULATOARE CU STRUCTURĂ FIXĂ

Așa cum se cunoaște deja din capitolul precedent, proiectarea unui SRA (care respectă condițiile a), b), c), d)) este posibilă în cazul general utilizând principiul modelului intern. Singurele condiții sunt ca sistemul care se dorește a fi reglat să fie controlabil și observabil. Dimensiunea regulatorului (A_c, B_c, C_c) obținut este, în cazul sistemelor SISO, de $n+1$, unde n este dimensiunea sistemului dat. Aceasta înseamnă că pentru sisteme mari regulatorul va fi foarte complex și este dificil de implementat mai ales în cazul sistemelor analogice. De aceea în practică se caută să se rezolve problema reglării prin folosirea unui regulator de dimensiune cât mai mică. Chiar și pentru sistemele discrete de reglare se preferă utilizarea unui regulator cât mai simplu dacă se pot astfel îndeplini cerințele aplicației respective.

11.1 Tipuri de regulatoare cu structură fixă pentru sisteme continue

Regulatoarele cu structură fixă sunt sisteme la care elementele necunoscute sunt doar coeficienții polinoamelor funcției de transfer. În practică, pentru sisteme continue, cele mai des întâlnite tipuri de regulatoare sunt:

- $H_p(s) = k_p$ *regulator proporțional (P)*
- $H_{PI}(s) = k_p + k_I \frac{1}{s}$ *regulator proporțional - integral (PI)*
- $H_{PID}(s) = k_p + k_I \frac{1}{s} + k_d \cdot s$ *regulator proporțional - integral - derivativ (PID)*

Problema care se pune este ca pentru un sistem dat oarecare, să se găsească valorile coeficienților k_p, k_I, k_D astfel încât sistemul rezultat să satisfacă cerințele impuse unui SRA, operație numită *acordarea regulatorului*.

Observații:

- Este clar că regulatorul de tip P nu are în structura sa nici un tip de model intern, deci nu va respecta condițiile b) și d).
- La fel, regulatoarele PI și PID au incluse modelul mărimii exogene tip treaptă, deci *dacă* vor îndeplini condiția a) le vor îndeplini și pe b) și d).

Ele nu vor îndeplini aceste două condiții pentru alte mărimi exogene (rampă, sinus, etc.). Cu toate acestea în practică este în general suficient un SRA proiectat pentru mărimi exogene tip treaptă, deoarece el urmărește relativ bine chiar și o referință oarecare (care poate fi descompusă într-o secvență de trepte) și de asemenea, perturbațiile sunt deseori de tip treaptă.

Vom prezenta în continuare un exemplu de acordare a unui regulator PI pentru un sistem de întârziere de ordin unu.

Exemplu: Fie sistemul continuu: $H(s) = \frac{b}{s+a}$

Se cere să se găsească un regulator PI astfel încât sistemul de reglare automată să aibă factorul de amortizare ζ și pulsația proprie ω_n .

În foarte multe situații se preferă ca performanțele dinamice ale SRA să fie date direct prin perechea (ζ , ω_n). Este și cazul acestui exemplu. Oricum aceste valori se pot calcula ușor din suprareglaj și din timpul de stabilizare (σ și t_s) conform relației 10.19. Schema generală a structurii de reglare automată pe care o vom utiliza și în acest caz a fost descrisă în capitolul 10 (în figura 10.1). Un principiu de bază este acela că pentru proiectarea regloarelor nu se iau în calcul perturbațiile. Acest lucru se bazează pe faptul că regulatorul proiectat trebuie să asigure rejecția perturbațiilor (condiția d) din problema generală a reglării). Ținând cont de aceste elemente schema de reglare automată este cea din figura 11.1.

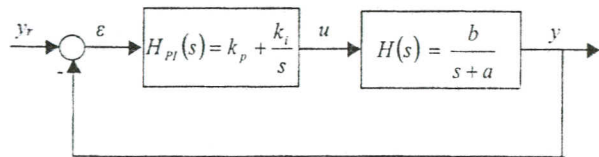


Fig.11.1. Sistem de reglare automată cu regulator cu structură fixă (PI)

Vom urmări să găsim funcția de transfer a acestei structuri de reglare automată. Mai întâi observăm că regulatorul și sistemul sunt conectate în serie. Utilizând proprietățile acestei conexiuni schema se simplifică, ca în figura 11.2.

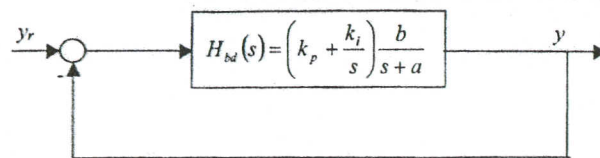


Fig.11.2. Varianta simplificată a schemei din figura 11.1

$H_{bd}(s)$ se numește funcție de transfer în buclă deschisă a ansamblului regulator-sistem și se mai poate scrie:

$$H_{bd}(s) = \frac{b \cdot (k_p \cdot s + k_i)}{s \cdot (s+a)} \quad (11.1)$$

Schema din figura 11.2 este un sistem cu conexiune reacție negativă. Vom aplica formula 6.10 în care: $H_1 = H_{bd}$ iar $H_2 = 1$. Cu aceste considerații funcția de transfer echivalentă sistemului de reglare inițial este:

$$H_{ss}(s) = \frac{H_{bd}(s)}{1 + H_{bd}(s)} = \frac{b \cdot k_p \cdot s + b \cdot k_i}{s^2 + (b \cdot k_p + a) \cdot s + b \cdot k_i} \quad (11.2)$$

Pentru ca performanțele SRA să fie cele cerute trebuie ca numitorul funcției de transfer $H_{ss}(s)$ să fie identic cu polinomul dat de relația 10.21. Construim astfel sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} b \cdot k_p + a = 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \\ b \cdot k_i = \omega_n^2 \end{cases} \text{ cu soluțiile evidente: } \begin{cases} k_p = \frac{2 \cdot \zeta \cdot \omega_n - a}{b} \\ k_i = \frac{\omega_n^2}{b} \end{cases} \quad (11.3)$$

Relația de mai sus permite acordarea regulatorului, adică determinarea constantelor k_p și k_i , în funcție de parametrii sistemului de reglat a și b și de performanțele dinamice impuse ζ și ω_n .

Observații:

- dacă sistemul de reglat ar fi de ordin doi atunci nu vom mai putea utiliza un regulator PI ci va fi nevoie de un PID, algoritmul de acordare fiind similar.

- sistemul echivalent obținut, $H_s(s)$, diferă de un sistem standard de întârziere de ordin doi prin faptul că are un numărător care nu este ω_s^2 . Se spune că sistemul are și un zero. Însă prezența sa nu modifică foarte mult performanțele dinamice ale SRA. Acest lucru se poate verifica ușor utilizând programul Simulink și rămâne ca exercițiu pentru cititor.

11.2 Tipuri de regulatoare cu structură fixă pentru sisteme discrete

Și în cazul sistemelor de reglare discrete se utilizează regulatoare cu structură fixă formate tot din termeni proporționali, integrali sau derivativi. Astfel cele mai des întâlnite tipuri de regulatoare discrete sunt:

- $H_p(z) = k_p$ *regulator proporțional (P)*
- $H_{PI}(z) = k_p + k_I \frac{z}{z-1}$ *regulator proporțional - integral (PI)*
- $H_{PID}(z) = k_p + k_I \frac{z}{z-1} + k_d \cdot \frac{z-1}{z}$ *regulator proporțional - integral - derivativ (PID)*

Acordarea reguletoarelor constă și aici în determinarea coeficienților k_p, k_I, k_d astfel încât sistemul rezultat să îndeplinească pe cât posibil condițiile cerute în formularea problemei generale a SRA. Ca și în cazul continuu aceste cerințe nu pot fi mereu și complet satisfăcute. Cu toate acestea simplitatea soluției și rezultatele efectiv obținute au făcut ca această metodă să fie destul de des utilizată în aplicațiile practice.

Împunerea performanțelor sistemului de reglare se va face astfel încât acesta să se comporte similar unui SRA continuu, deci vom utiliza elementele prezentate în 10.4, transpuse însă în cazul discret. Pentru aceasta determinăm polii sistemului rezultat dorit în continuu, cu relațiile 10.20 și eventual 10.22. Apoi polii sistemului dorit în discret se calculează cu relația: $z_k = e^{s_k \cdot h}$, unde h este pasul de eșantionare utilizat. Celelalte etape, în acordarea regulatorului, sunt similare cu cele prezentate în exemplul de mai sus, din paragraful 11.1. Pentru sistemul fizic pe care dorim să-l reglăm se va utiliza bineînțeles echivalentul său discret ($H(z)$).

ANEXA I: TRANSFORMATĂ FOURIER

1.1 Serii Fourier

Un semnal analogic de durată infinită și periodic poate fi reprezentat printr-o serie Fourier:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (I.1)$$

unde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ iar T_0 - perioada semnalului.

Coeficienții seriei sunt complecși și se determină cu relația:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (I.2)$$

Prin separarea părții reale și a celei imaginare se obțin două serii, una de sinusuri și alta de cosinusuri.

Modulul coeficienților seriei Fourier se numește spectrul semnalului $f(t)$.

Exemplu 1: Pentru semnalele $f(t) = \sin \omega_0 t$ și $g(t) = \cos \omega_0 t$ putem scrie:

$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t}$$

și respectiv:

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}$$

și rezultă imediat că pentru aceste două semnale singurii coeficienți nenuli sunt a_1 și a_{-1} , adică:

$$a_1 = \frac{1}{2j}, \quad a_{-1} = -\frac{1}{2j} \text{ pentru primul semnal}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{-1} = -\frac{1}{2} \text{ pentru al doilea semnal.}$$

Spectrul lor va fi așadar identic și anume cel reprezentat în figura I.1.

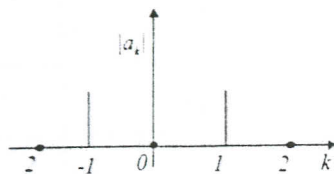


Fig. I.1. Spectrul semnalelor $f(t) = \sin \omega_0 t$ și $g(t) = \cos \omega_0 t$

Exemplu 2: Pentru semnalul descris de funcția: $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < \frac{T_0}{2} \end{cases}$

și reprezentat în figura I.2 se obține următoarea descompunere în serie Fourier:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{jk\omega_0 T_0} \left[e^{-jk\omega_0 t} \right]_{-T_1}^{T_1} = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi} \text{ pentru } k \neq 0 \text{ și } a_0 = \frac{2T_1}{T_0} \text{ pentru } k = 0.$$

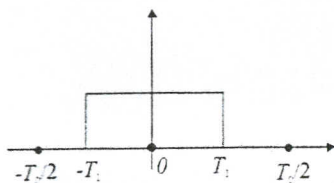


Fig. I.2. Reprezentarea grafică a semnalului din exemplul 2

Spectrul acestui semnal are alura prezentată în figura I.3 în care s-a considerat cazul particular $T_0 = 4T_1$.

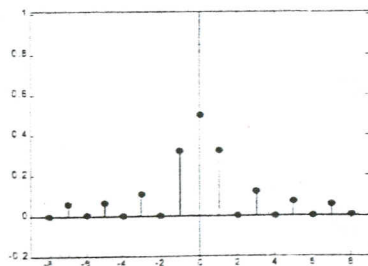


Fig. I.3. Spectrul semnalului din exemplul 2

1.2 Transformata Fourier

Unui semnal analogic descris de o funcție $f(t)$ i se poate defini **transformata Fourier** ca fiind funcția complexă de variabilă reală:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (I.3)$$

Notăția consacrată este: $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

Pentru ca integrala din ecuația I.3 să fie convergentă funcția $f(t)$ trebuie să îndeplinească o serie de condiții, numite condițiile lui Dirichlet. Pe scurt, este suficient să fie absolut integrabilă și continuă (sau cu un număr finit de discontinuități).

Observație:

În plus, pentru semnalele care sunt periodice dar nu respectă condițiile lui Dirichlet pe un interval infinit, se poate defini transformata Fourier pe un interval finit, respectiv pe o perioadă. În acest fel se poate calcula transformata Fourier ori de câte ori există o descompunere în serie Fourier.

Pentru un semnal periodic se poate construi atât seria Fourier cât și transformata Fourier, (considerând un semnal finit, pe o perioadă a semnalului inițial). Între cele două există o legătură directă, coeficienții seriei fiind:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} F(k\omega_0) \quad (I.4)$$

Așadar coeficienții seriei se obțin prin eșantionarea transformatei Fourier, în punctele în care $\omega = k\omega_0$. Cu alte cuvinte, exceptând constanta $\frac{1}{T_0}$, graficul

transformatei Fourier reprezintă înfășurătoarea graficului coeficienților seriei, respectiv graficul modulului transformatei Fourier este înfășurătoarea spectrului semnalului.

Exemplu 3: Pentru semnalul din exemplul nr. 2 transformata Fourier a semnalului dreptunghiular (definit pe o singură perioadă) este:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-T_1}^{T_1} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{2 \sin \omega T_1}{\omega}$$

se vede imediat că:

$$\frac{1}{T_0} F(k\omega_0) = \frac{1}{T_0} \frac{2 \sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0} = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi} = a_k$$

Graficul transformatei Fourier este reprezentat în figura I.4, suprapus peste graficul coeficienților seriei, în cazul particular în care $T_0 = 4T_1 = 4$. Graficul transformatei a fost scalat cu factorul $\frac{1}{T_0}$ pe abscisă și cu factorul $\frac{1}{\omega_0}$ pe ordonată. Se observă că în aceste condiții graficul coeficienților seriei Fourier se suprapune perfect peste cel al transformatei Fourier.

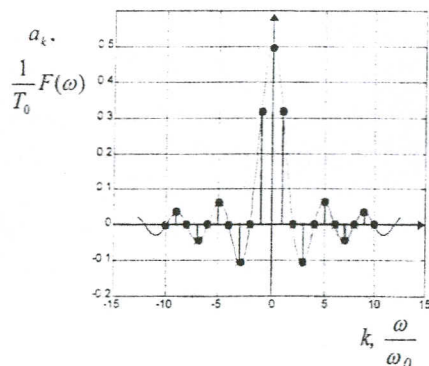


Fig. I.4. Graficul coeficienților seriei și al transformatei Fourier pentru semnalul din exemplul 3

Prezentăm în continuare (tabelul I.1) câteva transformate precum și coeficienții seriei Fourier pentru semnalele cele mai des întâlnite în practică:

Nr. crt.	Semnalul	Transformata Fourier	Coeficienții seriei Fourier
1.	$\delta(t)$ – impulsul Dirac	1	-

2.	$h(t)$ – treapta unitate	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$	-
3.	$e^{at} h(t)$	$\frac{1}{j\omega + a}$	-
4.	$th(t)$	$-\frac{1}{\omega^2}$	-
5.	$t^n e^{-at} h(t)$	$\frac{n!}{(j\omega + a)^{n+1}}$	-
6.	$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_l = a_{-l} = \frac{1}{2}$ $a_k = 0, k \neq \pm l$
7.	$\sin \omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_l = -a_{-l} = \frac{1}{2j}$ $a_k = 0, k \neq \pm l$

Tab. I.1 Transformata și seria Fourier pentru unele semnale standard

Principalele proprietăți ale transformatei Fourier sunt:

a) liniaritatea:

$$\mathcal{F}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{F}\{f(t)\} + b\mathcal{F}\{g(t)\}$$

b) teorema asemănării:

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \text{ unde } a > 0$$

c) teorema întârzierii:

$$\mathcal{F}\{f(t - \tau)\} = e^{-j\omega\tau} \mathcal{F}\{f(t)\}$$

d) teorema deplasării:

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t} f(t)\} = F(\omega - \omega_0)$$

e) teorema derivării originalului:

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = j\omega F(\omega)$$

f) teorema convoluției:

$$\mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} = F(\omega)G(\omega)$$

g) teorema derivării imaginii:

$$\mathcal{F}\{-jtf(t)\} = \frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

h) teorema simetriei:

$$F(-\omega) = F^*(\omega), \text{ dacă originalul este o funcție reală } f(t) \in \mathbb{R}$$

i) teorema lui Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

În legătură cu relația lui Parseval, trebuie remarcat că termenul din partea stângă reprezintă energia semnalului $f(t)$ și deci aceasta se poate calcula fie prin integrarea pe domeniul timp a energiei pe unitatea de timp $|f(t)|^2$, fie prin integrarea pe domeniul frecvenței a energiei pe unitatea de frecvență $\frac{1}{2\pi}|F(\omega)|^2$.

În cazul semnalelor periodice energia este infinită și deci relația lui Parseval nu se poate aplica. Se poate demonstra însă o relație asemănătoare valabilă pe o perioadă:

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

unde a_k sunt coeficienții seriei Fourier și T_0 este perioada semnalului.

Transformata Fourier inversă se calculează cu relația:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.5)$$

Un subiect interesant îl constituie aproximarea semnalelor periodice folosind dezvoltarea în serie Fourier, pe baza proprietăților de convergență ale acestora.

Dacă folosim doar primele N armonice din dezvoltarea în serie Fourier a unui semnal periodic $f(t)$, vom avea o eroare de aproximație dată de:

$$e_N = f(t) - \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t}$$

care evident este cu atât mai mică cu cât N este mai mare. Evident că putem obține o aproximație de același tip, adică folosind tot N exponențiale complexe, dar cu coeficienții obținuți altfel decât cu formulele lui Fourier. Se poate demonstra că seria Fourier este, dintre toate aceste aproximări, cea mai bună în raport cu un criteriu pătratic al erorii. Cu alte cuvinte, pentru un N dat, cantitatea:

$$E_N = \int_0^{T_0} |e_N(t)|^2 dt = \int_0^{T_0} e_N(t) e_N^*(t) dt$$

este minimă pentru seria Fourier. Dacă seria Fourier converge, ceea ce se întâmplă pentru majoritatea semnalelor periodice întâlnite în practică, vom avea:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_N = 0$$

Observație:

Seria Fourier este divergentă fie dacă aplicând formula dată de ecuația I.3 unii coeficienți sunt infiniti, fie dacă, deși toți coeficienții sunt finiți seria nu converge către semnalul inițial. Condițiile riguroase pe care trebuie să le satisfacă un semnal pentru a fi asigurată convergența seriei Fourier sunt în esență aceleași ca în cazul transformatei Fourier, anume condițiile lui Dirichlet.

Pentru a ilustra felul în care converge o serie Fourier către semnalul original să considerăm semnalul din exemplul 1, împreună cu seria sa. Să fixăm $T_1 = 1$ și $T_0 = 4$. În figura I.5 sunt prezentate semnalul original și cel obținut prin aproximare pentru $N=1, 3, 7, 19$.

În acest caz numărul de termeni se poate observa pe grafic, din numărul de oscilații prezente în semnalul aproximat, pe o perioadă a acestuia. O proprietate interesantă a semnalului considerat în acest exemplu este așa-numitul fenomen Gibbs, anume că "suprareglajul" semnalului aproximat (diferența între maximul

său și cel al semnalului inițial) este constant, indiferent de N , câtă vreme N este finit.

Implicația practică este că pentru un semnal cu discontinuități aproximarea în serie Fourier va avea tot timpul un suprareglaj în vecinătatea discontinuităților și că, deși acest suprareglaj va fi fix, N va trebui ales suficient de mare pentru ca durata pulsului ce dă suprareglajul (energia sa) să fie cât mai mică.

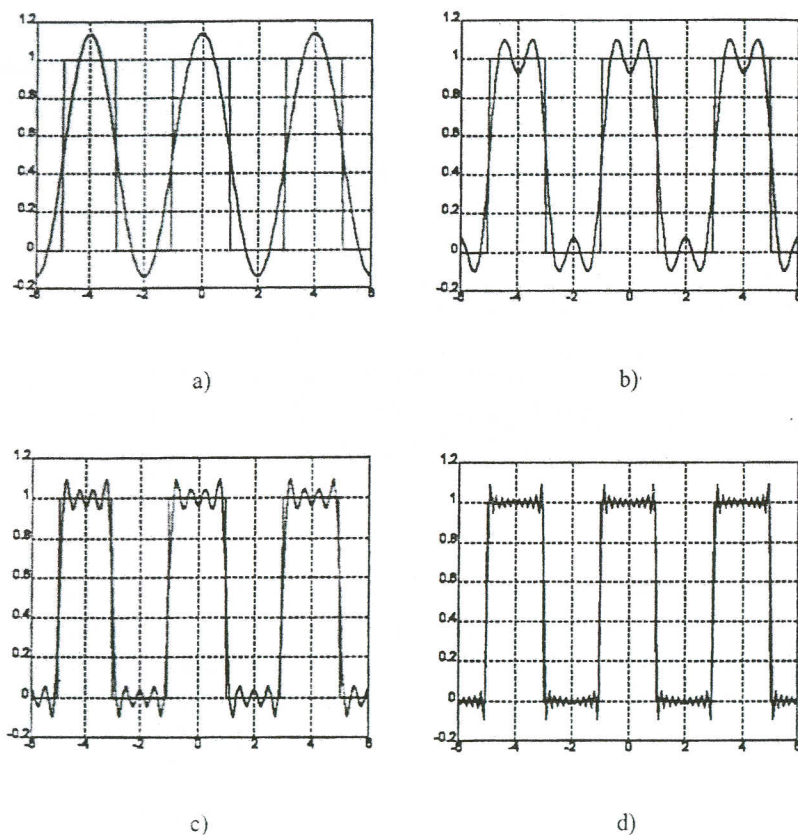


Fig.1.5. Convergerea seriei Fourier a unui semnal dreptunghiular și ilustrarea fenomenului Gibbs. Seria a fost trunchiată la primii $N = 1(a)$, $3(b)$, $7(c)$, $19(d)$ termeni.

ANEXA II: TRANSFORMATĂ LAPLACE

Unui semnal analogic descris de o funcție $f(t)$ i se poate defini **transformata Laplace** ca fiind funcția de variabilă complexă:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (\text{II.1})$$

unde $s = \sigma + j\omega$. Notația consacrată este: $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Observație:

Transformata Laplace nu se poate defini decât dacă funcția $f(t)$ îndeplinește anumite condiții, adică dacă aparține clasei **funcțiilor original**. Aceste condiții sunt:

- $f(t) = 0$, $(\forall) t < 0$;
- $f(t)$ continuă cel puțin pe porțiuni pe intervalul $[0, \infty)$;
- există $M > 0$ și $s_0 \geq 0$ astfel încât $|f(t)| \leq M e^{s_0 t}$, $(\forall) t \geq 0$.

Condițiile de mai sus sunt în general satisfăcute de semnalele întâlnite în practică. Trebuie avut însă grijă să se respecte prima condiție. Aceasta este cerută de faptul că integrala din ecuația II.1 este evaluată pornind din zero, fiind deci vorba despre o transformată Laplace **unilaterală**. Transformata unilaterală este deosebit de utilă în analiza sistemelor cauzale.

Evident transformata Laplace are sens numai dacă integrala din definiție este convergentă. Regiunea din planul complex în care se întâmplă acest lucru se numește **regiunea de convergență** a transformatei Laplace.

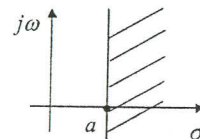


Fig.II.1: Regiunea de convergență a transformatei Laplace a unei funcții original; cazul $a > 0$

Pentru orice semnal aparținând clasei funcțiilor original, regiunea de convergență a transformatei sale Laplace este definită de o relație de forma:

$$\operatorname{Re}\{s\} = \sigma > a$$

și va avea reprezentarea din figura I.1.

Se observă că:

$$F(s)|_{s=j\omega} = \mathcal{L}\{f(t)\}_{s=j\omega} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

și deci transformata Laplace reprezintă o generalizare a transformatei Fourier a semnalelor analogice, dacă cele două integrale sunt convergente. Se poate întâmpla ca pentru un semnal dat transformata Laplace să existe, iar cea Fourier să nu existe. Existența transformatei Fourier implică faptul ca $s = j\omega$ să aparțină regiunii de convergență, deci limita acestei regiuni să fie $a < 0$. Cu alte cuvinte, pentru un semnal având regiunea de convergență a transformatei Laplace ca în figura II.1, transformata Fourier nu există.

Exemplul 1: Fie semnalul descris de $f(t) = e^{-t} + e^{-2t}$ pentru $t \geq 0$, și nul în rest. Să se determine transformata Laplace a sa.

O scriere echivalentă pentru semnalul dat este:

$$f(t) = e^{-t}h(t) + e^{-2t}h(t)$$

unde $h(t)$ reprezintă funcția treaptă unitară.

Pentru simplificare, se poate renunța la scrierea lui $h(t)$, subînțelegându-se existența ei, adică faptul că $f(t)$ aparține clasei funcțiilor original. Transformata Laplace se poate calcula cu relația II.1:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-t}e^{-st} dt + \int_0^{\infty} e^{-2t}e^{-st} dt = \\ &= \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} = \frac{2s-1}{(s+1)(s+2)} \end{aligned}$$

și este convergentă în regiunea $\operatorname{Re}\{s\} = \sigma > 2$.

În figura II.2 este reprezentată zona de convergență a acestei funcții, precum și polii și zeroul ei. Se observă că atât polii cât și zeroul sunt simpli (de ordinul întâi) și că limita regiunii de convergență este dată chiar de către unul din poli.

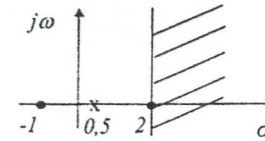


Fig. II.2: Polii, zeroul și regiunea de convergență a transformatei Laplace din exemplul 1.

Pentru orice transformată Laplace rațională (dată de o fracție) se pot demonstra următoarele proprietăți:

- Toți polii sunt în afara regiunii de convergență.
- Regiunea de convergență este fie limitată la stânga de unul din poli, fie se întinde până la $-\infty$.

Ambele afirmații se pot verifica ușor pentru funcția din exemplul anterior.

Transformata Laplace inversă este dată de relația:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (\text{II.2})$$

integrarea făcându-se de-a lungul unei drepte paralele cu axa imaginară, dreaptă situată în zona de convergență. Legătura dintre transformata Fourier și Laplace se observă și în formula transformatei inverse. De fapt relația II.2 se poate obține direct din transformata Fourier inversă, dacă se înlocuiește $f(t)$ cu $f(t)e^{-\sigma t}$.

Pentru evaluarea transformatei inverse se folosește formula de calcul a unei integrale de linie, aplicată relației II.2, rezultând:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n_{\text{rez}}} \operatorname{Rez}\{F(s)e^{st}, s_k\}$$

unde s_k sunt polii funcției $F(s)$. Acest lucru este posibil deoarece toți polii lui $F(s)$ sunt în afara regiunii de convergență, deci în stânga dreptei pe care se face integrarea. Reamintim, în acest context, formulele de calcul ale reziduurilor unei funcții de variabilă complexă s :

- Pentru un pol simplu a :

$$\operatorname{Rez}\{G(s), a\} = \lim_{s \rightarrow a} [(s-a) \cdot G(s)] \quad (\text{II.3})$$

- Pentru un pol a cu ordin de multiplicitate m :

$$\operatorname{Res}\{G(s), a\}_m = \frac{1}{(m-1)!} \left\{ \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} [(s-a)^m G(s)] \right\} \Big|_{s=a} \quad (\text{II.4})$$

De asemenea, calculul transformatei Laplace inverse se poate face prin descompunerea lui $F(s)$ în fracții simple și identificarea acestora cu transformatele unor funcții standard. Câteva transformate ale unor astfel de funcții sunt date în tabelul 1.

Nr. crt.	Semnalul	Transformata Laplace	Zona de convergență
1.	$\delta(t)$ - impulsul Dirac	1	întregul plan
2.	$h(t)$ - treapta unitate	$\frac{1}{s}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$
3.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\operatorname{Re}\{s\} > a$
4.	t	$\frac{1}{s^2}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$
5.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$
6.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$
7.	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$

Tab.II.1. Transformata Laplace a unor semnale standard

Principalele proprietăți ale transformatei Laplace sunt:

- a) liniaritatea:

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$$

- b) teorema asemănării:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \text{ unde } a > 0$$

- c) teorema întârzierii:

$$\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = e^{-s\tau} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

- d) teorema deplasării:

$$\mathcal{L}\{e^{qt} f(t)\} = F(s-q)$$

- e) teorema derivării originalului:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

- f) teorema convoluției:

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s)$$

- g) teorema derivării imaginii:

$$\mathcal{L}\{-tf(t)\} = \frac{dF(s)}{ds}$$

- h) teorema valorii inițiale:

$$f(0+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

- i) teorema valorii finale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Aceste proprietăți pot fi folosite în calculul unor transformate Laplace mai complicate. De exemplu, știind: $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$ și aplicând proprietatea d) putem calcula ușor:

$$\mathcal{L}\{t^n e^{-at}\} = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$$

ANEXA III: TRANSFORMATA FOURIER A SEMNALELOR DISCRETE

3.1 Descompunerea în serie Fourier a semnalelor discrete

Fie un semnal discret $x[n]$, cu perioada N . Acest semnal se poate descompune într-o serie Fourier, descrisă de următoarele relații:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n} \quad \text{unde} \quad a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} n} \quad (\text{III.1})$$

Sumele se calculează pe o perioadă a semnalului, momentul inițial $n = 0$ putând fi plasat arbitrar. De asemenea se poate arăta că pentru orice k este valabilă relația $a_k = a_{k+N}$, adică spectrul unui semnal discret este periodic, cu perioadă egală cu a semnalului.

3.2 Transformata Fourier a semnalelor discrete

Unui semnal discret descris de o funcție $x[n]$ i se poate defini *transformata Fourier* ca fiind funcția complexă de variabilă reală:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad (\text{III.2})$$

iar transformata inversă este dată de:

$$x[n] = \int_0^{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (\text{III.3})$$

Seria din ecuația III.2 este convergentă pentru semnale de durată finită, dar și pentru unele semnale infinite (de exemplu semnale care sunt absolut sumabile sau care au energie finită).

Principalele diferențe față de transformata Fourier a semnalelor analogice sunt:

- periodicitatea transformatei Fourier a semnalelor discrete;
- integrarea pe un interval finit în calculul transformatei inverse.

Ambele diferențe apar drept consecințe ale faptului că două exponențiale discrete care diferă în frecvență printr-un multiplu de 2π sunt identice. Într-adevăr:

$$e^{j(\Omega + 2k\pi)n} = \cos(\Omega + 2k\pi)n + j \sin(\Omega + 2k\pi)n = \cos(\Omega n + 2kn\pi) + j \sin(\Omega n + 2kn\pi) = \cos \Omega n + j \sin \Omega n = e^{j\Omega n}, \quad (\forall) n, k \in \mathbb{Z}$$

Exemplu 1: Fie semnalul discret $x[n] = a^n h[n]$

unde $|a| < 1$ și $h[n]$ este treapta unitate.

Transformata Fourier a acestui semnal este:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\Omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$$

Exemplu 2: Să considerăm acum un puls dreptunghiular de durată finită:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$$

reprezentat în figura III.1

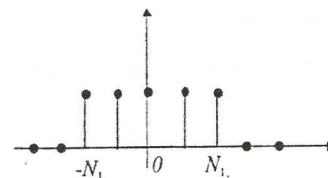


Fig. III.1. Reprezentarea grafică a semnalului analizat în exemplul 2

Transformata sa Fourier este:

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\Omega n} = \frac{e^{j\Omega N_1} - e^{-j\Omega(N_1+1)}}{1 - e^{-j\Omega}} = \\ &= \frac{e^{-j\Omega/2} (e^{j\Omega(N_1+1/2)} - e^{-j\Omega(N_1+1/2)})}{e^{-j\Omega/2} (e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2})} = \frac{\sin \Omega(N_1 + \frac{1}{2})}{\sin \frac{\Omega}{2}} \end{aligned}$$

În evaluarea relației s-a ținut cont de expresia sumei unei progresii geometrice:

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} q^n = \frac{q^{N_1} - q^{N_2+1}}{1-q}$$

Figura III.2 conține reprezentarea grafică a acestei funcții, pentru diverse valori ale lui N_1 .

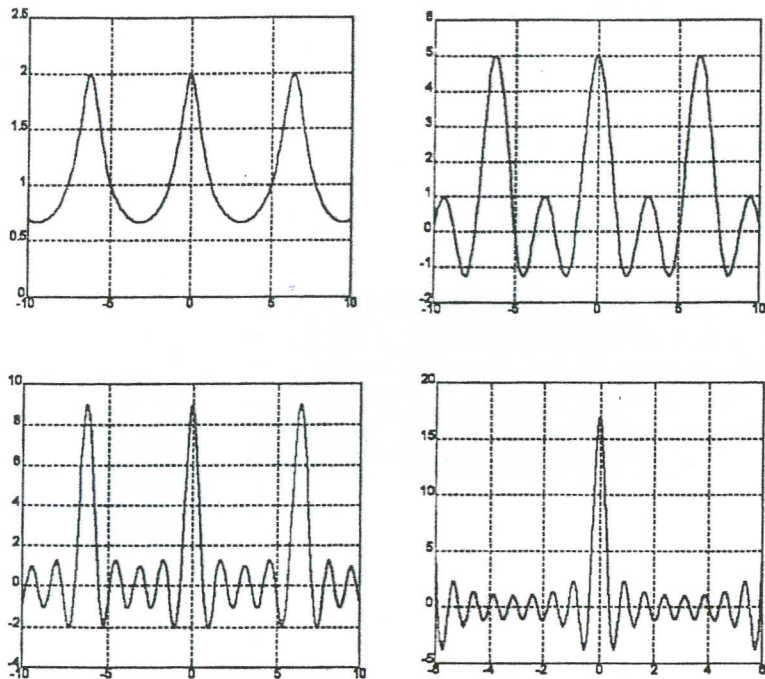


Fig.III.2. Reprezentarea transformatei Fourier a semnalului discret de la exemplul 2, pentru $N_1 = 2, 4, 8, 16$.

Principalele proprietăți ale transformatei Fourier a semnalelor discrete sunt:

a) liniaritatea:

$$\mathcal{F}\{ax[n] + by[n]\} = a\mathcal{F}\{x[n]\} + b\mathcal{F}\{y[n]\}$$

b) teorema întârzierii:

$$\mathcal{F}\{x[n - \tau]\} = e^{-j\Omega\tau} \mathcal{F}\{x[n]\}$$

c) teorema deplasării:

$$\mathcal{F}\{e^{j\Omega_0 n} x[n]\} = X(\Omega - \Omega_0)$$

d) teorema convoluției:

$$\mathcal{F}\{x[n] * y[n]\} = X(\Omega)Y(\Omega)$$

e) teorema derivării imaginii:

$$\mathcal{F}\{nx[n]\} = j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

f) teorema simetriei:

$$X(\Omega) = X^*(-\Omega), \text{ dacă } x[n] \in R$$

g) teorema lui Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

Fie un semnal periodic discret, care este descompus în serie Fourier discretă și căruia i se calculează și transformata Fourier pentru o perioadă. Se poate verifica prin calcul direct că între coeficienții seriei și transformata Fourier există următoarea relație:

$$Na_k = X\left(k \frac{2\pi}{N}\right)$$

3.3 Transformata Fourier discretă

Fie un semnal $x[n]$ de durată finită N_1 , adică nul pentru $n < 0$, $n > N_1$. Alegând un număr $N > N_1$ putem construi, pornind de la $x[n]$ un semnal periodic, de perioadă N , astfel încât:

$$\tilde{x}[n] = x[n], n \in [0, N-1]$$

Coeficienții seriei Fourier a semnalului periodic $\tilde{x}[n]$ sunt, conform ecuației III.2:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$$

Acești coeficienți definesc ceea ce se numește *transformata Fourier discretă* (DFT) a semnalului finit $x[n]$. Notăția consacrată este:

$$\tilde{X}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}, k = 0, 1, \dots, N-1$$

iar transformata inversă este:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{jk \frac{2\pi}{N} n}, n = 0, 1, \dots, N-1$$

Așadar, atât semnalul, cât și transformata sa DFT sunt de lungime finită și se pot obține cu ușurință unul din celălalt. Un semnal de durată finită poate fi deci reprezentat fie de valorile sale, fie de coeficienții transformatei sale Fourier discrete.

O altă caracteristică importantă a DFT este existența unui algoritm numeric foarte rapid pentru calculul său, algoritm cunoscut sub numele de *transformata Fourier rapidă* (FFT).

ANEXA IV:

TRANSFORMATĂ Z

Fie un semnal $x[n]$ discret, nul pentru $n < 0$. Se numește transformata Z a acestui semnal funcția de variabilă complexă:

$$X(z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n} \quad (\text{IV.1})$$

Regiunea din planul complex în care seria de mai sus este convergentă se numește *regiune de convergență* și evident că transformata Z nu are sens decât pentru z aflat în interiorul acestei regiuni.

Exemplu: Fie semnalul discret dat de $x[n] = a^n$. Transformata Z a sa este:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

regiunea de convergență: $|z| > |a|$.

În tabelul IV.1 sunt prezentate transformatele Z pentru câteva funcții uzuale.

Nr. crt.	Semnalul	Transformata Z
1.	$\delta[n]$ - impulsul unitar	1
2.	$h[n]$ - treaptă unitară	$\frac{z}{z-1}$
3.	$x[n] = n$ - rampă	$\frac{z}{(z-1)^2}$
4.	$x[n] = n^2$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
5.	$x[n] = a^n$	$\frac{z}{z-a}$
6.	$x[n] = \sin(n\omega T)$	$\frac{z \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$

7.	$x[n] = \cos(n\omega T)$	$\frac{z(z - \cos(\omega T))}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}$
8.	$x[n] = r^* \sin(n\omega T + \theta)$	$\frac{rz[z\sin(\theta) + \sin(\omega T - \theta)]}{z^2 - 2rz\cos(\omega T) + r^2}$
9.	$x[n] = r^* \cos(n\omega T + \theta)$	$\frac{z[z\cos(\theta) - r\cos(\omega T - \theta)]}{z^2 - 2rz\cos(\omega T) + r^2}$

Tab. IV.1 Transformatele Z ale unor funcții uzuale

Principalele proprietăți ale transformatei Z sunt:

a) liniaritatea:

$$\mathcal{Z}\{a \cdot x[n] + b \cdot y[n]\} = a \cdot X(z) + b \cdot Y(z)$$

b) teorema de deplasare:

$$\mathcal{Z}\{x[n+k]\} = z^k \left[X(z) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x[j]}{z^j} \right], \quad k > 0 \quad \text{pentru cazul general și}$$

$$\mathcal{Z}\{x[n+1]\} = z \cdot [X(z) - x(0)] \quad \text{pentru deplasarea cu o unitate.}$$

c) teorema de întârziere cu o unitate:

$$\mathcal{Z}\{x[n-1]\} = \frac{X(z)}{z}$$

d) teorema valorii inițiale:

$$\lim_{n \rightarrow 0} x[n] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

e) teorema valorii finale:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} X(z)$$

f) teorema asemănării:

$$\mathcal{Z}\{a^* x[n]\} = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

f) teorema derivării imaginii:

$$\mathcal{Z}\{nx[n]\} = -z \frac{dX(z)}{dz}$$

g) teorema convoluției:

$$\mathcal{Z}\{x[n] * y[n]\} = X[z] \cdot Y[z]$$

Exemplu: Fie un sistem discret descris de funcția de transfer:

$$H(z) = \frac{az + b}{z^2 + cz + d}$$

Să vedem cum se poate calcula recursiv, folosind proprietățile transformatei Z, ieșirea $y[n]$ în funcție de valorile semnalului de intrare $u[n]$, $u[n-1]$, $u[n-2]$... și în funcție de valorile anterioare ale ieșirii $y[n-1]$, $y[n-2]$..

Utilizând definiția funcției de transfer:

$$H(z) = \frac{y(z)}{u(z)} \Rightarrow y(z) = H(z) \cdot u(z) = \frac{az + b}{z^2 + cz + d} u(z)$$

vom scrie acum succesiv următoarele relații echivalente:

$$y(z) \cdot (z^2 + cz + d) = (az + b) \cdot u(z)$$

$$y(z) \cdot (1 + cz^{-1} + dz^{-2}) = (az^{-1} + bz^{-2}) \cdot u(z)$$

$$y(z) = az^{-1}u(z) + bz^{-2}u(z) - cz^{-1}y(z) - dz^{-2}y(z)$$

Folosind teorema întârzierii găsim deducem că:

$$y[n] = a \cdot u[n-1] + b \cdot u[n-2] - c \cdot y[n-1] - d \cdot y[n-2]$$

relație ce ne permite calculul recurent al ieșirii unui sistem discret. Acest algoritm se poate generaliza și este util în comanda numerică a SRA. Determinarea transformatei Z inverse se face de obicei cu formula:

$$x[n] = \sum_{k=1}^{n_{\text{rez}}} \text{Rez}\{X(z)z^{n-1}, z_k\} \quad (\text{IV.2})$$

unde z_k sunt polii funcției $X(z)$. Pentru calculul acestor reziduuri se aplică formulele date în anexa II (II.3 sau II.4).

Dacă $X(z)$ este polinomială se recurge la o descompunere în fracții simple și apoi se pot utiliza proprietățile transformatei Z precum și tabelele de funcții uzuale. În general se recomandă descompunerea în fracții simple a lui $\frac{X(z)}{z}$ deoarece majoritatea transformatelor Z au numărătorul de forma $z \cdot (\dots)$ (vezi și tab. IV.1).

Exemplu: Să determinăm $x[n]$ știind că:

$$X(z) = \frac{z^3 - z^2 - 2z}{z^3 - 5z^2 + 7z - 3}$$

Vom descompune mai întâi în fracții simple expresia $\frac{X(z)}{z}$:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2 - z - 2}{z^3 - 5z^2 + 7z - 3} = \frac{z^2 - z - 2}{(z-3) \cdot (z-1)^2} = \frac{c_1}{z-3} + \frac{c_2 z + c_3}{(z-1)^2}$$

prin identificare găsim valorile $c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = 1$. Deci:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z-3} + \frac{1}{(z-1)^2} \Rightarrow X(z) = \frac{z}{z-3} + \frac{z}{(z-1)^2}$$

Este evident acum că:

$$x[n] = 3^n + n.$$

BIBLIOGRAFIE

A. Cărți și tratate

1. K. J. Aström, B. Wittenmark: "Adaptive control", Addison-Wesley, 1989.
2. K. J. Aström, B. Wittenmark: "Computer-controlled systems", Prentice Hall International, 1990.
3. P.J. Ausaklis, A.N. Michel: "Linear Systems", Mc. Graw Hill, 1997.
4. C. Belea: "Automatică neliniară", Editura Didactică și Pedagogică, București, 1985.
5. W. L. Brogan: "Modern control theory", Prentice Hall International, 1991.
6. H.W. Bode: "Network analysis and feedback amplifier design", Van Nostrand, Princeton, 1945.
7. Gh. Cartianu, M. Săvescu, I. Constantin, D. Stanomir: "Semnale, circuite și sisteme", Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980.
8. A. Câmpăanu: "Mașini electrice - probleme fundamentale, speciale și de funcționare optimală", Scrisul Românesc, Craiova, 1988.
9. R. Chassaing: "Digital signal processing with C and the TMS320C30", John Wiley & Sons, 1992.
10. C. K. Chui, G. Cheng: "Kalman filtering with real time applications", Springer Verlag, 1991.
11. P. A. Cook: "Nonlinear dynamical systems", Prentice Hall International, 1992.
12. J. J. D'Azzo, C. H. Houpis: "Linear control system analysis and design - conventional and modern", McGraw Hill Inc., 1995.
13. J. J. Di Stefano, A. R. Stubberud, I. J. Williams: "Feedback and control systems", McGraw Hill Inc., 1990.
14. I. Dumitrache, S. Dumitriu, I. Mihu, F. Munteanu, Gh. Muscă, C. Calcev: "Automatizări electronice", Editura Didactică și Pedagogică București, 1993.
15. A. El Jai, A. J. Pritchard: "Sensors and controls in the analysis of distributed systems", Ellis Horwood Ltd., 1988.
16. J. P. Elloy, J. M. Piasco: "Classical and modern control with worked examples", Pergamon Press, 1981.

17. P. Eykhoff: "Identificarea sistemelor", Editura Tehnică, București, 1977.
18. P. M. Frank: "Introduction to system sensitivity theory", Academic Press, New York, 1978.
19. G. F. Franklin, J. D. Powell, M. L. Workman: "Digital control of dynamic systems", Addison-Wesley Publishing Co., New York, 1992.
20. A. Fransua, R. Măgureanu: "Electrical machines and drive systems", Oxford Technical Press, 1984.
21. A. Fransua, R. Măgureanu: "Mașini și acționări electrice: elemente de execuție", Editura Tehnică, București, 1986.
22. H. Funako: "Actuators for control", Gordon and Breach Science Publishers, 1991.
23. M. Green, D. J. N. Limebeer: "Linear robust control" Prentice Hall International, 1995.
24. C. C. Hang, T. H. Lee, W. K. Ho: "Adaptive control", Instrument Society of America, 1993.
25. C. Ilăș, D. Boghiu: "Teoria sistemelor de reglare automată", Culegere de probleme, Litografia UPB, București 1997.
26. P. A. Ioannou, J. Sun: "Robust adaptive control", Prentice Hall International, 1996.
27. V. Ionescu: "Sinteza structurală a sistemelor liniare", Editura Academiei, București, 1979.
28. V. Ionescu, C. Belea: "Teoria sistemelor", Editura Didactică și Pedagogică, București, 1985.
29. V. Ionescu, C. Popeea: "Conducerea structurală a sistemelor liniare", Editura Tehnică, București, 1986.
30. V. Ionescu, A. Varga: "Teoria sistemelor - Sinteza robustă; metode numerice de calcul", Editura ALL, București, 1994.
31. G. W. Irwin, K. Warwick, K. J. Hunt (editors): "Neural networks applications in control", IEE Press, London, 1995.
32. R. Isermann: "Identifikation dynamischer Systeme", Springer Verlag, 1988.
33. R. Isermann, K. H. Lackmann, D. Matko: "Adaptive control systems", Prentice Hall International, 1992.
34. R. Isermann: "Digital control systems", Springer Verlag, 1981.
35. M. Jamshidi, M. Tarokh, B. Shafai: "Computer aided analysis and design of linear control systems", Prentice Hall International, 1992.
36. E. W. Kamen, B. S. Heck: "Fundamentals of signals and systems using Matlab", Prentice Hall International, 1997.
37. A. Kandel, G. Langholz: "Fuzzy control systems", CRC Press Inc., 1994.
38. P. P. Kanjilal: "Adaptive prediction and predictive control", Peter Peregrinus Ltd., London, 1995.
39. H. Kaufman, I. Bar-Kana, K. Sobel: "Direct adaptive control algorithms: theory and applications", Springer Verlag, 1994.
40. A. Kelemen, M. Imecs: "Sisteme de reglare cu orientare după câmp ale mașinilor de curent alternativ", Editura Academiei, București, 1989.
41. F. Kerestecioglu: "Change detection and input design in dynamical systems", Research Studies Press Ltd., John Wiley & Sons Inc., 1993.
42. J. B. Knowles: "Direct digital control systems", Research Studies Press Ltd., John Wiley & Sons Inc., 1994.
43. W. R. Kolk, R. A. Lerman: "Nonlinear system dynamics", Van Nostrand Reinhold, N. Y., 1992.
44. M. Krstic, I. Kanellahopoulos, P. Kokotovic: "Nonlinear and adaptive control design", John Wiley & Sons Inc., 1995.
45. V. Kucera: "Analysis and design of discrete linear control systems", Prentice Hall International, 1992.
46. B. C. Kuo: "Automatic control systems", Prentice Hall International, 1993.
47. J. R. Leigh: "Applied control theory", Peter Peregrinus Ltd., London, 1987.
48. J. R. Leigh: "Control theory: a guided tour", Peter Peregrinus Ltd., London, 1992.
49. W. S. Levine (editor): "The Control Handbook", CRC and IEEE Press, 1997.
50. F. L. Lewis: "Optimal estimation with an introduction to stochastic control theory", John Wiley & Sons, 1986.
51. D. A. Linkens (editor): "CAD for control systems", Marcel Dekker Inc., 1993.
52. O. Mayr: "The origins of feedback control", The M.I.T. Press, 1970.
53. R. H. Middleton, G. C. Goodwin: "Digital control and estimation - A unified approach", Prentice Hall, N. J., 1990.
54. S. K. Mitra, J. F. Kaiser (editors): "Handbook for digital signal processing", John Wiley & Sons, 1993.
55. J. Moscinski, Z. Ogonowski: "Advanced control with Matlab and Simulink", Ellis Horwood Inc., 1995.

56. K. Narendra, A. M. Annaswamy: "Stable adaptive systems", Prentice Hall, N. J., 1989.
57. S. A. Nasar, I. Boldea: "Electrical machines: dynamics and control", CRC Press, 1993.
58. A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, I. T. Young: "Signals and systems", Prentice Hall International, 1983.
59. P. N. Paraskevopoulos: "Digital control systems", Prentice Hall International, 1996.
60. P. C. Parks, V. Hahn: "Stability theory", Prentice Hall International, 1994.
61. Petkov, Christov, Konstantinov: "Computational methods for linear control systems", Prentice Hall International, 1991.
62. Th. Popescu, S. Demetriu: "Practica modelării și predicției seriilor de timp - metodologia Box-Jenkins", Editura Tehnică, București, 1991.
63. V. M. Popov: "Hiperstabilitatea sistemelor automate", Editura Academiei, București, 1966, Dunod, Paris, 1973, Springer Verlag 1973.
64. H. Saadat: "Computational aids in control systems with Matlab", Mc. Graw Hill Inc., 1993.
65. J. M. M. Sanchez, J. Rodellar: "Adaptive predictive control - from the concepts to plant optimization", Prentice Hall International, 1996.
66. I. Soran: "Acționări electrice", Litografia U. P. B., București, 1989.
67. T. Söderström, P. Stoica: "System identification", Prentice Hall, 1989.
68. R. Soeterboek: "Predictive control - a unified approach", Prentice Hall International, 1992.
69. M. Tertișco, P. Stoica, Th. Popescu: "Identificarea asistată de calculator a sistemelor", Editura Tehnică, București, 1987.
70. R. J. Vaccaro: "Digital Control - A State - Space Approach", McGraw - Hill International Editions, New York, 1995.
71. A. Vanecek, S. Celikovskiy: "Control systems: from linear analysis to the synthesis of chaos", Prentice Hall International, 1996.
72. K. Watanabe: "Adaptive estimation and control - partitioning approach", Prentice Hall International, 1992.
73. P. E. Wellstead, M. B. Zarrop: "Self tuning system control and signal processing", John Wiley & Sons, 1991.
74. D. Williamson: "Digital control and implementation - finite wordlength considerations", Prentice Hall International, 1991.

B. Articole

75. D. Berg, I. Cohen, G. Cohen: "Intelligent motion control concept", PCIM'95 Proceedings, Nurnberg, 1995.
76. C. Bohn, D. P. Atherton: "An analysis package comparing PID anti-windup strategies", IEEE Control Systems, Vol. 15, Nr. 2, 1995.
77. W. R. Evans: "Graphical analysis of control systems", Transactions AIEE, vol. 67, pp. 547-551, 1948.
78. N. Hazen: "Theory of servomechanism", Journal of the Franklin Institute, 1934.
79. C. Ilas, A. Sarca, R. Giuclea, L. Kreindler: "Motion Control Using Fixed and Floating Point DSP System", Texas Instruments European DSP Conference, Paris, 1996.
80. C. Ilas, A. Bettini, L. Ferraris, G. Griva, F. Profumo: "Comparison of Different Schemes without Shaft Sensors for Field Oriented Control Drives", in "Sensorless Control of AC Motor Drives", IEEE Press, pp. 30-39, 1996.
81. R. E. Kalman: "A new approach to linear filtering and prediction problems", ASME J. Basic Eng., vol. 82, pp. 35-45, March 1960.
82. I. D. Landau, F. Rolland: "Identification and control of electrical drives". Motion Control for Intelligent Automation. IFAC Workshop, Perugia, 1992.
83. D. G. Luenberger: "An introduction to observers", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-16, no. 6, pp. 596-602, December 1971.
84. H. Nyquist: "Regeneration theory", Bell Systems Tech. Journal, 1932.
85. S. Sansuk-Iam, T. E. Bullock: "Analysis of discrete time Kalman filtering under incorrect noise covariances", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-35, no. 12, pp. 1304-1309, december 1990.
86. P. Vas, W. Drury: "Future trends and development of electrical drives". PCIM'95 Proceedings, Nurnberg, 1995.

MATRIX ROM

CARTE TEHNICĂ ȘI ȘTIINȚIFICĂ

8 ANI DE ACTIVITATE - PESTE 600 DE TITLURI

Alte lucrări de **AUTOMATICĂ*** apărute:

- ❖ Gheorghe Băluță - **CIRCUITE NUMERICE. APLICAȚII** • Preț: 68000 lei
- ❖ Gheorghe Băluță - **CIRCUITE LOGICE ȘI STRUCTURI NUMERICE. PROIECTARE ȘI APLICAȚII** • Preț: 67000 lei
- ❖ Sorin Caluianu - **INTELIGENȚA ARTIFICIALĂ ÎN INSTALAȚII** • Preț: 92000 lei
- ❖ Radu Dobrescu - **AUTOVEHICULE INTELIGENTE** • Preț: 100000 lei
- ❖ Ion Dumitrache, Nicolae Constantin, Monica Drăgoicea - **REȚELE NEURALE. IDENTIFICAREA ȘI CONDUCEREA PROCESELOR** • Preț: 104000 lei
- ❖ Adrian Filipescu, Sabin Stamatescu - **CONDUCEREA PROCESELOR PRIN TEHNICI ADAPTIVE ȘI CUSTRUCȚURĂ VARIABILĂ. ALGORITMI ȘI ROBUSTEȚE** • Preț: 32000 lei
- ❖ C. Lazăr, O. Păstrăvanu ș.a. - **CONDUCEREA ASISTATĂ DE CALCULATOR A PROCESELOR TEHNICE. PROIECTAREA ȘI IMPLEMENTAREA ALGORITMIILOR DE REGLARE NUMERICĂ** • Preț: 80000 lei
- ❖ V. Neagoe, O. Stănășilă - **RECUNOAȘTEREA FORMELOR ȘI REȚELE NEURALE** • Preț: 100000 lei
- ❖ L. Niță, M. Crețu, C. Foșolău, O. Postolache - **INTERFAȚAREA ȘI PROGRAMAREA CALCULATORILOR PENTRU REALIZAREA SISTEMELOR INFORMATICE DE MĂSURARE** • Preț: 52000 lei
- ❖ Doru Adrian Pănescu - **SISTEME BAZATE PE CUNOȘTINȚE. REPREZENTAREA CUNOAȘTERII** • Preț: 88000 lei
- ❖ O. Păstrăvanu - **SISTEME CU EVENIMENTE DISCRETE. TEHNICI CALITATIVE BAZATE PE FORMALISMUL REȚELOR PETRI** • Preț: 79000 lei
- ❖ Daniel Popescu - **TEORIA SISTEMELOR AUTOMATE** • Preț: 60000 lei
- ❖ Daniela Popescu, Cornel Popescu - **CIRCUITE DIGITALE ELEMENTARE** • Preț: 58000 lei
- ❖ Gh. Pușcașu, Al. Stancu - **SISTEME INSTRUIBILE BAZATE PE REȚELE NEURALE** • Preț: 100000 lei
- ❖ Valentin Sgărciu - **PRELUCRĂRI DE DATE** • Preț: 83000 lei
- ❖ Florin Stratuleț - **ANALIZA ASISTATĂ DE CALCULATOR A SISTEMELOR LINIARE** • Preț: 100000 lei
- ❖ Sever Șerban, I.C. Corăci ș.a. - **TEORIA SISTEMELOR. CULEGERE DE PROBLEME. RĂSPUNSUL ÎN TIMP AL SISTEMELOR LINIARE. ANALIZA STABILITĂȚII SISTEMELOR LINIARE** • Preț: 72000 lei
- ❖ Sever Șerban, I.C. Corăci - **TEORIA SISTEMELOR. CULEGERE DE PROBLEME. ANALIZA ÎN FRECVENȚĂ A SISTEMELOR LINIARE** • Preț: 100000 lei
- ❖ Sever Șerban - **ANALIZA SISTEMELOR DE REGLARE AUTOMATĂ** • Preț: 88000 lei
- ❖ Costin Ștefănescu - **SISTEME TOLERANTE LA DEFECTE** • Preț: 80000 lei
- ❖ Nasta Tănăsescu - **IDENTIFICAREA SISTEMELOR CU PARAMETRI DISTRIBUIȚI** • Preț: 44000 lei
- ❖ Radu Vărbănescu - **SISTEME INFORMATIZATE DE MĂSURARE** • Preț: 69000 lei
- ❖ M. Voicu, O. Păstrăvanu - **INTRODUCERE ÎN AUTOMATICĂ. CULEGERE DE PROBLEME**
- ❖ Constantin Voloșencu - **STANDARDIZARE ȘI METODOLOGII DE PROIECTARE ÎN AUTOMATIZĂRI INDUSTRIALE** • Preț: 47000 lei

Ofertele complete și gratuite pe domenii se pot solicita telefonic. Achiziționarea cărților se poate face direct de la sediul editurii, prin colet postal cu plata ramburs, pe baza unei comenzi scrise sau de la distribuitorii din București (librăria RAMA, librăria 164, librăria Luceafărul), Iași, Constanța, Oradea, Pitești. Pentru cărțile achiziționate direct de la editură sau prin colet postal se acordă o reducere a prețului de 20-25%, iar clienții respectiv primesc periodic informații despre noile lucrări apărute sau în curs de apariție.

* Prețurile din această listă sunt valabile începând cu 01.04.2001